

TRABAJO FIN DE MÁSTER

CURSO 2022/2023

Dificultades en el aprendizaje de las operaciones Matemáticas básicas de los alumnos de la ESO y su relación con la Discalculia

Alumno/a: **Francisco Javier Pérez Martínez**

Tutor/a: **María Mar Soliño Pazó**

Modalidad: Revisión Sistemática

Especialidad: Matemáticas

Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación
Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional, Enseñanza de
Idiomas y Enseñanzas Deportivas

UNIVERSIDAD EUROPEA DE MADRID

Resumen:

La asignatura de Matemáticas en el nivel de Educación Secundaria Obligatoria se enfrenta a un problema educativo de importancia notoria. En particular, se evidencia la dificultad de los alumnos para consolidar un aprendizaje adecuado en el manejo de las operaciones fundamentales con números reales, particularmente en lo que respecta al cálculo con números enteros y fraccionarios. Este inconveniente tiene el potencial de limitar el desarrollo de habilidades matemáticas posteriores y, en última instancia, afectar el rendimiento académico de los estudiantes. Como tal, se requieren estrategias pedagógicas efectivas que aborden esta problemática y promuevan la adquisición de competencias sólidas y duraderas en el ámbito de las Matemáticas. Es más acusado en los cursos de primero y segundo pues el comienzo de la Educación Secundaria es un punto de inflexión en la comprensión de la teoría de números estudiada durante el período previo de educación primaria.

Las legislaciones vigentes, tanto la LOMCE como la nueva LOMLOE, incluyen los contenidos de las unidades didácticas relativas a las operaciones de números reales a principios de curso y son consideradas como una herramienta básica y necesaria para comprender las restantes unidades que se verán a lo largo del curso.

El objetivo general del presente Trabajo Fin de Máster es averiguar, mediante una revisión sistemática, las dificultades más comunes que tiene los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas, qué tipo de errores suelen cometer más a menudo y conocer qué metodologías didácticas innovadoras se han propuesto en los últimos años para mejorar este aprendizaje.

Se hace una mención especial a la discalculia como posible causa de estas dificultades ya que es un trastorno específico del aprendizaje. En este sentido es útil conocer los diferentes modelos didácticos de tipo grupal y cooperativo basados en proyectos o en problemas que tengan en cuenta también las inteligencias múltiples, así como herramientas TIC experimentales gracias a nuevos enfoques pedagógicos. Es tan importante una adecuada estrategia de aprendizaje por parte del alumnado como una metodología motivadora que ha de poner en marcha el equipo docente del departamento de Matemáticas.

Palabras clave: Dificultades de aprendizaje, Matemáticas, resolución de problemas, número, discalculia, Educación Secundaria obligatoria.

Abstract

The Mathematics subject at the Compulsory Secondary Education level faces a significant educational problem. It is evident that students have difficulty consolidating adequate learning in the management of fundamental operations with real numbers, particularly in relation to calculation with integers and fractions. This inconvenience has the potential to limit the development of later mathematical skills and ultimately affect students' academic performance. As such, effective pedagogical strategies are required to address this issue and promote the acquisition of solid and lasting competencies in the field of Mathematics. This problem is more pronounced in the first and second courses because the beginning of Secondary Education is a turning point in the understanding of the number theory studied during the previous period of primary education.

Current legislation, both the LOMCE and the new LOMLOE, includes the contents of didactic units related to operations with real numbers at the beginning of the course, and they are considered a basic and necessary tool for understanding the remaining units that will be covered throughout the course.

The general objective of this Master's Thesis is to find out, through a systematic review, the most common difficulties that students have in learning Mathematics, what type of errors they usually make most frequently, and to know what innovative didactic methodologies have been proposed in recent years to improve this learning. Special mention is made of dyscalculia as a possible cause of these difficulties since it is a specific learning disorder. In this sense, it is useful to know the different group and cooperative didactic models based on projects or problems that also consider multiple intelligences, as well as experimental ICT tools thanks to new pedagogical approaches. An adequate learning strategy on the part of the students is as important as a motivating methodology that the mathematics department teaching staff must implement.

Key words: Learning difficulties, mathematics, problem-solving, number, dyscalculia, compulsory secondary education.

ÍNDICE

1. Introducción.....	1
1.1. Justificación del tema seleccionado.....	3
1.2. Definición del problema de investigación.....	5
2. Marco teórico.....	6
3. Metodología.....	16
3.1. Objetivos.....	16
3.2. Introducción a la metodología de investigación y procedimiento.	16
3.3. Criterios de inclusión y exclusión.....	19
3.4. Diagrama de flujo.....	20
4. Resultados.....	21
4.1. Estado del arte del aprendizaje matemático.....	22
4.2. Estrategias de mejora del aprendizaje matemático.....	32
5. Discusión.....	40
6. Conclusiones.....	42
6.1. Futuras líneas de investigación.....	44
7. Referencias bibliográficas.....	46

1. INTRODUCCIÓN

Las Matemáticas son esenciales para entender y describir el mundo que nos rodea, y necesarias para resolver problemas en una amplia variedad de campos, como la ciencia, la tecnología, la economía, las finanzas, etc. Además, desarrollan habilidades valiosas para el pensamiento lógico y crítico, el razonamiento ordenado, la resolución de problemas, los retos y la toma de decisiones

Según se recoge en la nueva ley educativa LOMLOE a través de su Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, la competencia matemática junto a las competencias en ciencia, tecnología e ingeniería (competencia STEM por sus siglas en inglés) entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible.

En este sentido, una formación sólida en Matemáticas en la educación primaria y secundaria puede ayudar a desarrollar habilidades y conocimientos importantes que son esenciales para el éxito en la vida a través de cualquier actividad. Además, comprender y ser capaz de aplicar conceptos matemáticos puede mejorar la capacidad para resolver problemas y tomar decisiones informadas en la vida cotidiana, es decir, que ser bueno en Matemáticas, según indican autores como Álvarez-Montesinos y otros (2018) no sólo afecta al ámbito académico sino que en el ámbito personal, tener peores habilidades matemáticas conlleva tener más dificultades en la gestión del dinero o tener peores oportunidades laborales, entre otros problemas (Parsons & Bynner, 2005). Es decir, la habilidad matemática proporciona una mejor respuesta ante los retos que el ser humano enfrenta en las diferentes áreas de la vida.

Asimismo, en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, tal y como indica Morales (2014), se manifiestan dificultades en los estudiantes derivadas de distintos aspectos que pueden ser debidos a la organización curricular de las Matemáticas, conceptualización de los estudiantes, problemas al enseñar etc.; y, según Socas (1997) estas dificultades se conectan y se refuerzan en estructuras más complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los estudiantes en forma de errores.

“Los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” según indica Matz (1980, p. 94), citado a su vez por Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008, p. 2), por lo que el error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de la falta de conocimiento o de un despiste.

Las personas que temen a los números suelen tener menos habilidades matemáticas, como indican González-Gómez y otros (2017), y sufren lo que se ha denominado Ansiedad Matemática (AM) que es el fenómeno de sentir emociones negativas al afrontar operaciones Matemáticas. Los autores señalan también, haciendo referencia a un experimento realizado por Ashcraft y Faust en 1994, que esta ansiedad es debida a la aparición de pensamientos intrusivos, por ejemplo, con frases de este tipo: “a mí esto se me da fatal” o “esto es muy difícil”, que consumen recursos de atención y memoria, restando disponibilidad de estos para realizar ciertas tareas de procesamiento mental.

Con lo expuesto anteriormente surgen a priori las siguientes preguntas de investigación:

¿Cuáles y de qué manera se presentan los errores que evidencian las dificultades que poseen los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas con números reales?

¿Qué metodologías activas podemos utilizar para solucionar las dificultades en la resolución de ejercicios de Matemáticas con números reales en estudiantes de Educación Secundaria?

¿Cuáles de estas metodologías se han puesto en práctica en las aulas?

Como se verá a lo largo de esta exposición, los errores que se presentan en la resolución de problemas de Matemáticas con números reales pueden variar dependiendo del nivel de habilidad y conocimiento matemático de los estudiantes. Algunos ejemplos comunes de errores incluyen:

- Confusión en el uso de conceptos matemáticos básicos, como los números negativos y las fracciones.

- Problemas con el cálculo y la manipulación de números reales, como operaciones con decimales y raíces.

- Dificultad para comprender y aplicar las propiedades y relaciones Matemáticas necesarias para resolver el problema.

- Errores en la interpretación y representación de problemas escritos y verbales.
- Dificultad para aplicar técnicas y estrategias de resolución de problemas eficaces.

Es decir, que estos errores anteriormente citados pueden presentarse de varias maneras como, por ejemplo, a través de errores en la notación, en la lógica, en la interpretación, en el uso de las fórmulas, en el cálculo, en la representación, etc.

Para abordar con resultados adecuados estos errores en los centros educativos, es necesario realizar un diagnóstico inicial que permita conocer las dificultades específicas de los estudiantes y luego implementar estrategias pedagógicas y metodológicas que permitan superar estas dificultades.

Por otro lado, existen dificultades relacionadas con el propio alumno adolescente, tal y como indica Torrecillas (2019) citando a Ruíz (2010) al indicar que la adquisición de conceptos matemáticos es un largo período que se desarrolla a lo largo de la etapa adolescente del alumno y que debe tenerse muy en cuenta a la hora de la docencia de esta materia, ya que las regiones cerebrales tienen relación con las capacidades cognitivas y algunas de ellas se desarrollan en esta etapa de su vida.

1.1. Justificación del tema seleccionado

Es fundamental señalar que se ha identificado un obstáculo educativo en la enseñanza de las Matemáticas para los estudiantes de la Educación Secundaria obligatoria. Este problema afecta la capacidad de los alumnos para consolidar su aprendizaje en la materia a medida que avanzan en sus estudios, tal como indica Fernández Lázaro (2013). La necesidad de abordar este desafío educativo es crucial para garantizar que los estudiantes estén preparados adecuadamente en el dominio de las Matemáticas y puedan tener éxito en su educación y en sus futuras formaciones.

La resolución inadecuada de las operaciones básicas que incluyen números reales, entre los que se encuentran los enteros y los fraccionarios no sólo ocurre durante los cuatro años de la etapa de secundaria, sino que alcanza incluso a estudiantes que cursan el Bachillerato y se prolonga hasta la universidad en ocasiones según indican Gamboa Araya et al. (2019) Esta inseguridad en el empleo adecuado de las reglas básicas del funcionamiento de las Matemáticas es más acusada en primero y segundo de la ESO, pues el comienzo de la Educación

Secundaria constituye un punto de inflexión en la comprensión de la teoría de números estudiada durante el período previo de primaria.

Las legislaciones vigentes actuales, tanto la LOMCE como la nueva LOMLOE, incluyen las unidades didácticas relativas a las operaciones de números reales para ser impartidas a principios de curso y son consideradas como una herramienta básica y necesaria para comprender las restantes unidades que se impartirán a lo largo del curso. A este respecto, los contenidos relacionados con los números reales en la Educación Secundaria actualmente vienen recogidos en el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. En el mismo, puede observarse que dichos contenidos aparecen distribuidos en todos los niveles que se imparten durante esta etapa según la clasificación de números naturales, enteros, fraccionarios o decimales y reales.

El objetivo global de esta revisión sistemática es identificar las causas más comunes de dificultad en el uso adecuado de operaciones básicas con números reales en estudiantes de Educación Secundaria. Y, por otro lado, averiguar qué metodologías didácticas innovadoras se han propuesto en los últimos años que permitan consolidar el aprendizaje correcto y duradero de estas operaciones básicas de Matemáticas.

Para ello, es útil conocer los diferentes modelos didácticos de tipo grupal y cooperativo basados en proyectos o en problemas para el correcto cálculo básico de operaciones que tengan en cuenta también las inteligencias múltiples. Aquí cabe señalar que es tan importante una adecuada estrategia de aprendizaje por parte del alumnado como una metodología motivadora que ha de poner en marcha el equipo docente de la asignatura de Matemáticas del centro educativo que corresponda.

Con una mirada retrospectiva de los últimos años, los resultados de PISA 2018 (la prueba de la OCDE que mide las competencias de los alumnos de 15 años en Matemáticas y en comprensión lectora), muestran que los alumnos españoles tienen los peores resultados en ciencias desde que se comenzó a realizar la prueba en el año 2000, con una media de 483 puntos, 13 puntos menos que en el año 2013. Además, los resultados en Matemáticas se han estancado, con una media de 481 puntos, cinco menos que en la última edición de 2015. En ambas disciplinas, los alumnos españoles están por debajo de la media de la OCDE. Esto indica que hay

una necesidad de mejorar la educación en ciencias en general y en Matemáticas, en particular, en España.

Con relación a esto último, según recoge en el último informe PISA publicado en el año 2018, se entiende por competencia matemática como la capacidad de los estudiantes de formular, aplicar e interpretar las Matemáticas en contextos diferentes. Incluye razonar matemáticamente y emplear conceptos, procedimientos, hechos y herramientas Matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos de diverso tipo.

1.2. Definición del problema de investigación

La dificultad en el aprendizaje de las Matemáticas es un problema importante para los estudiantes de secundaria pues puede afectar a su rendimiento académico global y, quizá lo más significativo, minar la confianza en sí mismos, pudiendo llegar a tener un impacto negativo en su futuro educativo y laboral. Sin embargo, existen estrategias y recursos disponibles para ayudar a los alumnos a superar estas dificultades, desde la tutoría con el profesor correspondiente, el uso de recursos educativos digitales, la colaboración con compañeros de clase, las diferentes estrategias de aprendizaje basado en proyectos, o en problemas, etc.

Por tanto, y dado que la dificultad en el aprendizaje de las Matemáticas es un inconveniente tan significativo que puede desembocar en problemas mayores se ha decidido realizar una búsqueda bibliográfica en idioma español de los últimos años a través de las publicaciones de autores que han investigado este asunto de manera seria. En este sentido, cada trabajo publicado sigue diferentes líneas de investigación que se van a ir exponiendo de manera estructurada a lo largo de las siguientes páginas del marco teórico.

Por todo ello, es importante investigar este problema que se repite año tras año en las aulas y que no se ha resuelto aún de manera satisfactoria, así como desarrollar una revisión sistemática bibliográfica lo más completa posible con el objetivo de buscar, analizar y determinar cuáles son las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas investigadas y también qué posibles soluciones se han aportado a través de las diferentes líneas de investigación llevadas a cabo a nivel internacional.

2. MARCO TEÓRICO

El presente estudio se enfoca en una revisión sistemática centrada en la problemática educativa del aprendizaje insuficiente en la correcta utilización de las operaciones básicas con números reales por parte de los estudiantes de Educación Secundaria. Este problema es de gran importancia debido a que el inicio de esta etapa educativa marca un cambio significativo en el aprendizaje de la teoría de números, que ya fue previamente introducida y estudiada durante el período de primaria.

Las dificultades que los alumnos ponen de manifiesto en el aprendizaje de las Matemáticas tienen diferentes orígenes y son de diversa naturaleza, el sistema educativo en sí mismo, el nivel sociocultural, el profesor, la materia, etc., por lo tanto, esta temática se va a poder analizar y abordar desde ópticas distintas.

Según autores como Socas (1997) estas dificultades iniciales se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. Para este autor, el error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.

Continuando con la idea anterior de este autor y aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas es de diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas, éstas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (objetos matemáticos y procesos de pensamiento), la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las Matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos, y una quinta, relacionada con la falta de una actitud racional hacia esta asignatura.

Con la idea de consolidar un aprendizaje adecuado en el empleo de las operaciones y conceptos matemáticos, una vez cometido un error es importante por parte del profesor mostrar al alumno la manera correcta en la que se ha de realizar el ejercicio correspondiente con el fin de que el alumno sea capaz de aprender del propio error para no volver a cometerlo. Sin embargo, esto no siempre es así y este último suele volver a incurrir en el mismo fallo de manera sistemática en ocasiones.

En esta línea, autores como Carrión (2007) afirman que cometer un error no significa adquirir automáticamente experiencia negativa que pueda usarse para

prevenir errores posteriores. Para usar un error de manera productiva, es necesario que un individuo pueda comprender, analizar y corregir el error y usarlo para desarrollar estrategias de prevención de errores nuevos.

Si el error es descubierto en una interacción o debate entre profesor y alumno entonces se producirá la superación de éste por parte del estudiante puesto que los alumnos pueden modificar sus viejas ideas cuando están convencidos de que hay otra que es mejor, como nos indica Pochulu (2009).

Lo ideal a la hora de avanzar en el conocimiento de una materia es ponerla en práctica de manera progresiva y sin cometer errores para ir consolidando su adecuado aprendizaje de manera sólida, sin embargo, por la propia naturaleza imperfecta del ser humano los errores van a aparecer con frecuencia a la hora de comprender y solucionar los ejercicios.

Sanmartí (2007) mantiene que la calidad de un proceso de enseñanza depende en buena parte de si se consigue ayudar a los alumnos a superar obstáculos en espacios de tiempo cercanos al momento en que se detectan. Además, lo importante para aprender es que el propio alumno sea capaz de detectar sus dificultades, comprenderlas y autorregularlas (p.35).

Abundando más en todo lo anterior, el quinto capítulo de la legislación autonómica actual de la Comunidad de Madrid relativa a la LOMLOE en su Decreto 65/2022, de 20 de julio, concreta las medidas de atención a la diversidad en función de las diferentes necesidades educativas que pueda presentar el alumnado y define las bases necesarias para garantizar su desarrollo reglamentario por parte de la consejería competente en materia de Educación. En este sentido, es sorprendente leer hace 30 años ya a Perrenoud en su obra titulada *“La evaluación de los alumnos. De la producción de la excelencia a la regulación de los aprendizajes. Entre dos lógicas”* la siguiente reflexión:

Cuanto más precisa es la información, más se individualiza. Para adaptar la enseñanza ya no basta, entonces, con reexplicar, con moderar el ritmo, volver atrás o adoptar un modo de exposición más concreto, por ejemplo. Todo público escolar, por selecto que sea, es heterogéneo. Frente a la misma enseñanza, los alumnos o estudiantes no progresan al mismo ritmo ni de la misma manera. Si nos dedicamos a una evaluación formativa, tarde o temprano sobreviene un momento en el que hay que rendirse a la evidencia: ningún ajuste global está a la medida de la diversidad de

las necesidades. La única respuesta adecuada es diferenciar la enseñanza. (Perrenoud, 1993, p. 159).

Volviendo al mensaje principal del presente trabajo en relación con las dificultades durante el proceso de aprendizaje, Heinze, A. (2005) afirma que, aunque se aceptan errores como una parte natural del proceso de aprendizaje, para los alumnos, es desagradable incurrir en ellos, o ser sorprendidos cometiendo errores. El autor basa este hecho en dos razones; por una parte, hay una componente afectiva, es posible que el error signifique una afrenta. Por otro lado, los errores muestran evidencia de fallas en cierta competencia individual que, para los alumnos, representan desventajas al ser evaluados. Es obvio que hay una diferencia entre el manejo de error en situaciones en privado o públicamente. Si el error de un individuo se discute en el grupo, puede sentir que se le exhibe. Si el profesor discute los errores con un estudiante en situación privada, puede haber oportunidad para el progreso individual del aprendizaje. La contribución e investigación de Heinze se enfoca en aspectos cognoscitivos y afectivos del manejo del error en procesos del aula, desde la perspectiva y percepción del estudiante y del observador. Desde este punto de vista, su estudio fue guiado por las preguntas siguientes:

- ¿Cuál es la percepción de los estudiantes con respecto al manejo del error en las lecciones de Matemáticas? ¿Qué piensan los estudiantes sobre la conducta del maestro cuando se les intimida por incurrir en errores en situaciones públicas?
- ¿Cómo tratan los estudiantes individualmente sus propios errores? ¿Usan los errores como una oportunidad de aprendizaje?
- ¿Qué tipo de errores son “permitidos” o “prohibidos” en la percepción de los estudiantes (En el sentido negativo, desde el punto de vista del profesor)?

Para investigar el conocimiento del estudiante relacionado con los errores Lannin J., Townsend, B. & Barker D. (2006) desarrollaron un marco conceptual que llamaron ciclo reflexivo de análisis del error en el que describen el proceso que los estudiantes siguen cuando examinan y analizan los errores que cometen. Un estudiante reconoce que ha incurrido en un error y elige entre ignorar la fuente o considerar las causas potenciales que lo originan. Si atribuyó el error a una, o varias fuentes, el estudiante intenta reconciliarse con él para eliminar el conflicto cognoscitivo que experimenta. Después de llevar a la práctica estrategias para reconciliarse con el error lo trata con una de las tres maneras siguientes:

- Se reconcilia el error con éxito y terminan el ciclo.

- Detiene el proceso de la reconciliación sin resolverse el error y termina.
- Reconocen que la fuente original de atribución del error es incorrecta y busca otras fuentes potenciales de error.

A su vez, los autores examinaron tres preguntas importantes para aclarar cómo los estudiantes tratan el conflicto cognoscitivo que experimentan cuando examinan sus errores:

¿Qué factores contribuyen a que reconozcan sus errores?

¿A qué causas potenciales atribuyen sus errores?

¿Qué estrategias utilizan para reconciliarse con sus errores?

Las direcciones que guían el desarrollo de este trabajo se basan en el segundo y tercer incisos de los métodos de análisis de errores de Mulhern (1989), incluidos en la primera categoría dada en Rico (1994). También se toman en cuenta las estructuras de los números naturales y enteros pues se consideran, esencialmente, la sintaxis de la aritmética, la noción de operación aritmética y los procesos algorítmicos y el desarrollo de la noción de estructura numérica a través de actividades; orientaciones incluidas en Sfard & Linchevsky (1994). En este sentido, el desarrollo de la noción de estructura numérica a través de actividades requiere de lo siguiente:

- a) Orden de las operaciones.
- b) Uso de signos de agrupación.
- c) Transformar una expresión aritmética en otras equivalentes.

En ocasiones, superar un error al comprender cuál ha sido su causa puede permitir también que tenga lugar un aprendizaje significativo a posteriori, que se refiere a la adquisición de nuevos conocimientos de manera activa y consciente, en lugar de simplemente memorizar información. Para lograrlo de manera efectiva, es necesario relacionar los nuevos conocimientos con los conocimientos previamente adquiridos y encontrar un significado para ellos. Esto puede ser especialmente importante cuando se pasa de un nivel educativo a otro, como de primaria a secundaria, ya que los nuevos conocimientos a menudo son más complejos y requieren una mayor comprensión para poder ser aplicados.

En este sentido, autores como Bruno y otros (2021) señalan que la introducción de los números negativos, que aparece en el primer curso de secundaria, supone un momento crucial del aprendizaje numérico del alumnado que no está exento de dificultades didácticas.

Según se ha señalado previamente, las dificultades de los alumnos en estas edades tienen diversos orígenes, entre ellos y de manera muy significativa, el desarrollo tecnológico que se ha incrementado desde hace una década lo que ha podido transferirse al proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula.

Respecto a estas barreras que los alumnos de secundaria tienen en este primer ciclo, Ortiz Álvarez (2022) defiende que:

Dichas barreras pueden ser clasificadas en cinco tipos según su procedencia (Socas, 1997): dificultades asociadas a la complejidad de los objetos en Matemáticas, a los procesos de pensamiento matemático, a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas, al desarrollo cognitivo de los alumnos y a los procesos de enseñanza. Siguiendo esta línea, Wagner y Parker (1999) llevan a cabo su propia clasificación que podría combinarse con la anterior. Categorizan las dificultades según sean intrínsecas al objeto, inherentes al propio sujeto o estén relacionadas con las técnicas de enseñanza. (p. 8).

Por todo ello, no afianzar un correcto aprendizaje puede provocar que al ir avanzando de curso se continúe fallando de una manera clara en las operaciones elementales en las que están involucrados los números reales, si estos errores de cálculo no se han corregido a tiempo.

La correcta utilización de los números reales durante los procesos de operaciones es elemental a la hora de poder realizar cálculos algo más complejos que ya involucran otro tipo de números, como los fraccionarios. Sin una adecuada consolidación del aprendizaje de aquéllos durante el primer y segundo curso de la Educación Secundaria existe el riesgo de cometer errores en los cursos posteriores, lo que puede conducir a no poder realizar de manera adecuada los ejercicios correspondientes a los cursos de tercero y cuarto de la ESO.

El aprendizaje del álgebra por parte de los alumnos también supone una dificultad adicional en el avance del conocimiento matemático pues se pasa del empleo único de números a utilizar letras combinadas con números, lo que hace especialmente compleja la comprensión a determinados alumnos.

En este sentido, Marta Ortiz Álvarez señala que “La sintaxis y la semántica del álgebra se alejan del lenguaje natural y del lenguaje aritmético, por lo que las traducciones llevan muchas veces al error.” (Ortiz, 2022, p. 12). Es por ello por lo que

consolidar una buena base asegura un aprendizaje que permitirá adquirir los conocimientos de cursos superiores sin sobresaltos.

De hecho, una mala base de conocimiento adquirida durante el proceso de aprendizaje durante los primeros años de secundaria se transmite al Bachillerato de manera que los alumnos matriculados en estos cursos no fallan por no comprender los conceptos propios de estos niveles académicos, sino que lo hacen por no tener claras las reglas básicas de utilización de las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación y división de los números enteros y fraccionarios fundamentalmente, y del álgebra también, que se encuentran en la base de la pirámide del conocimiento de las Matemáticas.

Asimismo, Mónica Chorques (2013) señala que para realizar cálculos sencillos en álgebra son necesarias ciertas habilidades previas en operaciones con números enteros, fraccionarios, potencias, etc. (p. 24).

Es por ello que, siendo conscientes de la importancia que tiene el aprendizaje correcto de las operaciones básicas que involucran a los números reales, se propone esta investigación con el objeto de analizar las causas responsables de la dificultad en su aprendizaje y de los errores que se cometen al emplearlos con el fin de mejorar esa adquisición de conocimiento y consolidarla de manera adecuada para tener éxito en las Matemáticas de los cursos posteriores a la Educación Secundaria, como son el Bachillerato, la Formación Profesional o los estudios universitarios.

Es interesante poner de manifiesto que es necesario introducir nuevas estrategias didácticas innovadoras que motiven al alumnado desde un principio como indica Sonia Carrillo (2019) con una propuesta didáctica basada en el desarrollo de las Inteligencias Múltiples y en la atención a la diversidad a través de una metodología activa: el aprendizaje cooperativo, en el que el alumno está totalmente involucrado en su aprendizaje y en el de los demás. (p. 99).

Y desde luego, también es prioritario en la actualidad atender a la diversidad de las diferentes capacidades del alumnado que cursa esta asignatura en los centros educativos, siendo de especial importancia por tanto dotar al equipo docente de las herramientas más adecuadas para mejorar la manera en la que los alumnos aprenden y facilitar la comprensión y adquisición de conocimiento práctico que no se olvide y se recuerde con naturalidad como indica Odalys Padrón, que “con la enseñanza a través de situaciones de aprendizaje, estimulamos la construcción de aprendizajes significativos, propiciando el desarrollo de competencias en los alumnos mediante la

resolución de problemas simulados o reales de la vida cotidiana”. (Padrón, 2019, p. 46).

En los últimos años ha tenido lugar un avance sustancial en diversos ámbitos del sistema educativo mediante la introducción progresiva de novedosas metodologías y el empleo de tecnologías y herramientas TIC experimentales que, mediante nuevos enfoques pedagógicos, ayudan a mantener y prolongar la atención del alumnado en la asignatura de Matemáticas y favorecen un mayor rendimiento académico y un aprendizaje significativo.

Para esta revisión sistemática se han tenido en cuenta las alternativas metodológicas existentes que pueden ser útiles para la resolución del problema encontrado, y es por ello que se revisará literatura científica al respecto que ayude a explorar “incorporar la tecnología al proceso formativo, no solamente por sus características motivadoras y lúdicas, sino también por formar parte de la vida de los estudiantes en el resto de sus actividades más allá de los centros educativos (Marín et al., 2021) otorgando la posibilidad de conectar los diversos contextos de aprendizaje”, según indica Marín, citado a su vez por Gabarda Méndez, V., Cuevas Monzonís, N., Colomo Magaña, E. y Cívico Ariza, A. (2022).

Sin embargo, Jácome y Jiménez (2022) indican que, a pesar de los avances en la educación, y la inclusión de innovadoras tecnologías de la información y las comunicaciones, el área de Matemáticas conserva prácticas pedagógicas tradicionales que promueven una enseñanza por transmisión de contenidos. Asimismo, existen fuentes que evidencian que, en muchas escuelas, se presentan las Matemáticas al estudiante como un cuerpo aislado, omitiendo sus conexiones y aplicaciones en la solución de situaciones y problemáticas del mundo real. (p. 1065).

Para trascender hacia la conceptualización formal de los números reales dentro de un lenguaje matemático que establece relaciones entre números y letras a través de la aritmética y el álgebra, autores como López González (2017) indican que se deben emplear estrategias de enseñanza que permitan al estudiante romper la conceptualización del número como representación de lo real a una más abstracta y formal dentro del lenguaje matemático que le permita interpretar y comprender cabalmente hechos y fenómenos de su vida cotidiana.

En relación con la investigación de anterior relativa a las dificultades conceptuales en el proceso de aprendizaje de la matemática, señala que en la dimensión de operaciones con enteros los participantes demostraron dificultad en

reconocer la operación entre los números. También se encontraron dificultades en reconocer que enteros negativos y positivos son de naturaleza distinta y no comprender que los negativos son una prolongación de los enteros positivos. Asimismo, en cuanto a la dimensión de números racionales los participantes presentaron dificultades al conceptualizar a la fracción como un número dividido entre otro casi en forma intuitiva y no consideraron que en un entero su denominador es el número uno, o que un decimal tiene la posibilidad de escribirse en forma de fracción.

En la actualidad, además del desconocimiento preciso de la jerarquía de las operaciones matemáticas ocurre que los alumnos no conocen la clasificación de nuestro sistema de numeración, no saben concretar cuándo un conjunto de números está incluido en otros, y eso dificulta aún más la resolución de los ejercicios sin cometer errores.

Los números enteros están en la base de la pirámide del conocimiento matemático por su necesidad de uso, su aplicabilidad y porque permiten hacer comparaciones, enseñar a contar y son la base de otros números, tal y como indica Marín (2019), sin embargo, de nada sirve reconocerlos como números a los que antecede un signo negativo o un signo positivo si no se tiene claro el concepto matemático del orden usual en Z , ya que es la base para realizar operaciones de forma adecuada en este conjunto numérico y en otros que lo incluyen.

La implementación en las aulas de metodologías didácticas que acerquen el conocimiento de los números enteros al alumnado produce resultados positivos cuando la motivación es alta. En este sentido, a través de prácticas de laboratorios de Matemáticas es posible trabajar el concepto del orden en los números enteros apoyados en herramientas cotidianas como indica Marín (2018), lo que permite a los alumnos llegar al concepto matemático de orden usual en Z con mejoras significativas en el conocimiento en el desplazamiento en la recta numérica, el número que antecede y precede un entero negativo y la capacidad de expresar enteros negativos a partir de los puntos de referencia, demostrando la comprensión y apropiación del tema estudiado.

La habilidad del cálculo es una de las más importantes en el trabajo con la asignatura de Matemáticas como indican Alfaro y otros (2018), sin embargo, es una de las de mayor incidencia en los problemas de aprendizaje de los alumnos. En este sentido, ya en el primer ciclo de la educación primaria se presentan con mucha frecuencia insuficiencias en el cálculo aritmético en los escolares, motivado entre

otros motivos por un trastorno específico del aprendizaje conocido como discalculia, que suele aparecer asociado a la dislexia, la disgrafía, trastornos de la atención, memoria, lenguaje, pensamiento, sensopercepción, psicomotricidad, lateralidad, etc.

Desde que se comenzó a diagnosticar esta enfermedad y se hizo eco la comunidad educativa han ido apareciendo estrategias metodológicas de enseñanza de la matemática para estudiantes con trastornos de discalculia como muestran Laz y otros (2021), que involucran el trabajo colaborativo en el aula y las adaptaciones curriculares necesarias según sea el caso. En este sentido y siguiendo las recomendaciones de Aguilar y otros (2015) al hacer una búsqueda en inglés en la base de datos de PsycNet de publicaciones con el término discalculia del desarrollo, aparecen más de 300 estudios publicados en los últimos años lo que indica que las investigaciones sobre las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas y sus posibles tratamientos está recibiendo cada vez más atención.

Algunos investigadores hacen una distinción entre diferentes conceptos que, aun teniendo relación entre sí, según ellos no son equivalentes como indican los autores anteriores haciendo referencia a Rubinsten y Henik (2009) quienes distinguen entre Discalculia del Desarrollo (DD) y Dificultades en el Aprendizaje Matemático (MLD). Por un lado, el término DD se utiliza para denominar al déficit en las habilidades numéricas básicas, como el procesamiento de la cantidad. Sin embargo, MLD se refiere a las dificultades en aritmética que surgen de un déficit en determinadas capacidades cognitivas generales, como la atención, la memoria de trabajo y el procesamiento visoespacial.

Y abundando más en esta problemática de la discalculia que afecta a los alumnos desde los primeros años de la escuela infantil y continúa en las etapas de primaria, secundaria (objeto de este Trabajo Fin de Máster), Bachillerato e incluso Universidad, si es que no se han tomado medidas a tiempo para paliar sus nefastos efectos en el aprendizaje de las Matemáticas, cabe señalar que algunos investigadores como Kaufmann et al. (2013), citados por Aguilar y otros (2015) proponen la distinción entre discalculia primaria y discalculia secundaria. La discalculia primaria es un trastorno heterogéneo resultante de los déficits individuales en el funcionamiento numérico o aritmético a nivel cognitivo y a su vez se subdivide en una discalculia analógica y una discalculia simbólica. Por el contrario, la discalculia secundaria se refiere a las disfunciones en el funcionamiento aritmético de etiología no numérica (por ejemplo, trastornos de la atención).

En este sentido, estos autores señalan que comprender las dificultades cognitivas numéricas de los niños discalculicos permite facilitar un diagnóstico diferencial entre un niño discalculico y un niño con retraso escolar en Matemáticas, facilitando la puesta en marcha de intervenciones para la reeducación en ambas problemáticas.

Un correcto diagnóstico de alguno de los dos tipos de discalculia primaria se puede realizar mediante la evaluación de las habilidades numéricas básicas, en particular observando el procesamiento de códigos numéricos analógicos (el sistema de precisión numérica -pequeñas cantidades- y el sistema de aproximación numérica -grandes cantidades-) y códigos numéricos árabes y orales, y viendo sus vínculos con representaciones numéricas mentales, lo que es esencial para identificar la presencia de deterioro cognitivo numérico al considerar el diagnóstico de discalculia. Estos autores continúan señalando que esta evaluación exhaustiva podría incluir situaciones tales como comparar números árabes, números en forma oral, y también comparar pequeñas y grandes conjuntos de puntos considerando todos los procesamientos de códigos numéricos, a lo que se podrían añadir, además, las tareas de situar números orales, árabes y analógicos en una recta numérica para permitir evaluar representaciones numéricas y su grado de precisión. De este modo, integrar las pruebas descritas permitiría la evaluación de diversos sistemas numéricos y la determinación de un déficit cognitivo numérico, facilitando así el diagnóstico diferencial entre discalculia y un alumno con retardo escolar en Matemáticas.

Para finalizar, hay que señalar que el retraso en el aprendizaje de las Matemáticas es un problema recurrente en el ámbito educativo. A menudo, los estudiantes que no logran consolidar los conceptos básicos de la asignatura durante los primeros años de su educación secundaria enfrentan dificultades para comprender los conceptos más complejos en años posteriores. A su vez, la discalculia, un trastorno del aprendizaje que se caracteriza por la dificultad para entender y realizar operaciones matemáticas, puede ser un factor que contribuye al retraso en el aprendizaje de éstas. Sin embargo, no todos los estudiantes con retraso en el aprendizaje de las Matemáticas tienen discalculia. Por lo tanto, es importante que los docentes estén atentos a las señales tempranas de dificultades en el aprendizaje y brinden apoyo y recursos adicionales a los estudiantes que lo necesiten.

3. METODOLOGÍA

3.1. Objetivos

El objetivo general del presente Trabajo Fin de Máster es:

Analizar las dificultades en el aprendizaje y los errores que presentan los alumnos de la ESO en la asignatura de Matemáticas al enfrentarse a la resolución de ejercicios y problemas que incluyen operaciones matemáticas básicas con números reales, mediante la búsqueda de literatura científica relacionada con esta problemática, y ver el tratamiento que se hace de los mismos en el ámbito educativo.

Adicionalmente al anterior se pretenden alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- a) Identificar los errores que cometen los alumnos al enfrentarse a la resolución de problemas con números reales y sus causas.
- b) Reconocer en los errores encontrados, las posibles dificultades que presentan los alumnos en la resolución de los ejercicios con números reales.
- c) Descubrir estrategias pedagógicas que permitan identificar las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas que poseen los estudiantes con el fin de generar metodologías innovadoras que mejoren la intervención didáctica.
- d) Clasificar la literatura existente en categorías emergentes que puedan ayudar en la búsqueda de soluciones al problema detectado en el aula
- e) Conocer los resultados obtenidos en esta revisión bibliográfica con el fin de poder aplicar mejoras en el aula de Matemáticas.

Aquí cabe señalar que es tan importante una adecuada estrategia de aprendizaje por parte del alumnado como una metodología motivadora que ha de poner en marcha el equipo docente de la asignatura de Matemáticas en las diferentes etapas del recorrido educativo.

3.2. Introducción a la metodología de investigación y procedimiento.

Una revisión sistemática es una forma de evaluar la información científica disponible sobre un tema específico. Utilizando esta metodología, los investigadores pueden realizar una exploración exhaustiva de la literatura existente sin tener que recurrir a fuentes primarias. Esto resulta especialmente útil para entender mejor los problemas complejos que se presentan en un tema determinado.

El objetivo de esta revisión sistemática es proporcionar una visión general de las dificultades y errores más comunes que enfrentan los estudiantes al resolver problemas y ejercicios que involucran números reales en Matemáticas, tal y como se indica en el objetivo general y, también, tal y como aparece recogido en los objetivos específicos anteriormente descritos, conocer las posibles soluciones y estrategias pedagógicas existentes para la mejora de estas dificultades. Es decir, el enfoque principal será examinar la literatura existente sobre el tema, sin acudir a priori a fuentes primarias.

Para llevar a cabo esta revisión sistemática, se ha seguido un procedimiento riguroso de búsqueda de información bibliográfica pertinente en diferentes fuentes de información, que ha incluido la búsqueda de libros, revistas, publicaciones académicas, artículos en línea y otras publicaciones que se ajusten a los criterios de inclusión y exclusión.

En total, se ha más han revisado más de 100 documentos diferentes para abordar el tema con rigor, y para ello se han empleado diversos procedimientos y una metodología de investigación específica.

En este sentido, se han utilizado varias bases de datos científicas generales y relacionadas con las Matemáticas, como Google Scholar, Scholar Archive, Scopus, Web of Science, MathSciNet, ProQuest, Dialnet, ERIC, DOAJ, CRAI Dulce Chacón, Redined, SciELO, REDALYC, PsycNet, Archivo Digital UPM, EuDML y Teseo. Para cada búsqueda, se han aplicado una serie de operadores booleanos, así como palabras clave específicas relacionadas con el tema a investigar. Las palabras clave elegidas para la búsqueda se han basado en los términos definidos en el título de la revisión sistemática, así como en términos relacionados con la Educación Secundaria, las dificultades y errores en operaciones matemáticas con números reales y la resolución de problemas y ejercicios.

Se han utilizado operadores booleanos “AND” y “OR” para asegurarse de que se incluyan en la búsqueda todos los términos relevantes y se han combinado de diferentes maneras posibles con las palabras clave específicas siguientes: “dificultades”, “números reales”, “Matemáticas”, “Educación Secundaria”, “discalculia”, “aprendizaje”, “estrategias”, “didáctica”, “error”, “enseñanza”, “soluciones”, “resolución”, “problemas”, “ejercicios”, “números”, “mejoras”, “herramientas”, “TIC”, “ESO”, “ABP”, “Flipped Classroom”, “tecnologías”, “ABP aprendizaje basado en problemas”.

Algunas de las frases empleadas en la búsqueda de documentación bibliográfica han sido:

- Dificultades en el aprendizaje de Matemáticas en Educación Secundaria.
- Aprendizaje no consolidado en el aprendizaje de números reales o enteros.
- Dificultades en la enseñanza de Matemáticas en secundaria.
- Didáctica de las Matemáticas con números reales en Educación Secundaria.
- Dificultades en la realización de ejercicios de Matemáticas con números reales.
- Herramientas TIC que mejoran el aprendizaje de las Matemáticas.

Existen múltiples formas de combinar los operadores booleanos "AND" y "OR" para asegurarse de que se incluyan adecuadamente los términos anteriores en una búsqueda en español de revisión sistemática bibliográfica relacionada con dificultades en el aprendizaje de las operaciones Matemáticas que incluyen números reales. A continuación, se presentan algunas de las posibles combinaciones realizadas:

- "dificultades" AND "números reales" AND "Matemáticas" AND "Educación Secundaria";
- "discalculia" OR "dificultades" AND "aprendizaje" AND "estrategias" AND "enseñanza";
- "números reales" AND ("aprendizaje" OR "enseñanza") AND ("estrategias" OR "soluciones" OR "resolución de problemas");
- "ejercicios" AND ("números reales" OR "Matemáticas") AND ("Educación Secundaria" OR "discalculia") AND ("herramientas TIC" OR "ABP").

Éstas son sólo algunas combinaciones posibles, y dependen de los objetivos específicos de la revisión sistemática bibliográfica y de las palabras clave específicas que se están utilizando. Es importante considerar todas las posibles combinaciones para asegurarse de que se estén incluyendo todos los términos relevantes para la búsqueda.

Por otro lado, se han aplicado criterios de inclusión y exclusión para seleccionar aquellos documentos de la búsqueda bibliográfica que se ajustan mejor a los objetivos y al tema de la revisión sistemática, es decir, estudios relevantes y de alta calidad.

Una vez que se hayan recopilado los datos pertinentes, se realizará un análisis exhaustivo de los resultados obtenidos. Se buscarán patrones y tendencias en los datos para comprender mejor las dificultades que los alumnos de Educación Secundaria tienen para trabajar con los números reales. Esto incluirá el análisis de

temas como el nivel de educación, el acceso al aprendizaje a distancia, la motivación y el interés por la materia y la habilidad para entender e interpretar los problemas planteados.

Finalmente, se realizará una síntesis de los resultados obtenidos para identificar las áreas involucradas y de interés según los objetivos buscado en el presente trabajo.

3.3. Criterios de inclusión y exclusión

Los criterios de inclusión se han centrado en la temática del estudio, la población objetivo (estudiantes de Educación Secundaria) y la metodología utilizada.

Los criterios de inclusión que se han tenido en cuenta han sido los siguientes:

- Documentos escritos en español. Inicialmente también se realizó la búsqueda en inglés, sin embargo, al aumentar excesivamente el número de documentación encontrada se optó por descartar estos resultados.
- Documentos publicados en revistas indexadas y/o revisadas por pares.
- Documentos que abordan el aprendizaje de las operaciones matemáticas que incluyen números reales en Educación Secundaria.
- Documentos que incluyen el análisis y/o la discusión de dificultades en el aprendizaje de las operaciones matemáticas que incluyen números reales en Educación Secundaria.
- Documentos que presentan intervenciones o estrategias para abordar las dificultades en el aprendizaje de las operaciones matemáticas que incluyen números reales en Educación Secundaria.
- Documentos relativos al área del álgebra, que integra el empleo de números reales, y que abordan tanto las dificultades en el aprendizaje como estrategias de mejora de éstas.
- Documentos que presentan resultados empíricos sobre la eficacia de intervenciones o estrategias para abordar las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas que incluyen números reales en Educación Secundaria.
- Documentos que no requieren un pago para su acceso.

Además, dentro de estos criterios de búsqueda, se han tenido en cuenta documentos publicados desde los años 80 pues, aunque hayan transcurrido bastantes años, los números reales siguen siendo los mismos, si bien es cierto que las estrategias pedagógicas han evolucionado sustancialmente. También se han

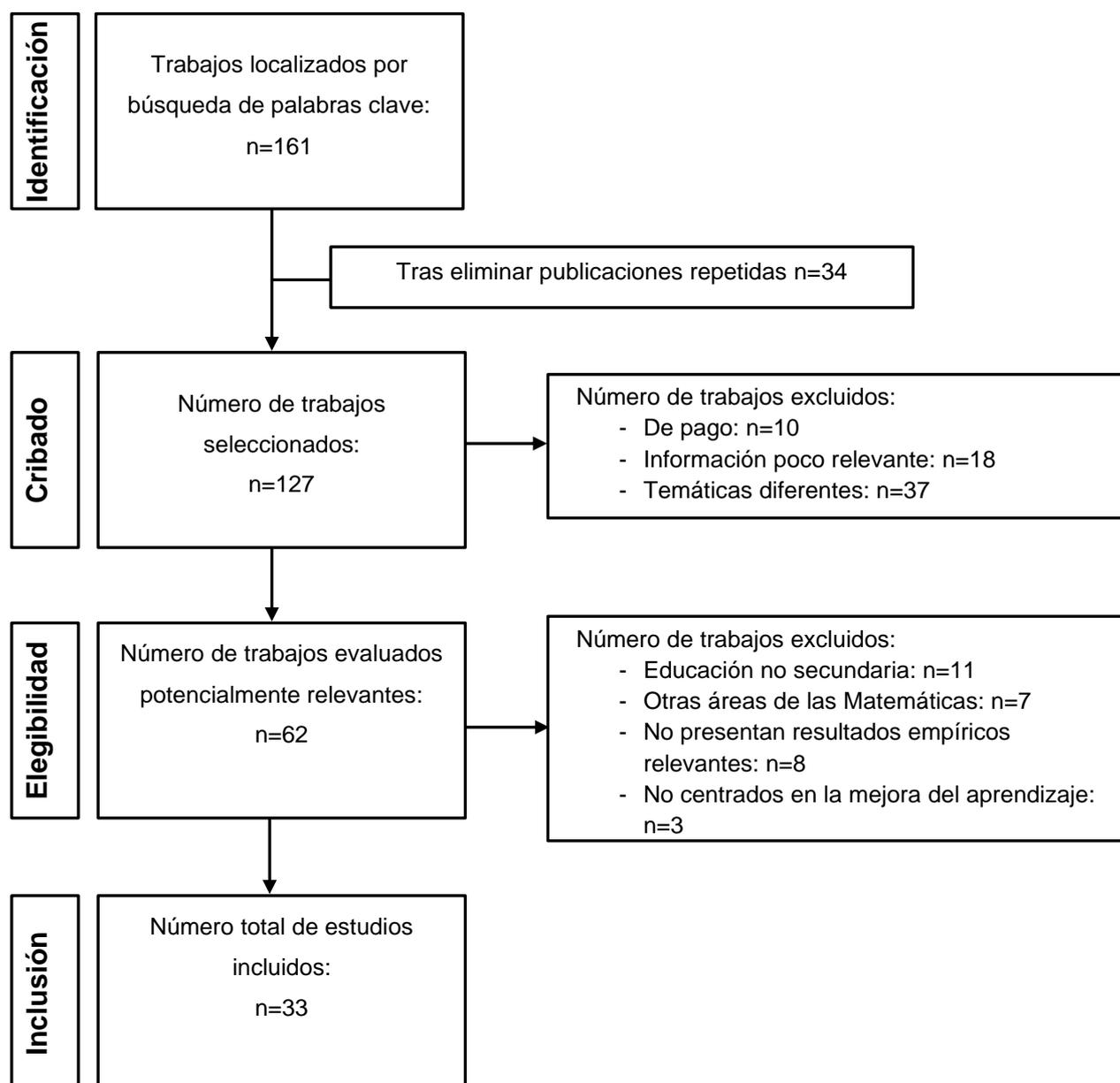
tenido en cuenta mayoritariamente documentos en idioma español, aunque también se ha considerado alguno en idioma inglés por la información recogida.

3.4. Diagrama de flujo

En el siguiente diagrama de flujo se refleja el proceso de búsqueda y selección de los estudios que son analizados en este trabajo de revisión bibliográfica.

Figura 1

Diagrama de flujo PRISMA de la revisión sistemática. Adaptado de Moher et al. (2009).



4. RESULTADOS

Tal y como se indica en la Figura 1 anterior, en la presente revisión sistemática se localizaron 161 referencias relacionadas con las palabras clave, de las que se eliminaron los estudios repetidos, quedando 127 trabajos seleccionados. Tras revisar los criterios de exclusión anteriormente citados, relacionados con la etapa educativa, el idioma, etc. se seleccionaron 34 artículos científicos relacionados con las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas en general y, más concretamente, con las operaciones básicas que involucran números reales.

A continuación, en la Tabla 1 se presenta el resumen de los artículos seleccionados correspondientes al estado del arte del aprendizaje matemático, señalando los objetivos del estudio, el tipo de investigación realizada, las actividades puestas en práctica, la muestra y un resumen de los resultados obtenidos.

En la revisión sistemática realizada aparecen algunas investigaciones que proponen realizar cuestionarios a los alumnos para detectar los diferentes tipos de errores que comenten con más frecuencia. Generalmente, aunque los alumnos pertenezcan a diferentes cursos y el tipo de ejercicios a responder sea de nivel de exigencia distinta, la naturaleza de los errores suele ser similar.

En la Tabla 2 se muestra una selección de artículos que recogen estrategias encaminadas a la superación de las dificultades que los alumnos de secundaria tienen en la asignatura de Matemáticas y se presentan una serie de resultados y conclusiones positivas sobre distintas propuestas encaminadas a mejorar el aprendizaje de las Matemáticas, tanto en España como en otros países, y siempre cumpliendo los criterios de inclusión relativos a la enseñanza secundaria. Estas estrategias incluyen programas de rehabilitación para discalcúlicos, el uso de las TIC, el Aprendizaje Colaborativo, el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), la metodología Flipped Classroom y la implementación de Realidad Aumentada en el aula, entre otros. Además, se destaca la importancia de desarrollar capacidades en los profesores para una planificación competente en Matemáticas de secundaria. Los resultados muestran una mejora en las competencias y habilidades matemáticas de los alumnos, en la motivación y un aumento del interés por el aprendizaje de la asignatura. Sin embargo, también se mencionan algunos aspectos limitantes respecto al uso de tecnologías novedosas y a la necesidad de contar con la explicación del maestro para darle sentido e interpretación a los recursos disponibles.

4.1. Estado del arte del aprendizaje matemático

Tabla 1

Selección y resumen de los artículos científicos seleccionados relacionados con el ESTADO DEL ARTE DEL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
Aguilar et al., 2015 (España)	Las dificultades de aprendizaje de las Matemáticas (DAM). Estado del arte	Revisión exhaustiva del estado del arte de las dificultades de aprendizaje de las Matemáticas	Revisión sistemática	No ha lugar	No ha lugar	A fecha de la investigación no hay consenso claro en cuanto a la causa de la discalculia .
Aponte Bello et al. 2017 (Colombia)	Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del número entero presentadas en un objeto virtual de aprendizaje	Elaborar un objeto virtual de aprendizaje (OVA) para docentes en formación y en ejercicio, que para mostrar los errores, obstáculos y dificultades en el aprendizaje del número entero	Es una herramienta educativa que puede insertarse en propuestas curriculares y metodologías de enseñanza y aprendizaje de muy diversa índole	Creación del OVA que permite abordar los temas de interés para su apropiación y puesta en práctica con Actividades de Autoaprendizaje	Estudiantes de grado 8º (equivalente a 2º ESO)	El número entero fue ignorado por no poderse representar en la realidad y siempre representándolo con deudas o temperaturas bajo cero. El OVA facilita el manejo de actividades y el acceso a la información
Carrión Miranda, V. 2007 (México)	Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones	Diagnóstico y un análisis de los errores en el tratamiento de expresiones numéricas simples que incluyen operaciones	Examen, evaluación y análisis cuantitativo y cualitativo	Se propusieron a profesores y estudiantes una colección de 10 expresiones numéricas para que las	356 profesores de primaria, secundaria y Bachillerato y 867 estudiantes de	Si el profesor conoce los errores más frecuentes de los estudiantes, tiene ocasión de preparar estrategias didácticas alternativas. Los errores definen un contexto.

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
	combinadas con números naturales	aritméticas con números naturales		transformaran a sus formas más simples.	secundaria, Bachillerato y de nivel universidad	Causas de los errores cometidos: 1. Lenguaje hablado y lectura de lo escrito. 2. Visión de lo escrito. 3. Tratamiento de las operaciones. Tipos de errores:1. De entrada.2. De operación.3. De escritura
Cid Castro, M. E. 2022 (España)	Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos	Transformar el problema docente con la enseñanza de los números negativos en un problema didáctico que pueda ser abordado con éxito	Metodología de determinación de obstáculos epistemológicos	Ejercicios propuestos de distinta naturaleza a alumnos de 1º y 2º ESO	Grupo de 1º de ESO por 32 alumnos. 3 grupos de 20 alumnos de 2º ESO	Bastantes investigadores consideran que la concepción del número como medida es un obstáculo epistemológico que históricamente ha impedido , hasta épocas bastante recientes, la aceptación del número negativo
Cruz Echéverri, D. A. 2022 (Panamá)	Naturaleza de dificultades asociadas al aprendizaje de las Matemáticas: números enteros , en estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria	Identificar la naturaleza de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero con estudiantes de grado octavo de básica secundaria, que conlleve a una categorización de ellas	Enfoque cuantitativo , al identificar y reconocer las características o comportamientos que conducen a concluir la presencia de una dificultad de aprendizaje, ello a través de la observación, descripción e interacción	Diseño de una guía – taller, para los estudiantes con ejercicios que promueven el desarrollo de actividad matemática, desde el conocimiento de los números enteros. Con entrevistas semiestructuradas	Estudiantes que cursan el grado octavo de educación básica secundaria.	El estudio identifica un conflicto en el uso de signos (+/-) en las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división) . También se señala una incomprensión del concepto de número entero, relacionándolo con pérdidas y ganancias, lo que genera dudas y silencios. Además, se mencionan otras categorías como falta de atención, presión, resistencia, memoria y papel del maestro, que se desarrollan en la tesis.
Fernández Lázaro, Á.	Dificultades y errores en el	Identificar dificultades y errores de los alumnos de	Investigación bibliográfica	Cuestionario semicerrado pasado a profesores de	21 profesores de Matemáticas	Las dificultades más habituales en el aprendizaje de las Matemáticas se sintetizan

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
2013 (España)	aprendizaje de las Matemáticas en ESO y Bachillerato. Análisis de un caso práctico	Secundaria y Bachillerato en el aprendizaje de las Matemáticas, clarificando sus causas y motivaciones y proponiendo algunas líneas de mejora		Matemáticas de ESO y Bachillerato de 3 centros de la Comunidad de Madrid. Y una prueba escrita objetiva realizada por los alumnos de 1º de Bachillerato	de ESO y Bachillerato	en 3 grandes grupos: Con el alumno, Con la asignatura, Con otros aspectos (clima del aula y del centro, currículo de la asignatura, competencia del profesorado y contexto propio del alumno). Opinión generalizada de los alumnos: la cualidad más necesaria para el aprendizaje de las Matemáticas es el esfuerzo y el trabajo personal y la mejor manera de motivarlos es potenciar la cara lúdica de las Matemáticas y sus aplicaciones en la vida real en ramas como la ingeniería, la economía, la medicina...
Fernández Millán et al. 2018 (España)	Ejemplos y definiciones de ecuaciones: una ventana hacia el conocimiento conceptual de estudiantes de secundaria	Analizar el conocimiento conceptual del concepto ecuación que han adquirido un grupo de estudiantes como resultado de su formación durante la ESO	Metodología basada en una práctica de indagación, en términos de Szydlik (2015), que consiste en escuchar, confrontar y cuestionar los planteos de los estudiantes	Entrevistas individuales semiestructuradas de aproximadamente 30 minutos de duración, grabadas en audio	20 estudiantes de 4º ESO. 13 chicos y 7 chicas, entre los 15 y 16 años	Los estudiantes tienen dificultades para crear ejemplos de ecuaciones con conjuntos numéricos diversos, lo que indica la necesidad de diseñar propuestas didácticas para fomentar la riqueza numérica en el aula. También se necesita trabajar en la competencia lingüística de los estudiantes para que puedan definir conceptos matemáticos con precisión.
Fuentes et al. 2020 (España)	La influencia del género en el aprendizaje	Valorar si existe una brecha de género en el aprendizaje y rendimiento matemático en	Análisis multisectorial de resultados en Matemáticas de	No ha lugar	No ha lugar	- Los alumnos españoles presentan mejores puntuaciones en Matemáticas

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
	matemático en España. Evidencias desde PISA	España, y de ser así, en qué sentido ha evolucionado durante los últimos años	alumnas y alumnos españoles, en las todas las ediciones PISA (años 2000, 2003, 2006, 2009, 2012 y 2015), con Metodología mixta: análisis bibliográfico y datos facilitados por PISA y la OCDE			<p>que las alumnas españolas en porcentajes que varían en función de la edición.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Mejora en el rendimiento matemático en el alumnado español (sin distinción de sexo) en relación con ediciones previas. - El porcentaje de alumnas en las carreras tecnológicas lleva estancado desde los años 90: carreras de Ingenierías, Ciencias Experimentales y Arquitectura es de un 30%, en Informática la cifra cae por debajo del 15%
Gamal et al., 2017 (España)	Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: La necesidad de un análisis multidisciplinar	Un total de 10 artículos cuyo objetivo principal es contribuir con evidencia y alternativas de análisis a un área del aprendizaje escolar asociada generalmente con altos niveles de fracaso y emociones negativas	Revisión sistemática	No ha lugar	No ha lugar	La formación del profesorado, las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, las nuevas tecnologías y metodologías, el análisis de los errores y el análisis de las relaciones entre factores afectivos y cognitivos, dan cuenta que probablemente no exista en el futuro inmediato una respuesta completa para mejorar los niveles de logro esperados en Matemáticas
Gasco-Txabarri, J. 2017	Diferencias en el uso de estrategias en el aprendizaje de	Analizar las diferencias de sexo en el empleo de estrategias	Se analizan las estrategias cognitivas, metacognitivas, y de	Cuestionario de 25 ítems secundaria del MSLQ	565 estudiantes de 2.º, 3.º y 4.º curso de ESO de	Las alumnas declaran emplear más las estrategias de organización y de recursos

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
(España)	las Matemáticas en enseñanza secundaria según el sexo	en Matemáticas por parte de alumnado perteneciente a ESO	gestión de los recursos focalizadas en el aprendizaje de las Matemáticas.	(Motivated Strategies for Learning Questionnaire)	centros educativos de la Comunidad Autónoma Vasca	de ayuda , aunque las variaciones son débiles. Y tienen tendencia a ordenar y a gestionar mejor los saberes matemáticos, así como a pedir ayuda en mayor medida que los hombres en caso de dificultad.
González del Olmo, D. 2015 (España)	Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria	Identificación de errores y dificultades en el aprendizaje de las fracciones	Análisis mixto de los datos, que consiste en una combinación de análisis cualitativo y cuantitativo	Cuestionario realizado por parte de los alumnos y su posterior análisis en busca de errores, y las causas de éstos	67 alumnos de 12/13 años (34 chicas y 33 chicos).de los 4 grupos de 1º de ESO	Los conceptos matemáticos relacionados con el sentido numérico y las operaciones básicas aún no están consolidados y, por tanto, los errores son diversos, lo que dificulta su categorización
Laz García et al. 2021 (Ecuador)	Estrategia de enseñanza de la matemática para estudiantes con trastornos de Discalculia	Analizar las estrategias de enseñanza de las Matemáticas para estudiantes con trastornos de discalculia en la Unidad Educativa Fiscal Olmedo del cantón Portoviejo	Enfoque cuantitativo con un alcance descriptivo aplicando métodos deductivos	Formulario de tipo Encuesta por medio del Google Forms, en donde se pudo obtener resultados gráficos	10 profesores del área de Matemáticas del nivel superior de la sección vespertina de la academia en mención	Se logra entender lo complejo del tema y las repercusiones que acarrea la falta de conocimiento de ésta, tanto en la metodología de enseñanza por parte del profesorado como en el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes. El problema del aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes es muy persistente en nuestros jóvenes
López González, W. O. 2017	Las dificultades conceptuales en el proceso de aprendizaje de la	Estudiar las dificultades conceptuales en el aprendizaje de la matemática, en un grupo de estudiantes del	El tipo de investigación es descriptiva e interpretativa	Cuestionario diseñado y validado para la recolección de diversas dificultades y errores	Estudiantes de 2º de secundaria	Los participantes tuvieron dificultades en operaciones con enteros y en reconocer que los enteros negativos y positivos son diferentes . También presentaron

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
(Venezuela)	Matemática en el segundo año de Educación Media	2º año de educación media pública del sistema educativo venezolano		cometidos en el proceso de aprendizaje		dificultades en la conceptualización de fracciones como números divididos e ignoraron que un entero tiene un denominador de uno. Además, tuvieron dificultades para representar fracciones en la recta y no comprendieron el concepto de fracciones equivalentes
Ruano et al. 2008 (España)	Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra	Analizar y clasificar los errores cometidos por un grupo de alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización.	Clasificación de los errores ayudados de esquemas de análisis en los que se refleja: (a) el tipo de error cometido, (b) los códigos de los alumnos, (c) el ítem en el que han fallado y (d) el número total de errores de cada tipo	Cuestionario con 15 preguntas y 43 ítems, en torno a tres procesos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, La generalización y la modelización.	60 estudiantes dos grupos de 4º de ESO de la opción B, con 21 y 25 alumnos, respectivamente, y un grupo de 1º de Bachillerato tecnológico (14 alumnos),	El uso de esquemas de análisis ha resultado útil para organizar los errores cometidos por los alumnos en la mayoría de las preguntas. Ahora bien, estas estrategias, que nos han permitido organizar los diferentes errores, no nos permiten identificar con garantías los distintos orígenes de estos.
Ruíz de Miguel, C. 2009 (España)	Las escuelas eficaces: un estudio multinivel de factores explicativos del rendimiento escolar	Determinar la importancia relativa de los factores que afectan al rendimiento en Matemáticas, en cada uno de los niveles de agregación de los datos, el primer nivel individual, el de la escuela y el del país.	Modelo Multinivel, alternativa metodológica que se ha mostrado como la más adecuada para la investigación sobre	No ha lugar	Base de datos de PISA 2003 (cuya área ppal. fue la competencia matemática). Población objetivo en PISA:	El sexo del alumno es un importante predictor de su rendimiento en el área de Matemáticas: en alumnos superior en 8,5 puntos respecto a las alumnas. Parece que dedicar hasta el 48% del tiempo total de deberes a deberes de Matemáticas, sería beneficioso para el rendimiento.

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
	en el área de Matemáticas		eficacia escolar (Murillo, 2000).		alumnos de 15 años de los países de la OCDE.	Otros factores actitudinales que influyen en el rendimiento de los alumnos son la auto percepción de la eficacia en el desarrollo de actividades matemáticas, y el autoconcepto en esta materia, que hacen que el rendimiento aumente 16,5 y casi 23 puntos respectivamente.
Socas Robayna, M. M. 1997 (España)	Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria	Hacer una reflexión general sobre este tema central en el aprendizaje de las Matemáticas y poner en contacto al lector con los aspectos más relevantes en torno a las dificultades, obstáculos y errores que presentan los alumnos en la construcción del conocimiento matemático	Expositiva	No ha lugar	No ha lugar	El aprendizaje deficiente de Matemáticas puede ser causado por múltiples factores : planificación curricular deficiente, la naturaleza compleja de la materia, el desarrollo cognitivo de los estudiantes y sus actitudes emocionales. Errores: resultado de obstáculos, carencias de sentido o actitudes afectivas Los errores no deben ser vistos como fracasos, sino como oportunidades para mejorar el aprendizaje.
Sostenes-González et al. 2016 (México)	Justificación En La Solución De Ecuaciones Lineales En Alumnos De Primero De Secundaria	Avance de una investigación realizada con alumnos de 1º de secundaria analizando las justificaciones que ofrecen los estudiantes al resolver ecuaciones	Entrevistas y recopilación de la información	Como punto de partida se tienen los diálogos con los alumnos quienes en el momento no presentaban conocimientos sobre la solución de ecuaciones de 1º grado. Luego se	Alumnos de primer grado de secundaria	Los procedimientos y estrategias utilizados por los estudiantes al resolver ecuaciones permiten describir su pensamiento matemático y anticipar dificultades. Los estudiantes utilizan reglas aritméticas y ensayo y error para resolver ecuaciones del tipo $ax = b$. A veces recurren a

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
				plantean ejercicios para resolverlas		procedimientos de prueba y error para enfrentar situaciones desconocidas.
Tabare, M. I. 2014 (Argentina)	Posibles errores en el aprendizaje de números reales a raíz del tratamiento propuesto en un texto de nivel secundario	Análisis didáctico de un libro de texto de secundaria relacionado con números reales, y especial énfasis en los Irracionales, para identificar posibles errores que pueden producirse por los estudiantes	Análisis en términos didácticos de la propuesta de un libro de texto de nivel secundario sobre el tema números reales	Análisis de algunas actividades relacionadas al tema números reales que no podrían ser consideradas como problemas en términos de la Teoría de Situaciones Didácticas sino más bien como ejercicios rutinarios.	Alumnos del proyecto pedagógico con modalidad a distancia para la terminalidad de estudios de EGB3 y Educación Polimodal	Las dificultades en el aprendizaje significativo de los números irracionales podrían estar relacionadas con los siguientes motivos: - Ser anti intuitivos - Estar alejados de la realidad (salvo longitudes) y vinculados a lo infinito - Requerir Matemática avanzada para las demostraciones que alejan del problema físico
Taveras, A. 2020 (República Dominicana)	Análisis comparativo de estrategias didácticas para la enseñanza del cálculo o aproximación de la raíz cuadrada de un número entero positivo	Análisis comparativo sobre distintas estrategias y métodos para la enseñanza del cálculo o aproximación de la raíz cuadrada de un número entero positivo	Investigación de tipo exploratoria, descriptiva y cuantitativa aplicando un instrumento de tipo mixto. Datos tabulados de manera manualmente analizando ítems de preguntas cerradas	En una primera etapa se elaboraron tres cuestionarios mixtos, con la misma estructura, adecuados a cada población a encuestar, las cuales son de características diferentes.	Maestros de secundaria, estudiantes del ISFODOSU Recinto Emilio Prud'Homme de la licenciatura en Matemáticas orientada a secundaria y estudiantes de 2º secundaria	El 38,89 % de maestros de Matemáticas encuestados de secundaria no tienen formación especializada en el área o en el campo de la educación. El 70,84 % tiene debilidades en el tema de la raíz cuadrada , sólo el 20,16 % conocía los procesos aplicados en la resolución de los problemas planteados. El método para calcular o aproximar raíces cuadradas de un número entero positivo que más empleado fue el algoritmo tradicional o chino

El aprendizaje de las Matemáticas es un tema de gran importancia en la educación. A través de diversas investigaciones, se han identificado múltiples factores que influyen en el rendimiento de los estudiantes en Matemáticas. Algunos autores han identificado las dificultades más habituales en el aprendizaje de las mismas, así como también los errores más frecuentes que los estudiantes cometen al resolver problemas matemáticos. Otros autores han estudiado el impacto de ciertos factores, como el sexo, el tiempo dedicado a las tareas de matemáticas, las aspiraciones educativas, la autopercepción de la eficacia y el autoconcepto, en el rendimiento de los estudiantes.

En relación con la primera clasificación anterior de la Tabla 1 denominada estado del arte del aprendizaje matemático y considerando en primer lugar el estudio exhaustivo realizado por González del Olmo (2015) relativo a los errores comunes cometidos con fracciones por alumnos 1º de ESO, el resultado obtenido por los 67 alumnos de 12/13 indica que a estas edades tempranas los conceptos matemáticos relacionados con el sentido numérico y las operaciones básicas aún no están consolidados y, por tanto, los errores son diversos, lo que dificulta su categorización.

Aun así, es relevante señalar algunas conclusiones que se extraen de esta investigación, por ejemplo, las siguientes:

- En ocasiones los errores matemáticos son fruto de una escritura poco legible, lo que provoca la confusión de unos números con otros y dificulta la comprensión de las operaciones efectuadas.

- No haber aprendido y consolidado de manera correcta las operaciones con números enteros dificulta el siguiente paso a la hora de operar con números fraccionarios ya que, además de tener que continuar con el empleo de signos y con la jerarquía de operaciones, aparecen ahora las divisiones no enteras y las fracciones equivalentes, lo que complica aún más el tipo de operaciones a realizar.

- A su vez, los números fraccionarios exigen el cálculo de denominador común para poder efectuar sumas o restas y su dificultad radica en que el alumno ha de aprender un algoritmo para calcularlo.

Laz García et al. (2021) concluyen que el desconocimiento de la discalculia puede tener consecuencias negativas en la metodología de enseñanza de los profesores y en el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes. Por otro lado, Fernández Lázaro (2013) resume las dificultades más habituales de este aprendizaje en tres grupos: con el alumno, con la asignatura y con otros aspectos. Además,

destaca que la opinión generalizada de los alumnos es que la cualidad más necesaria para el aprendizaje de las Matemáticas es el esfuerzo y el trabajo personal.

Carrión Miranda, V. (2007) indica que, si los profesores conocen los errores más frecuentes de los estudiantes, pueden preparar estrategias didácticas alternativas. Además, destaca que los errores definen un contexto y hay tres tipos de errores: de entrada, de operación y de escritura. Por su parte, Cruz Echéverri, D. A. (2022) identifica un conflicto en el uso de signos en las operaciones básicas y una incomprensión del concepto de número entero. Y en esta misma dirección, López González, W. O. (2017) señala que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de conceptos básicos de Matemáticas, como operaciones con enteros, fracciones y representación de fracciones en la recta.

Ruano et al. (2008) sugieren que el uso de esquemas de análisis resulta útil para organizar los errores cometidos por los estudiantes en las preguntas de matemáticas, pero no permite identificar con garantías los distintos orígenes de éstos. Por otro lado, Sostenes-González et al. (2016) discuten los procedimientos y estrategias utilizados por los estudiantes al resolver ecuaciones, lo que permite describir su pensamiento matemático y anticipar dificultades.

Aguilar et al. (2015) no han encontrado un consenso claro sobre la causa de la discalculia, mientras que Fuentes et al. (2020) presentan varias conclusiones sobre el rendimiento matemático en España. Por ejemplo, señalan que los alumnos presentan mejores puntuaciones que las alumnas, y ha mejorado en relación con ediciones previas. También destacan que el porcentaje de alumnas en carreras tecnológicas lleva estancado desde los años 90.

Gamal et al. (2017) señalan que la formación del profesorado, las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, las nuevas tecnologías y metodologías, el análisis de los errores y el análisis de las relaciones entre factores afectivos y cognitivos son temas importantes que deben abordarse para mejorar los niveles de logro en esta disciplina. Finalmente, Sostenes-González et al. (2016) también señalan que los estudiantes con un mayor dominio de los procedimientos matemáticos son capaces de identificar soluciones no convencionales y aplicar estrategias más creativas para resolver problemas. Además, sugieren que la enseñanza de la resolución de ecuaciones debería fomentar el pensamiento matemático de los estudiantes, en lugar de enfocarse únicamente en la memorización de reglas y algoritmos.

4.2. Estrategias de mejora del aprendizaje matemático.

Tabla 2

Selección y resumen de los artículos científicos seleccionados relacionados con ESTRATEGIAS DE MEJORA DEL APRENDIZAJE MATEMÁTICO.

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
Arestia, V M. 2017 (España)	La Discalculia: caminos de rehabilitación	1. Describir variables categóricas.2. Analizar estrategias .3. Crear nuevos tratamientos4. Evaluar la eficacia 5. Relacionar resultados de pre y post test 6. Analizar la correlación de respuestas 7. Proporcionar herramientas.	Muestreo estratificado. Observación de los tratamientos de rehabilitación efectuados en los chicos discalculicos	Pre-test y post-test estructurados no validados, puesto que fueron elaborados personal y apropiadamente construidos en función de los sujetos discalculicos del Centro DISMED.	23 alumnos, 9 discalculicos y 14 normodotados. Los primeros, entre 10 y 16 años y con discalculia evolutiva	Se evidenciaron unos resultados que nos llevaron a unas conclusiones sorprendentes y positivas . Este programa de intervención ha sido útil para mejorar las habilidades fundadas en el razonamiento y en la lógica matemática de los sujetos tratados.
Corrales Jaar, J. 2021 (Venezuela)	Revisión actualizada: enseñanza de las Matemáticas desde los entornos virtuales de aprendizaje	- Analizar los principales aportes ofrecidos en la promoción de una nueva praxis de la enseñanza de las Matemáticas. - Aportar al profesorado de Matemáticas algunas recomendaciones	Revisión bibliográfica de 2016 a 2021	No ha lugar	No ha lugar	Los profesores reconocen los beneficios de las TIC y los entornos virtuales para la educación matemática , pero no saben cómo usarlos. El uso de los EVA en la enseñanza de las Matemáticas ayuda a desarrollar habilidades para resolver problemas y actitudes metacognitivas

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
Farfán-Pimentel, J. F. 2022 (Perú)	Aprendizaje colaborativo en el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria.	Proponer una estrategia de aprendizaje colaborativo para contribuir al desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes del primer grado de Educación Secundaria de una institución educativa de San Juan de Lurigancho (Lima, Perú).	Enfoque cualitativo y como base el paradigma sociocrítico. Se empleó el tipo aplicada educacional. Se trabajó con un diseño no experimental, de corte transversal y de nivel descriptivo	Se empleó la entrevista semiestructurada para la obtención de información a través de la guía de entrevista con la finalidad de comprender la realidad del contexto socioeducativo acerca de las competencias matemáticas y el aprendizaje colaborativo.	28 estudiantes cuyas edades oscilan entre 12 a 14 años y 3 docentes del área de matemática de la institución educativa	Destaca el éxito del aprendizaje colaborativo en el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes de primer grado de Educación Secundaria. Se resalta la importancia teórico-práctica de esta estrategia y se menciona la teoría del aprendizaje colaborativo de Barkley, Cross y Major como referencia.
Fornons-Jou, V. et al. 2016 (España)	Flipped Classroom en la asignatura de Matemáticas de 3º de Educación Secundaria obligatoria	Determinar si la utilización de la metodología Flipped Classroom , en la asignatura de Matemáticas de 3º de ESO, hace que mejoren las evaluaciones académicas de los alumnos y su participación, responsabilidad, entrega, trabajo, dedicación, entusiasmo y esfuerzo en la adquisición de los conocimientos matemáticos.	Mixta que como dicen Hernández, Sampieri y Mendoza (2008) implica procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación que incluyen la recolección y análisis de datos tanto cualitativos como cuantitativos.	Herramientas de investigación cualitativas como el grupo de discusión y la observación, siguiendo un modelo fenomenológico. Se ha medido cuantitativamente el aumento de resultados en la evaluación de 3ºESO en Matemáticas con la metodología Flipped Classroom, comparando con los obtenidos con la metodología tradicional	2 grupos de 3º ESO. En uno se empleó Flipped Classroom trabajando en grupos de 4 alumnos (grupo experimental). En el otro con magistral y trabajando de individualmente (grupo control)	El instituto Ermengol IV ha experimentado un aumento del 20% en los resultados de Matemáticas de los estudiantes de tercer año de secundaria utilizando la metodología Flipped Classroom en comparación con la metodología clásica. Este aumento ha sido estadísticamente significativo con una probabilidad del 95%. Los estudiantes han valorado positivamente esta metodología, destacando el aumento de la colaboración entre ellos, un ambiente de trabajo más relajado y la participación activa en el aprendizaje . Además, ha habido una mayor

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
						interacción con el profesor y un aumento en el nivel de responsabilidad en el aprendizaje.
Gabarda Méndez, V. et al. 2022 (España)	El aprendizaje de las Matemáticas mediante tecnología en Europa: revisión de literatura	Aborda el modo en que esta se utiliza la tecnología como herramienta metodológica al servicio de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la etapa de Educación Secundaria.	Revisión sistemática de la literatura científica alojada en la base de datos de Web Of Science de los últimos 5 años	No ha lugar	De 123 artículos iniciales, se seleccionan 19	Producción científica prolífica, en los 2 últimos años y en el contexto español. Herramientas tecnológicas diversas y con impacto positivo en los procesos formativos de las Matemáticas: Realidad Virtual, Realidad Aumentada, Geogebra, Scratch, Youtube, Kahoot, Modellus, Escape Room Digital, Genial.ly y Breakout, Flipped Learning, Impresión 3D
García Alarcón, D. R., 2018 (Colombia)	Objeto virtual de aprendizaje de las operaciones adición y sustracción de números enteros	Determinar la incidencia de la implementación de un Objeto Virtual de Aprendizaje bajo los preceptos del Aprendizaje Significativo , sobre el logro de aprendizaje de las Operaciones Adición y Sustracción de Números Enteros	De tipo cuasi experimental	<ul style="list-style-type: none"> - Prueba de conocimientos previos III. - Interacción de los estudiantes con el Ambiente IV. - Prueba post test de conocimiento 	67 estudiantes de género femenino con edades entre 12 y 14	Al implementar un OVA el grupo de estudiantes obtuvo unos mejores resultados académicos en la comprensión de las operaciones numéricas.
George Reyes, C. E. 2020 (México)	Reducción de obstáculos de aprendizaje en Matemáticas con el uso de las TIC	Analizar el impacto del uso de las tecnologías para reducir los obstáculos mencionados en el nivel educativo de Bachillerato	Diseño no experimental descriptivo con enfoque cuantitativo con un proceso formal, objetivo y	La técnica utilizada fue la encuesta, se diseñó un instrumento compuesto por 18 ítems	207 sujetos con edades comprendidas entre los 15 y 19 años, de los cuales 114	Si bien existen beneficios percibidos para usar las tecnologías como fuente de ayuda para superar obstáculos de aprendizaje tales como el acceso a información ilimitada o la presencia de canales de videos especializados en

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
			sistemático para obtener información cuantificable basado en encuestas de opinión		(55.08%) fueron mujeres y 93 (44.92%) hombres.	contenidos de Matemáticas, también existen limitantes como la gran cantidad de recursos disponibles y la necesidad de contar con la explicación del maestro para darle sentido e interpretación a esos recursos
Gómez García, G. et al. 2020 (España)	La trascendencia de la Realidad Aumentada en la motivación estudiantil . Una revisión sistemática y meta-análisis	<ul style="list-style-type: none"> - Localizar documentos de impacto y reconocido prestigio que experimenten con Realidad Aumentada en el ámbito educativo. - Analizar la trascendencia de la Realidad Aumentada en la motivación de los estudiantes. 	Revisión sistemática de publicaciones de los últimos 5 años	No ha lugar	De 486 artículos seleccionados inicialmente, se han escogido 9	La aplicación de la Realidad Aumentada es una tendencia de estudio para tener en cuenta en el panorama educativo. La aplicación de Realidad Aumentada en las aulas de distintas etapas educativas promueve una mejora en la motivación estudiantil . La aplicación de Realidad Aumentada en las aulas provoca una mejora motivacional en el estudiantado.
Guzmán, A. 2021 (República Dominicana)	Estrategias pedagógicas para el aprendizaje de las operaciones matemáticas básicas sin calculadora	Presentar una experiencia de investigación acción , en la que se diseñaron y ejecutaron secuencias didácticas enfocadas en la resolución de problemas de la vida cotidiana y el empleo de recursos lúdicos , para que los estudiantes de secundaria desarrollen la capacidad de	Experiencia de investigación acción, de corte cualitativo	Desarrollo de 20 actividades formativas que incluyeron: talleres de aprendizaje por descubrimiento, resolución de problemas, juegos educativos y elaboración de diario reflexivo	33 estudiantes del 6º grado de secundaria, de un centro educativo ubicado en Los Alcarrizos, República Dominicana	Aumento del nivel de dominio del estudiantado y mayor independencia del uso de la calculadora mientras resuelven problemas. Al implementar estas secuencias fueron identificados los errores que cometía el estudiantado al efectuar las operaciones, a través de las retroalimentaciones. Además, entre las estrategias utilizadas, la resolución de problemas y el uso de juegos

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
		efectuar las operaciones Matemáticas básicas sin la necesidad de utilizar la calculadora				educativos facilitaron en los estudiantes el desarrollo de competencias matemáticas y la independencia de la calculadora. Cuando los estudiantes se sienten involucrados aumenta su motivación e interés por el aprendizaje.
Marín Gaviria, T. M. 2019. (Colombia)	Propuesta didáctica para la comprensión del orden en los números enteros	Aportar una estrategia de aprendizaje que mejore la comprensión del orden de los números enteros en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Técnica el Placer del municipio de Marquetalia	Cualitativo-experimental	Diseño y aplicación de 4 prácticas de laboratorio con elementos de reciclaje y del laboratorio de química con un trabajo en equipo. Primero un pretest para identificar fallos con el orden de los números enteros. Y un postest	19 estudiantes entre 12 y 15 años; 7 chicas, 12 chicos, del 7º grado	Los estudiantes trabajaron en equipo con motivación y lograron desarrollar habilidades de análisis y comprensión mediante comparaciones entre 4 laboratorios . Se reajustó el concepto del orden de los números enteros y se mejoraron aspectos como el desplazamiento en la recta numérica y la capacidad de expresar enteros negativos .
Rico et al. 2008 (España)	Planificación de las Matemáticas escolares en secundaria . El caso de los Números Naturales	La necesidad del profesor en formación de desarrollar mediante un Análisis de Contenidos las diversas capacidades necesarias para la planificación. Ejemplificamos el procedimiento y sus fases mediante el tema Sistema de los Números Naturales	El Análisis de Contenido es una herramienta técnica del Análisis Didáctico para estudiar la diversidad de significados en los contenidos	No ha lugar	No ha lugar	Destaca la importancia de desarrollar capacidades que contribuyan a la planificación del profesor competente . Sintetizar la estructura de un tema mediante mapas, relacionar distintos sistemas de representación y desarrollar argumentos de prueba y demostración, entre otros.

Autores, año, país	Título	Objetivos del estudio	Tipo de investigación	Actividades realizadas	Muestra	Principales resultados
Romero-García et al. 2023 España	Personalizando el aprendizaje de las Matemáticas con el modelo flipped learning		Metodología cuantitativa con un diseño preexperimental pretest y postest	Control de conocimientos al inicio y final.13 preguntas sobre conocimientos teóricos y 12 ejercicios de operaciones algebraicas y se califica sobre un total de 100 puntos.	62 estudiantes (39.7% hombres y 58.7% mujeres) de 3º y 4º de ESO durante 2020/2021.	Buena acogida: modelo pedagógico basado en la compartimentación del temario en ítems de contenido mínimo y vídeos educativos como soporte. Adaptado a la diversidad del aula y ha superado las diferencias de género en actitud y emociones hacia las Matemáticas. Con aprendizaje autodirigido y adaptado a la diversidad de estilos de aprendizaje.
Torrecillas Sevilla, D. 2019 (España)	Matemáticas: digitalizar 2º ESO	Diseñar una web dedicada a contenidos del currículo de 2º ESO y de la asignatura de Matemáticas formada por materiales propios en formato digital que sirvan de utilidad tanto a profesores como alumnos	La propuesta de valoración consiste en un cuestionario auto-administrativos	Creación de página web cuenta con la plataforma Wix, con materiales: vídeos, infografías, gráficos, presentaciones interactivas... Genial.ly, Geogebra, Photoshop, ...	Alumnos de 2º ESO	Se ha conseguido diseñar una web con contenidos de tres bloques: números y operaciones, álgebra y funciones.
Vargas Vargas, N. A. 2020 (Colombia)	Prototipos tecnológicos para la superación de dificultades matemáticas en niños de Secundaria, fundamentados en el aprendizaje basado en proyectos	Estudio sobre el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) a través de las TIC, para las dificultades de aprendizaje en operaciones básicas matemáticas	Investigación comparativa y descriptiva.	Medición pretest y postest, integrando contenidos basados en competencias: de razonamiento lógico matemático, conceptual de OBM y de solución de OBM, y permitió a los estudiantes mostrar sus dificultades	84 estudiantes.de edades entre 11 y 18 años	Test inicial: 27 % (23 estudiantes) con nivel de desempeño bajo, 66 % (55 estudiantes) con nivel de desempeño básico y 7 % (6 estudiantes) demuestra nivel superior. Test final tras aplicar ABP: A través del registro de observación con el uso de las TIC, se logró el aumento en el interés del estudiante por la solución de problemas

En el ámbito de la educación matemática, se han realizado diversas investigaciones en los últimos años, que han arrojado resultados positivos en cuanto a la implementación de diferentes estrategias y metodologías para mejorar los resultados de aprendizaje de los alumnos. A continuación, se describen las principales conclusiones y aportes de cada autor en sus respectivas investigaciones.

En primer lugar, Arestia (2017) indica que se ha demostrado que un programa de intervención dirigido a la rehabilitación de sujetos discalculicos, enfocado en mejorar las capacidades para solucionar problemas, ha sido efectivo para mejorar las habilidades fundamentadas en el razonamiento y la lógica matemática.

Por otro lado, Corrales Jaar (2021) destaca que, aunque los profesores reconocen los beneficios de las TIC y los entornos virtuales para la educación matemática, su uso efectivo es limitado debido a la falta de conocimientos sobre cómo utilizarlos. El uso de EVA en la enseñanza de las Matemáticas ha demostrado ser efectivo en el desarrollo de habilidades para resolver problemas y actitudes metacognitivas, tanto en profesores como en estudiantes de diferentes niveles educativos, incluyendo aquellos con discapacidades o trastornos emocionales.

Farfán-Pimentel (2022), por su parte, resalta el éxito del aprendizaje colaborativo en el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de primer grado de educación secundaria. Además, destaca que se han identificado criterios teóricos, prácticos y metodológicos para mejorarlas a través de esta estrategia y se validaron sus potencialidades mediante el método de juicio de expertos.

En cuanto a la metodología Flipped Classroom, Fornons-Jou et al. (2016) demostraron que su implementación ha llevado a un aumento del 20% en los resultados de Matemáticas de los estudiantes de tercer año de secundaria. Además, los estudiantes valoraron positivamente esta metodología, destacando el aumento de la colaboración, un ambiente de trabajo más relajado, la participación en el aprendizaje, la mayor interacción con el profesor y el aumento en el nivel de responsabilidad en el aprendizaje.

Gabarda Méndez et al. (2022) resaltan la producción científica prolífica en el contexto español, en la que se han empleado diversas herramientas tecnológicas con impacto positivo en los procesos formativos de las Matemáticas, tanto para estudiantes como para docentes. Algunas de las tecnologías mencionadas son la Realidad Virtual, la Realidad Aumentada, Geogebra, Scratch, Youtube, Kahoot, Modellus, Escape Room Digital, Genial.ly, Breakout, Flipped Learning e Impresión 3D.

García Alarcón (2018) demostró que la implementación de un OVA llevó a que el grupo de estudiantes obtuviera mejores resultados académicos en la comprensión de las operaciones numéricas.

Por su parte, George Reyes (2020) destaca los beneficios y limitantes en el uso de tecnologías como fuente de ayuda para superar obstáculos de aprendizaje en matemáticas, como el acceso a información ilimitada y la presencia de canales de vídeos especializados, así como la necesidad de contar con la explicación del docente. Además, se evidenció que los estudiantes lograron desarrollar habilidades comunicativas y metacognitivas, las cuales son competencias fundamentales para el aprendizaje y el desarrollo personal.

En resumen, los investigadores educativos han abordado diversos temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, enfocándose en estrategias y metodologías innovadoras, así como en el uso de las tecnologías y la colaboración entre estudiantes.

El estudio de Arestia, V. M. (2017) destaca la eficacia de los tratamientos de rehabilitación para mejorar las habilidades de solución de problemas en sujetos discalculicos. Por su parte, Corrales Jaar, J. (2021) resalta los beneficios de los entornos virtuales en la educación matemática y cómo estos pueden desarrollar habilidades para resolver problemas y actitudes metacognitivas en los estudiantes.

Farfán-Pimentel, J. F. (2022) se enfoca en el aprendizaje colaborativo como una estrategia efectiva para mejorar las competencias matemáticas de los estudiantes de primer grado de Educación Secundaria. Mientras tanto, Fornons-Jou, V. et al. (2016) destacan el éxito de la metodología Flipped Classroom en el aumento de los resultados de esta disciplina de los estudiantes de tercer año de secundaria.

En cuanto a las tecnologías, Gabarda Méndez, V. et al. (2022) mencionan diversas herramientas tecnológicas que pueden ser de gran utilidad en los procesos formativos de las Matemáticas, tales como Realidad Virtual, Realidad Aumentada, Geogebra, Scratch, Youtube, Kahoot, Modellus, Escape Room Digital, Genial.ly y Breakout, Flipped Learning e Impresión 3D.

García Alarcón, D. R. (2018) destaca los beneficios del uso de OVA en la comprensión de las operaciones numéricas en los estudiantes. Mientras tanto, Guzmán, A. (2021) menciona cómo la resolución de problemas y el uso de juegos educativos pueden facilitar el desarrollo de competencias matemáticas y la independencia del uso de la calculadora en los estudiantes.

Finalmente, Marín Gaviria, T. M. (2019) destaca la importancia del trabajo en equipo y la motivación en el aprendizaje de las Matemáticas, y cómo esto puede desarrollar habilidades comunicativas y metacognitivas en los estudiantes.

Asimismo, es interesante señalar un estudio de García Alarcón (2018) en el que refleja cómo el empleo de tecnologías digitales mejoró los resultados académicos en operaciones numéricas básicas de alumnos de 13 años al implementar un OVA (Objeto Virtual de Aprendizaje) orientado al desarrollo de Aprendizaje Significativo en el logro de aprendizaje de las operaciones de adición y sustracción de números enteros.

5. DISCUSIÓN

El objetivo general del Trabajo Fin de Máster es analizar las dificultades en el aprendizaje y los errores que presentan los alumnos de la ESO en la asignatura de Matemáticas, y ver el tratamiento que se hace de los mismos en el ámbito educativo y para ello se ha realizado una revisión sistemática de bibliografía científica relacionada con esta problemática.

Además de este objetivo general, se pretenden alcanzar varios objetivos específicos, como identificar los errores que cometen los alumnos al enfrentarse a la resolución de problemas con números reales y sus causas, reconocer las posibles dificultades que presentan los alumnos en la resolución de los ejercicios con números reales, descubrir estrategias pedagógicas que permitan identificar las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas y generar metodologías innovadoras que mejoren la intervención didáctica, clasificar la literatura existente en categorías emergentes que puedan ayudar en la búsqueda de soluciones al problema detectado en el aula, y conocer los resultados obtenidos en la revisión bibliográfica con el fin de poder aplicar mejoras en el aula de Matemáticas.

En relación con las dificultades comunes en el aprendizaje de éstas los autores González del Olmo (2015), Fernández Lázaro (2013), Carrión Miranda (2007), Cruz Echáverri (2022) y López González (2017) mencionan los errores de escritura y operación, la falta de comprensión de conceptos básicos, la dificultad en el cálculo de denominadores comunes y el desconocimiento de la discalculia. También destacan la importancia de que los profesores conozcan los errores más frecuentes de los estudiantes para preparar estrategias didácticas alternativas.

En cuanto al análisis de errores en el aprendizaje de las Matemáticas autores como Ruano et al. (2008) y Sostenes-González et al. (2016) discuten la utilidad de los esquemas de análisis para organizar los errores cometidos por los estudiantes y describen los procedimientos y estrategias utilizados por ellos al resolver ecuaciones, lo que permite anticipar dificultades y fomentar el pensamiento matemático.

Respecto al rendimiento matemático y los factores socioculturales, autores como Aguilar et al. (2015) y Fuentes et al. (2020) presentan varias conclusiones sobre el rendimiento matemático en España, como el mejor desempeño de los alumnos en relación con las alumnas y el estancamiento del porcentaje de alumnas en carreras tecnológicas desde los años 90. También mencionan la falta de consenso sobre la causa de la discalculia.

A la hora de la mejora de los niveles de logro en Matemáticas, autores como Gamal et al. (2017) y Sostenes-González et al. (2016) destacan la importancia de abordar temas como la formación del profesorado, las nuevas tecnologías y metodologías, el análisis de los errores y las relaciones entre factores afectivos y cognitivos para mejorar los niveles de logro en esta asignatura. También sugieren que la enseñanza de la resolución de ecuaciones debería fomentar el pensamiento matemático y la creatividad en lugar de la memorización de reglas y algoritmos.

En suma, la mayoría de las recomendaciones metodológicas acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas insisten en la necesidad de identificar los errores cometidos por los alumnos, determinando sus causas y organizando la enseñanza teniendo en cuenta esta información, es decir, considerarlos como oportunidades de aprendizaje, buscando actividades para depurarlos y contribuir así al proceso de construcción del conocimiento por parte de los estudiantes

Por otro lado, los investigadores educativos han explorado diversas estrategias, metodologías y tecnologías para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, y han encontrado resultados positivos en cuanto al desarrollo de competencias matemáticas, habilidades comunicativas y metacognitivas, así como la motivación y el interés de los estudiantes en el aprendizaje.

En este sentido, se han realizado diversas investigaciones en las que se han obtenido resultados positivos. Por un lado, Arestia (2017) destaca la eficacia de los tratamientos de rehabilitación para mejorar las habilidades de solución de problemas en alumnos con discalculia. A su vez, Farfán-Pimentel (2022) se enfoca en el aprendizaje colaborativo como una estrategia efectiva para mejorar las competencias

matemáticas de los estudiantes de primer grado de Educación Secundaria. Y, por último, Fornons-Jou et al. (2016) destacan el éxito de la metodología Flipped Classroom en el aumento de los resultados de Matemáticas de los estudiantes de tercer año de secundaria.

El uso de las tecnologías en la educación matemática también ha sido objeto de investigación. Corrales Jaar (2021) destaca los beneficios de los entornos virtuales en la educación matemática y cómo estos pueden desarrollar habilidades para resolver problemas y actitudes metacognitivas en los estudiantes. Asimismo, García Alarcón (2018) demostró que la implementación de un OVA llevó a que el grupo de estudiantes obtuviera mejores resultados académicos en la comprensión de las operaciones numéricas. Y también Gabarda Méndez et al. (2022) mencionan diversas herramientas tecnológicas que pueden ser de gran utilidad en los procesos formativos de las Matemáticas, como la Realidad Virtual, la Realidad Aumentada, Geogebra, Scratch, Youtube, Kahoot, Modellus, Escape Room Digital, Genial.ly, Breakout, Flipped Learning e Impresión 3D. Y finalmente, George Reyes (2020) destaca los beneficios y limitaciones del uso de tecnologías como fuente de ayuda para superar obstáculos de aprendizaje en Matemáticas.

6. CONCLUSIONES

Volviendo a lo indicado en el punto anterior en relación al proceso de aprendizaje que puede producir el cometer un determinado error, quiero comenzar estas conclusiones finales con la información recogida en la LOMLOE publicada en el BOE e incluida en el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria en cuyo apartado de los saberes básicos se hace mención explícita al sentido socioafectivo, dentro del cual la gestión emocional de los alumnos por parte del profesor ha de ser tenida en cuenta de manera permanente y a la obligación de buscar también estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje. Es decir, ya en la ley aparece de manera explícita que el error puede ser considerado como una oportunidad de aprendizaje y avanzar en el conocimiento de un área determinada.

A lo largo del presente trabajo de investigación se ha puesto de manifiesto que los errores cometidos por los alumnos a la hora de realizar operaciones matemáticas

numéricas atienden a diversas causas, como indica González del Olmo (2015), generalmente están asociados a un esquema cognitivo inadecuado en el alumno, se mantienen en el tiempo y están apoyados en conocimientos erróneamente adquiridos con anterioridad, quedando así excluidas las manifestaciones que son consecuencia de una carencia de conocimiento o de despistes y lapsus. Por ello, indica el mismo autor, todo proceso de enseñanza es potencialmente generador de errores, haciendo referencia Abrate et al. (2006).

En relación a los números reales, que incluyen el resto de categorías numéricas: naturales, enteros, fraccionarios e irracionales, es posible señalar algunas áreas principales de dificultad en la enseñanza y aprendizaje de los mismos, como son, la aparición de los números negativos y las operaciones que implican con su signo, la multiplicación como operación conjunta de sumas, la división como un aspecto de la fracción, entender la fracción como un número decimal o entero, la equivalencia de fracciones lo que implica la simplificación de las mismas, la noción de la cuantificación del número irracional con infinitos decimales, las operaciones con raíces de diferente índice que pueden dar lugar a números naturales, enteros o racionales, etc.

En este sentido, para reducir la dificultad que conlleva considerar la fracción como una división, González del Olmo (2015) propone la realización de actividades prácticas que ayuden al alumno en su comprensión de estos números como puede ser repartir un litro de leche en varios vasos. Para el caso de las fracciones equivalentes, el autor propone que se pudieran mostrar líneas paralelas con fracciones equivalentes marcadas mediante puntos en cada línea, de modo que se observe la equivalencia real de manera visual.

Aunque en la presente revisión se destaca la presencia de múltiples perfiles de discalculia primaria, a fecha de hoy, no hay consenso claro en cuanto a la causa de la misma como indica Aguilar (2015). Se necesitan más estudios sobre el procesamiento de representaciones numéricas en niños con discalculia, incluyendo la diferenciación entre pequeñas y grandes cantidades y los códigos numéricos árabes, además de explorar otros procesos numéricos como el reconocimiento de números y la producción de cantidades.

Por otro lado, y según aparece recogido en la LOMLOE citada con anterioridad, se hace necesario cada vez más adquirir competencias y técnicas cooperativas para para desarrollar de manera óptima trabajo en equipo y compartir y construir

conocimiento matemático que ayude a la toma de decisiones, mediante conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.

Por último, y no por ello menos importante, a veces los errores cometidos por los alumnos tienen su origen en el entorno social, pueden ser alumnos procedentes de otros países que desconocen aún la lengua castellana, por ello se hace necesario generar un clima de inclusión y respeto mediante actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.

6.1. Futuras líneas de investigación

Los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje al realizar operaciones con números reales tienen diferentes orígenes, según se ha señalado con anterioridad, siendo uno de ellos la discalculia o dificultad en el aprendizaje relacionado con las Matemáticas.

Algunos autores como Aguilar (2015) proponen realizar estudios exploratorios y sistemáticos para evaluar sistemas numéricos simbólicos y analógicos, las relaciones que mantienen, al principio, durante y después de desarrollo del aprendizaje matemático formal, y su implicación en los aprendizajes matemáticos en general.

En este sentido, a finales de 2021 se inició el proyecto europeo denominado “Everything Starts with Mathematics – ESWM –” diseñado para mejorar los métodos de aprendizaje de las Matemáticas con el fin de ayudar a los alumnos con discalculia que ya cursan la Educación Secundaria a superar, mediante el empleo de una aplicación móvil desarrollada para tal fin, las dificultades aritméticas que vienen sufriendo desde los primeros años de la educación primaria.

El consorcio de este proyecto Erasmus+, cofundado por la comisión europea reúne a participantes de Turquía, Rumanía, Italia, Grecia, Portugal y España, entre cuyos representantes me encuentro personalmente como docente de la asignatura de Matemáticas de la etapa de Educación Secundaria. El ESWM surge por una clara necesidad de ayudar a los estudiantes europeos a superar sus dificultades en esta asignatura y tiene como objetivo desarrollar métodos creativos e incisivos para ayudar a los alumnos con discalculia a prosperar en este área académica que es fundamental para adquirir habilidades útiles para la vida, lo que les permitirá ser más capaces de poder compensar sus fracasos futuros. A su vez, se pretende elaborar una app móvil con la que puedan desenvolverse ellos mismos de manera independiente desde el colegio y que sea comprensible para todas las edades que se sientan inseguras en

cuanto a las habilidades básicas Matemáticas. En este sentido, los educadores tendrán la oportunidad no sólo de realizar un correcto diagnóstico de los alumnos que padecen el trastorno de la discalculia, sino que podrán aplicar de manera práctica un tratamiento de mejora de esta patología gracias a un planning de educación individual apropiado con el fin de conseguir una mejora en el aprendizaje de las Matemáticas.

En definitiva, este proyecto ESWM permitirá que los alumnos que quieran mejorar sus habilidades en operaciones básicas tengan la oportunidad de conseguirlo paso a paso a través de esta aplicación móvil y en su lengua materna y poder explorar el empleo de aplicaciones digitales que ayuden a la mejor comprensión del significado de la aritmética, esto es, las operaciones que involucran los números reales, en particular los fraccionarios como indica González del Olmo (2015)

En este sentido, el significado de fracción como parte esencial del conjunto más amplio de los números reales, el manejo de sus algoritmos y la multiplicidad de contextos en los que aparecen, son dificultades frecuentes en el proceso de aprendizaje de las fracciones según nos propone este autor, que se apoya a su vez en Godino (2004) quien afirma que “su estudio está condicionado por la progresiva comprensión de las operaciones aritméticas y de las situaciones de medición de magnitudes no discretas. Los números racionales son el primer conjunto de experiencias numéricas de los niños que no están basadas en los algoritmos de recuento como los números naturales”. Por ello, un aprendizaje significativo de su naturaleza, mediante el empleo de juegos como el dominó, por ejemplo, podría facilitar la comprensión de éstos, es decir, su verdadero significado y utilidad en la vida no sólo en la asignatura de Matemáticas, ya que el juego es una estrategia metodológica que se puede implementar en todos los niveles educativos, como indican Guzmán et al. (2020).

Es imperativo contar con la opinión de los alumnos en la percepción que ellos mismos tienen acerca de su comprensión de esta parte básica de las Matemáticas además de profundizar en las situaciones de aprendizaje como apoyo didáctico en el diseño y planificación metodológica para impartirles contenido adecuado.

Se abre todo un mundo de posibilidades pedagógicas a partir de ahora gracias a las tecnologías de la Realidad Aumentada, como señala Gómez García et al. (2020) y a otras innovaciones disruptivas que ya han llegado para acompañarnos como son la web 3.0, el metaverso (el nuevo internet tridimensional 3D), el blockchain o la inteligencia artificial de lenguaje natural.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilar Villagrán, M., Aragón Mendizábal, E., & Navarro Guzmán, J. I. (2015). Las dificultades de aprendizaje de las Matemáticas (DAM). Estado del arte. *Revista de Psicología y Educación*, 10(2), 13-42.
- Alfaro, C. y Fonseca, J. (2018). Problem solving in the teaching of differential and integral calculus in one variable: Perspective of mathematics teachers. *Revista Uniciencia*, 32(2), 42-56.
- Álvarez-Montesinos, J. A., Costa, H. M., & García-Orza, J. (2018). ¿Qué necesitamos para aprender a multiplicar? El rol de las habilidades numéricas básicas y la ansiedad. *Revista Escritos de Psicología*, 11(3), 103-114.
- Aponte Bello, P. A., Rivera Martínez, M. A. (2017). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del número entero presentadas en un objeto virtual de aprendizaje*. [Trabajo Fin de Grado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá].
- Arestia, V M. (2017). *La discalculia: caminos de rehabilitación*. [Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura].
- Ashcraft, M. H., & Faust, M. W. (1994). Mathematics anxiety and mental arithmetic performance: An exploratory investigation. *Cognition and Emotion*, 8(2), 97–125. <https://doi.org/10.1080/02699939408408931>
- Barkley, E., Cross, P., & Major, C. (2007). *Técnicas de aprendizaje colaborativo: manual para el profesorado universitario*. Madrid: Ed. Morata.
- Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research*. Croom Helm.
- Bozkurt, G. (2016). Mathematics teachers and ICT: Factors affecting pre-service use in school placements. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(2), 453-468. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1110260.pdf>.
- Bruno Castañeda, A., & García-Alonso, I. (2021). Un estudio sobre modelos de enseñanza de los números negativos en la formación de futuros profesores de secundaria. *Revista Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, XIII, 61-74.
- Campuzano Villamar, M. V. & Armijos Saca, R. A. (2019). *La discalculia y el aprendizaje de la matemática en los niños/as del 6to. año de educación básica de la Escuela Gral. Antonio José De Sucre del cantón El Triunfo, período lectivo 2019 – 2020*. [Trabajo de Titulación de Grado. Universidad Estatal de Milagro. Ecuador].

- Carrillo Grande, S. (2019). *Propuesta didáctica basada en el aprendizaje cooperativo y las Inteligencias Múltiples. Números enteros y divisibilidad en 2º E.S.O.* [Trabajo Fin de Máster. Universidad de Valladolid].
- Carrión Miranda, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Unión Revista iberoamericana de educación matemática*, 19-57.
- Cid Castro, M. E. (2022) - *Obstáculos Epistemológicos en la Enseñanza de los Números Negativos.* [Tesis Doctoral – Universidad de Zaragoza].
- Chorques Espí, M. (2013). *Metodología para enseñar álgebra a alumnos de 1º de la ESO basada en el aprendizaje cooperativo.* [Trabajo Fin de Máster. Universidad Internacional de La Rioja].
- Corrales Jaar, J. (2021). Revisión actualizada: enseñanza de las Matemáticas desde los entornos virtuales de aprendizaje. *Ciencia y Educación*. 5(2), 25-40. <https://doi.org/10.22206/cyed.2021.v5i2.pp25-40>
- Cruz Echeverri, D. A. (2022). Naturaleza de dificultades asociadas al aprendizaje de las Matemáticas: números enteros, en estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria. *Revista Oratores*, 1(17), 19-41. DOI: 10.37594/oratores.n17.695
- Farfán-Pimentel, J. F., Crispín Rommel, L.-, Carreal-Sosa, C. L., Quiñones-Castillo, K. G. & Farfán-Pimentel, D. E. (2022). Aprendizaje colaborativo en el desarrollo de competencias Matemáticas en estudiantes de secundaria. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 6(5), 5335-5357. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i5.3505
- Fernández. Lázaro, Á. (2013). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en ESO y BTO. Análisis de un caso práctico.* [Trabajo Fin de Máster. Universidad Internacional de la Rioja].
- Fernández Millán, E. Molina, M. (2018). Ejemplos y definiciones de ecuaciones: una ventana hacia el conocimiento conceptual de estudiantes de secundaria. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 12(3), 147 – 172.
- Fomina, T., Vorobjev, G., Kalitvin, V. (2016). Distance Learning Approaches in the Mathematical Training of Pedagogical Institutes's Students. *International Journal of Environmental & Science Education*, 11(18), 12145-12154. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1122664>
- Fonseca Bon, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* [Tesis Doctoral. Universidad de Vigo].

- Fornons-Jou, V.; Palau-Martín, R.F. (2016). Flipped classroom en la asignatura de Matemáticas de 3º de Educación Secundaria obligatoria. *EduTec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 55, 1-17.
- Fuentes De Frutos, S., Renobell Santaren, V. (2020). La influencia del género en el aprendizaje matemático en España. Evidencias desde PISA. *Revista de Sociología de la Educación - RASE*, 13 (1), 63-80. <http://dx.doi.org/10.7203/RASE.13.1.16042>
- Gabarda Méndez, V., Cuevas Monzonís, N., Colomo Magaña, E., Cívico Ariza, A. (2022). Revisión sistemática sobre el uso de tecnología como recurso metodológico en el aprendizaje de Matemáticas en Educación Secundaria. *Revista Educativa Hekademos*, 33, Año XV, 49-58.
- Gabarda Méndez, V., Colomo Magaña, E., Cívico Ariza, A., Ruíz Palmero, J. (2022). El aprendizaje de las Matemáticas mediante tecnología en Europa: revisión de literatura. *Texto Livrem. Linguagem e Tecnologia. Belo Horizonte*, 15. DOI: 10.35699/1983-3652.2022.40275
- Gamal Cerda, E., Pérez, C., Casas Bolaños, J. A., Ortega Ruiz, R., 2017. Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. La necesidad de un análisis multidisciplinar. *Revista Psychology, Society & Education*, 9 (1), 1-10.
- Gamboa Araya, R., Castillo Sánchez, M., Hidalgo Mora, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 19 (1), 1-31. DOI 10.15517/aie.v19i1.35278
- García Alarcón, D. R. (2018). *Objeto Virtual de Aprendizaje de las Operaciones Adición y Sustracción de Números Enteros*. [Trabajo Fin de Grado, Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá].
- Gasco Txabarri, Javier. (2017). Diferencias en el uso de estrategias en el aprendizaje de las Matemáticas en enseñanza secundaria según el sexo. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 8 (1), 47-59. <https://doi.org/10.18861/cied.2017.8.1.2638>
- George Reyes, C. E. (2020). Reducción de obstáculos de aprendizaje en Matemáticas con el uso de las TIC. *IE Revista De Investigación Educativa De La REDIECH*, 11, e697. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.697
- Gómez García, G., Rodríguez Jiménez, C., & Marín Marín, J. A. (2020). La trascendencia de la Realidad Aumentada en la motivación estudiantil. Una revisión sistemática y meta-análisis. *Alteridad Revista de Educación*, 15(1), 36-46. <https://doi.org/10.17163/alt.v15n1.2020.03>
- González del Olmo, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria*. [Trabajo Fin de Máster. Universidad de Cantabria].

- González Gómez, B., & Núñez Peña, M. I. (2018). ¿Dividir? No, gracias. El miedo a los números y el bajo rendimiento en Matemáticas. *Revista Ciencia Cognitiva*, 18(1), 4-7.
- González Mayorga, H. (2021). *El impacto de PISA en la sociedad española*. [Tesis Doctoral. Universidad de León].
- Guzmán, A., Ruiz, J., & Sánchez, G. (2020). Estrategias pedagógicas para el aprendizaje de las operaciones Matemáticas básicas sin calculadora. *Revista Ciencia y Educación*, 5(1), 55-74. <https://doi.org/10.22206/cyed.2021.v5i1.pp55-74>
- Heinze, A. (2005). Mistake-handling activities in the mathematics classroom. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 105-112.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. Baptista Lucio, M. P. (2018). *Metodología de la investigación*. 6ª edición.
- Jácome Lindarte, J. M. & Jiménez Barriosnuevo, M. C. (2022). Propuesta didáctica con Objetos Virtuales de Aprendizaje para el desarrollo del pensamiento crítico en estudiantes de secundaria. *Revolución Educativa en la Nueva Era*, 2, 1064-1080.
- Jeong Yong A. & Akugizibwe E. (2018). An e-Learning Model for Teaching Mathematics on an Open Source Learning Platform. *International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 19(5), 255-267. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1198098>.
- Kaur, D., Koval, A. & Chaney H. (2017). Potential of using iPads as a supplement to teach math to students with learning disabilities. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 3(1), 114-121. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1126733.pdf>
- Lannin, J., Townsend, B., & Barker, D. (2006). The Reflective Cycle of Student Error Analysis. *For the Learning of Mathematics*, 26(3), 33–38. <http://www.jstor.org/stable/40248548>
- Laz-García, V. F., Cedeño Loor, F. O. (2021). Estrategia de enseñanza de la matemática para estudiantes con trastornos de Discalculia. *Domino de las Ciencias*, 7(1), 593-611.
- López González, W. O., & López Ponce, W. V. (2017). Las dificultades conceptuales en el proceso de aprendizaje de la Matemática en el segundo año de Educación Media. *Revista Venezolana de Educación*, 70, 653-667.
- Maca Díaz, A. J. (2016). *La enseñanza de los números enteros un asunto sin resolver en las aulas*. [Trabajo Final de Maestría – Universidad de Manizales].

- Manzano Mozo, F. J. (2017). *Mecanismos articulados para trazar curvas como recurso educativo digital para la didáctica de las Matemáticas en Secundaria y Bachillerato*. 2017. [Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid].
- Marín Gaviria, T. M. (2019). *Propuesta didáctica para comprensión del orden en los números enteros*. [Trabajo Fin de Grado. Universidad Nacional de Colombia].
- Moher, D., Liberati, A., Tetzlaff, J., Altman, D. G., y The PRISMA Group. (2009). Preferred reporting items for systematic reviews and meta-analyses: The PRISMA Statement. *PLoS Medicine*, 6(7), 1-6. <https://doi.org/10.1371/journal.pmed.1000097>
- Montes, M., Pascual, M. I., Carrillo, J., & Martín-Díaz, J. P. (2022). Caracterización de problemas multiplicativos de números enteros propuestos por futuros maestros. *Educação e Pesquisa* (Vol. 48). FapUNIFESP (SciELO). <https://doi.org/10.1590/s1678-4634202248238551esp>
- Morales Díaz, R. O. (2014). *Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales*. [Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Manizales].
- Mulhern, P. (1989). Between the Ears: Making Inferences about Internal Processes. In Creer, B. & Mulhern, G. (Eds.), *New Directions in Mathematics Education*.
- Murillo, F. J. (2000). La Investigación sobre eficacia escolar en España. CIDE.
- Olivo-Franco, J. y Corrales, J. (2020). De los entornos virtuales de aprendizaje: hacia una nueva praxis en la enseñanza de la matemática. *Revista Andina De Educación*, 3(1), 8-19. <https://doi.org/10.32.719/26312816.2020.3.1.2>
- Ortiz Álvarez, M. (2022). *El aprendizaje a partir de errores matemáticos*. [Trabajo Fin de Máster. Universidad de Salamanca].
- Padrón Padrón, O. (2018). *Programación Didáctica Anual de Matemáticas de 1.º de la ESO Situación de Aprendizaje Los Números Enteros*. [Trabajo Fin de Máster. Universidad de La Laguna].
- Palarea, M. M., Ruano, R. M. & Socas, M. M. &. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2 (2), 61-74.
- Parsons, S., & Bynner, J. (2005). Measuring basic skills for longitudinal study. *NRDC Report*, October, www.nrdc.org.uk
- Perrenoud, P. (1993). *La evaluación de los alumnos. De la producción de la excelencia a la regulación de los aprendizajes. Entre dos lógicas*. Colihue.
- Pochulu, M. D. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la Universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*.
- Ramírez, G., Chang, H., Maloney, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2016). On the relationship between math anxiety and math achievement in early elementary

- school: The role of problem-solving strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 141, 83–100. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.07.014>
- Rico, L. (1994). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. S. A de C. V. México.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., Gómez, P. (2008). Planificación de las Matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Romero-García, C.; López-Sastre, A.; Parra-González, M. E.; Segura-Robles, A. (2023). Personalizando el aprendizaje de las Matemáticas con el modelo flipped learning. *Campus Virtuales*, 12(1), 67-77. <https://doi.org/10.54988/cv.2023.1.1072>
- Ruano, R. M., Socas, M. M., Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.
- Rubinsten, O. & Henik, A. (2009). Developmental dyscalculia: heterogeneity might not mean different mechanisms. *Trends Cognition Science*, 13, 92–99. doi: 10.1016/j.tics.2008.11.002.
- Ruiz, Y. M. (2010). Dificultades de aprendizaje de las matemáticas. *Temas para la educación*, 8.
- Ruiz de Miguel, C. (2009). La Linchevsky s escuelas eficaces. Un estudio multinivel de factores explicativos del rendimiento escolar en el área de Matemáticas. *Revista de educación*, 348, 355-376.
- Sanmartí, N. (2007). 10 ideas clave: evaluar para aprender. Barcelona. GRAÓ.
- Sfard, A., Linchevsky, L. (1994). The gains and pitfalls of reification—The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 199-228.
- Socas Robayna, M. M. (1997). Capitulo V. Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. *Revista La educación matemática en la enseñanza secundaria*, (5), 125-154
- Sostenes-González, H., Castañeda, A. (2016). Justificación en la solución de ecuaciones lineales en alumnos de primero de secundaria. *Avances en Matemática Educativa. Tecnología y Matemáticas*, 114-125.
- Szydlik, J. (2015). Mathematical conversations to transform algebra class. *Mathematics Teacher*, 108(9), 656-661.
- Tabare, M. I. (2014). *Posibles errores en el aprendizaje de números reales a raíz del tratamiento propuesto en un texto de nivel secundario*. [Trabajo Fin de Grado. Universidad Nacional de General Sarmiento].
- Taveras, A., Guillén, J. R., Peña, P. (2020). Análisis comparativo de estrategias didácticas para la enseñanza del cálculo o aproximación de la raíz cuadrada de

- un número entero positivo. Repensando la formación de los profesionales de la Educación: Libro de Actas del 1.er Congreso Caribeño de Investigación Educativa, Santo Domingo, República Dominicana. <https://doi.org/10.5281/zenodo.5593415>
- Torrecillas Sevilla, D. (2019). *Matemáticas: digitalizar 2º ESO*. [Trabajo Fin de Máster. Universidad Politécnica de Madrid].
- Vargas Vargas, N. A. (2020). Prototipos tecnológicos para la superación de dificultades Matemáticas en niños de secundaria, fundamentados en el aprendizaje basado en proyectos. *Libro de Actas del 1er Congreso Caribeño de Investigación Educativa*, 459-464.
- Vílchez Marín, M. (2015). *Propuesta de Unidad Didáctica: Números Enteros*. [Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada].
- Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. B. Moses (Ed.), Algebraic Thinking, Grades K-12, 328-340. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Zhang, M., Trussell, R. P., Gallegos, B., & Asam, R. R. (2015). Using math apps for improving student learning: An exploratory study in an inclusive fourth grade classroom. *Techtrends. Linking Research And Practice To Improve Learning*, 59(2), 32-39.

Legislación

- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, núm. 295, de 10 de diciembre de 2013. pp. 97858 a 97921. https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2013-12886
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín oficial del estado, 340, de 30 de diciembre de 2020. pp. 122868 a 122953. <https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3>
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín oficial del estado, 76, de 30 de marzo de 2022. pp. 41571 a 41789. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con>
- DECRETO 65/2022, de 20 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establecen para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín oficial de la Comunidad de Madrid, 176, de 26 de julio de 2022. pp. 316 a 796. <https://www.bocm.es/bocm-20220726-2>.