



**Universidad  
Europea**

**UNIVERSIDAD EUROPEA DE MADRID**

**ESCUELA DE ARQUITECTURA, INGENIERÍA Y  
DISEÑO**

**GRADO EN FÍSICA**

**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

**SOBRE LAS ESTRELLAS DE NEUTRONES  
CON MATERIA OSCURA**

**DIEGO GARCÍA TEJADA**

**Dirigido por**

**Dr. MIGUEL APARICIO RESCO**

**CURSO 2024-2025**

**TÍTULO:** SOBRE LAS ESTRELLAS DE NEUTRONES CON MATERIA OSCURA

**AUTOR:** DIEGO GARÍA TEJADA

**TITULACIÓN:** GRADO EN FÍSICA

**DIRECTOR DEL PROYECTO:** Dr. MIGUEL APARICIO RESCO

**FECHA:** junio 2025

## RESUMEN

En este trabajo de fin de grado estudiamos las propiedades que definen una estrella de neutrones con materia oscura (DANS) y cómo estas afectan a su estructura, principalmente a las curvas de Masa-Radio y perfiles de presión y densidad. Las DANS son estrellas de neutrones que debido a su elevado campo gravitatorio y larga vida, han conseguido acumular cantidades sustanciales de materia oscura en su interior. Modelizamos las DANS como una estrella formada por dos fluidos perfectos sin interacción entre sí más allá de la interacción gravitatoria, esto nos permite usar las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff de dos fluidos para calcular su solución hidrostática. La ecuación de estado que hemos utilizado para la materia bariónica es la de Hebeler *et al.* (2013) [1], mientras que la materia oscura la hemos modelizado como un gas ideal de Fermi completamente degenerado de espín 1/2.

Hemos encontrado que las DANS dependen de cuatro parámetros: su masa  $M$ , su fracción de materia oscura  $\lambda$  y las dos ecuaciones de estado usadas para describir cada componente de materia. Para partículas de materia oscura con masa  $m_\chi \sim 1 \text{ GeV}$  encontramos que aumentar la fracción de materia oscura (i.e. añadir materia oscura) resulta en una estrella más compacta. Dependiendo de  $m_\chi$ , la materia oscura se acumula de forma distinta: para masas grandes esta se acumula en forma de núcleos dentro de la DANS, mientras que para masas más ligeras tenemos una acumulación en halos de materia oscura. Dependiendo de como se acumule la materia oscura en la DANS, el efecto de compactar asociado a aumentar  $\lambda$  se puede ver fortificado en el caso de un núcleo o diluido en el caso de un halo. Finalmente, hemos encontrado que existe un valor máximo de la fracción de materia oscura ( $\lambda_{max}$ ) siempre que esta se almacene en forma de núcleo. Este valor depende de todos los parámetros de nuestro modelo y nos permite establecer una cantidad máxima teórica para cada DANS.

**Palabras clave:** Estrellas de Neutrones, Materia Oscura, Ecuaciones de Estado, Estructura estelar.

## ABSTRACT

In this undergraduate thesis we study the properties that define Dark matter Admixed Neutron Stars (DANS) and how they affect their structure, mainly their Mass-Radius relations and the profiles of pressure and mass. DANS are neutron stars that, due to their strong gravitational field and long life, have been able to capture a substantial amount of dark matter inside them. We model the DANS as a two-fluid star made up of two perfect fluids whose only interaction between them is gravitational. This approach allows us to use the two-fluid Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations to calculate the hydrostatic solution of the DANS. We describe the baryonic matter by using the Hebeler *et al.* (2013) equation of state [1], while we describe the dark matter as a completely degenerate ideal Fermi gas of spin 1/2.

We have found that DANS depend on four parameters: the mass  $M$ , the dark matter fraction  $\lambda$  and the two equations of state used for dark and baryonic matter. For particles of dark matter whose mass  $m_\chi \sim 1$  GeV, we have found that increasing  $\lambda$  (i.e. adding dark matter) leads to a more compact DANS. Depending on  $m_\chi$ , dark matter accumulates differently: If the mass is large then the matter accumulates as cores inside the DANS while for smaller masses we see an accumulation in the form of a dark matter halo. Depending on how the dark matter is distributed, the compacting effect associated with the increase of  $\lambda$  can be altered: in the case of a core the effect is heightened while for a halo it is reduced. Finally, we have found that there is a maximum value for the fraction of dark matter stored inside a DANS ( $\lambda_{max}$ ), only if the dark matter is stored as a core. The value of  $\lambda_{max}$  depends on all of the previously mentioned parameters, and it allows us to establish an upper bound for each DANS.

**Keywords:** Neutron Stars, Dark Matter, Equations of State, Stellar Structure

## AGRADECIMIENTOS

Hay demasiadas personas a las que me gustaría agradecer y demasiadas cosas que decirle a cada una ellas. A continuación mencionaré a las personas que más se merecen estar aquí aunque estas palabras no harán justicia al verdadero agradecimiento que siento por vosotros:

A Miguel, por ser el mejor tutor de TFG que podría haber deseado y uno de los mejores profesores que he tenido el placer de tener. No solo me ha tenido que aguantar durante tres duros años si no que cuando ya se pudo librar de ser mi profesor decidió que ser mi tutor sería una buena idea. Gracias a tus ideas, apoyo y reuniones he podido hacer este TFG, espero que este a tu altura.

A mis padres, porque sin ellos no podría estar aquí (literalmente: sois quienes me habéis pagado la universidad). Sois los mejores padres que cualquier hijo podría tener y vuestro apoyo y cariño es la mejor ayuda podría desear.

A Loreto (no me mencionaste en tu TFG, ahora te toca compartir párrafo) y Ana, por ser las personas que más me habéis ayudado en este mundo, si no fuera por vosotras no sería la persona que soy ahora. Habéis tenido que aguantar todos mis *yaps* sobre física por lo que sois las personas que más se merecen estar aquí.

Finalmente, a mis amigos que me han aguantado durante estos años: Jorge, Oscar, Spinetti, Silvia, Lara, Marquitos, Miguel Ángel y Mónica. Habéis hecho que las largas horas de transporte publico merecieran la pena solo por estar con vosotros en la universidad (algunos de vosotros incluso reducido ese tiempo).

*“Me pregunto si las estrellas se iluminan con el fin de que algún día, cada uno pueda encontrar la suya”*

Antoine de Saint-Exupéry

## TABLA RESUMEN

	<b>DATOS</b>
<b>Nombre y apellidos:</b>	Diego García Tejada
<b>Título del proyecto:</b>	Sobre las estrellas de neutrones con materia oscura
<b>Directores del proyecto:</b>	Dr. Miguel Aparicio Resco
<b>El proyecto se ha realizado en colaboración de una empresa o a petición de una empresa:</b>	NO
<b>El proyecto ha implementado un producto:</b>	NO
<b>El proyecto ha consistido en el desarrollo de una investigación o innovación:</b>	SI
<b>Objetivo general del proyecto:</b>	Estudiar las propiedades estructurales de las DANS, analizando los parámetros que las definen y observando cómo las variaciones en estos afectan a su estructura final.

## Lista de Acrónimos

- BE** Bose-Einstein. 12
- BH** Agujero Negro (Black Hole). 1
- BM** Materia Bariónica (Baryonic matter). 2, 3, 16, 24–38
- CMB** Fondo Cósmico de Microondas (cosmic microwave background). 2, 3
- DANS** Estrellas de Neutrones con Materia oscura (Dark matter Admixed Neutron Stars).  
3–5, 12, 15, 16, 22, 24–38
- DM** Materia Oscura (Dark Matter). 2, 3, 10, 12, 15, 16, 22–38
- EoS** Ecuación de Estado (Equation of State). 10, 12, 15, 18–22, 24–28, 30, 31, 33–38
- FD** Fermi-Dirac. 12, 13
- GIFCD** Gas Ideal de Fermi Completamente Degenerado. 13, 14, 18, 19, 22–26, 33, 35–38
- GR** Relatividad General (General Relativity). 1, 4, 5, 9, 15, 29, 36
- MB** Maxwell-Boltzman. 12
- MR** Masa-Radio. 17, 19, 21, 23, 27, 33, 35
- NS** Estrella de Neutrones (Neutron Star). 1–3, 10, 15, 16, 18–21, 24–28, 34, 36–38
- TFG** Trabajo de Fin de Grado. 3–5, 19, 22, 36–38
- TOV** Tolman-Oppenheimer-Volkoff. 10, 12, 15, 17, 25, 26, 29, 36, 37
- WD** Enana Blanca (White Dwarf). 1
- WIMPs** Partículas Masivas con Débil Interacción (Weakly Interacting Massive Particles).  
2, 22

## Índice de figuras

1.	Solución hidrostática de un modelo estelar de densidad constante ( $\rho_* = 5 \cdot 10^{-5} M_\odot/\text{km}^3$ ). (a) En rojo se muestran los valores de $p(r)$ y $m(r)$ calculados de manera numérica con DANTE.py, mientras que en negro se muestran los valores teóricos calculados con las ecuaciones 4.5 y 4.6. (b) Soluciones hidrostáticas de estrellas con diferente masa $M [M_\odot]$ . . . . .	17
2.	Curva de MR de una estrella de densidad constante ( $\rho_* = 5 \cdot 10^{-5} M_\odot/\text{km}^3$ ). . . . .	17
3.	Solución hidrostática de un modelo estelar formado por un GIFCD no relativista de neutrones. (a) Soluciones hidrostáticas de estrellas con diferente masa $M [M_\odot]$ . (b) Curva de MR. . . . .	18
4.	Ecuaciones de estado para una NS. En diferente color se presental los datos para diferentes durezas de la EoS. Las EoS “soft” y “stiff” representan los límites inferiores y superiores de rigidez, respectivamente. (a) Gráfica completa de la EoS. (b) Región de la EoS a altas densidades. . . . .	20
5.	Soluciones hidrostáticas para una NS con diferente rigidez y masa total $M = 1 [M_\odot]$ . El punto $r$ en el que la curva deja de ser mostrada indica el radio $R$ de la estrella. . . . .	20
6.	Curvas de MR de cada una de las EoS usadas para describir a las NS. . . . .	21
7.	(a) Comparación entre la ecuación de estado de un Gas Ideal de Fermi Completamente Degenerado relativista ( <i>exact</i> ), frente a la EoS de un GIFCD no relativista ( <i>NR</i> ), de masa $m_\chi = 1 [\text{GeV}]$ . (b) Comparación entre las soluciones hidrostáticas para estrellas, de diferente masa $M$ , formadas por materia oscura (GIFCD) relativista y no relativista de masa $m_\chi = 1 [\text{GeV}]$ . . . . .	23
8.	Curva de Masa-Radio para un modelo de estrellas de materia oscura, descrita como un Gas Ideal de Fermi Completamente Degenerado de masa $m_\chi = 1 [\text{GeV}]$ . En la figura se comparan los resultados obtenidos mediante la solución relativista $M(R)$ contra los obtenidos con la aproximación no relativista $M_{NR}(R)$ de la ecuación de estado. . . . .	23
9.	Soluciones hidrostáticas de DANS con una $M_\odot$ de BM y diferentes valores de fracción de DM $\lambda$ . En línea continua se muestra el perfil de presión de la BM $p_{BM}(r)$ , la línea discontinua y punteada ( <i>dash-dot</i> ) el perfil de la presión de la DM $p_{DM}(r)$ , y en línea discontinua el perfil de la masa total $m(r) = m_{BM}(r) + m_{DM}(r)$ . La EoS utilizada para la NS es la <i>middle</i> , mientras que $m_\chi = 1\text{GeV}$ . . . . .	25
10.	Soluciones hidrostáticas para DANS de masa total $M = 1 M_\odot$ con diferentes cantidades de DM. La cantidad de DM viene fijada por la fracción de DM $\lambda$ y cada color en la figura representa un diferente valor de $\lambda$ . Para calcular estos datos se ha usado la EoS <i>middle</i> y se ha tomado $m_\chi = 1 \text{GeV}$ . . . . .	26

11.	Curvas de Masa-Radio para DANS con diferentes fracciones de DM $\lambda$ . En diferente color se muestran las DANS que usan diferente EoS para modelizar la BM, mientras que los diferentes estilos de línea diferencian los valores de $\lambda$ . Para todas las curvas, la DM se ha modelizado como un GIFCD cuyas partículas tienen masa $m_\chi = 1$ GeV. . . . .	27
12.	Soluciones hidrostáticas para DANS de $M = 1 M_\odot$ y $\lambda = 0.3$ , con diferentes valores para la masa de la partícula de DM. La línea continua es el perfil de la presión de la DM $p_{DM}(r)$ , las líneas verticales discontinuas son los radios ( $R \equiv R_{BM}$ ) de la estrella, y la línea discontinua y punteada negra es el radio de una NS de $M = 1 M_\odot$ . Para simular la BM se ha usado la EoS <i>soft</i> . . . . .	28
13.	Soluciones hidrostáticas de DANS, de $M = 1 M_\odot$ , barriendo la fracción de presiones centrales, $\alpha$ . Cada color de línea indica los valores asociados a cada estrella de un $\alpha$ específico. Las líneas solidas indican el perfil de la presión de la BM ( $p_{BM}(r)$ ), las discontinuas punteadas indican la presión de la DM ( $p_{DM}(r)$ ) y las discontinuas el perfil de masa de DM ( $m_{DM}(r)$ ). Para describir la BM se ha usado la EoS <i>soft</i> y la masa de la partícula de DM es de $m_\chi = 1$ GeV. . . . .	30
14.	Soluciones de dos DANS de masa $M = 1 M_\odot$ , con $\alpha = 2$ (rojo) y $\alpha = 4$ (azul). El perfil de la presión de la DM ( $p_{DM}(r)$ ) se muestra con una línea continua, mientras que los perfiles de la masa total ( $m(r)$ ), masa de BM ( $m_{BM}(r)$ ), y masa de DM ( $m_{DM}(r)$ ), se muestran con líneas discontinuas, discontinuas punteadas y discontinuas con doble punto, respectivamente. Para describir la BM se ha usado la EoS <i>soft</i> y la masa de la partícula de DM es de $m_\chi = 1$ GeV. . . . .	31
15.	Dependencia de los valores máximos de la fracción de DM ( $\lambda_{max}$ ) en función de la masa de la partícula de DM ( $m_\chi$ ). En esta gráfica se calculan los valores de $\lambda_{max}$ para DANS de masa $M = 0.5 M_\odot$ (línea continua) y $M = 1.5 M_\odot$ (línea discontinua), con cada color indicando la EoS usada para describir la BM de la estrella. . . . .	32
16.	Soluciones hidrostáticas para DANS de masa total $M = 1 M_\odot$ dominadas por DM. Para calcular estos datos se ha usado la EoS <i>middle</i> y se ha tomado $m_\chi = 1$ GeV. . . . .	32
17.	Perfil de los valores de $m(r)$ para DANS con $M = 0.5 M_\odot$ , barriendo todos los valores de $\lambda$ . En líneas sólidas se muestran las soluciones en las que la DM de la DANS se acumula como núcleo, mientras que en líneas discontinuas se dibuja el caso de acumularse como halo. . . . .	33

## Índice

<b>Lista de Acrónimos</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetos compactos . . . . .	1
1.2. Estrellas de neutrones . . . . .	1
1.3. Materia Oscura . . . . .	2
1.4. Estrellas de neutrones con materia oscura . . . . .	3
<b>2. Objetivos</b>	<b>4</b>
2.1. Objetivo general . . . . .	4
2.2. Objetivos específicos . . . . .	4
<b>3. Fundamento Teórico</b>	<b>5</b>
3.1. Modelos estelares relativistas . . . . .	5
3.1.1. Métrica exterior de Schwarzschild . . . . .	7
3.1.2. Métrica interior y ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff . . . . .	8
3.1.3. Ecuación de TOV para varios fluidos . . . . .	10
3.2. Ecuaciones de estado . . . . .	12
3.2.1. Preludio a la mecánica estadística . . . . .	12
3.2.2. Ecuación de estado de un gas de Fermi completamente degenerado . . . . .	13
<b>4. Resolución Numérica de Modelos Estelares</b>	<b>15</b>
4.1. Construcción de un modelo estelar . . . . .	15
4.1.1. Integración numérica . . . . .	15
4.2. Estrellas de densidad constante . . . . .	16
4.3. Estrellas de EoS politrópica . . . . .	18
4.4. Estrellas de neutrones . . . . .	19
4.4.1. Ecuación de estado . . . . .	19
4.4.2. Estudio de la rigidez . . . . .	20
4.4.3. Curva de Masa-Radius . . . . .	21
4.5. Estrellas de materia oscura . . . . .	22
4.5.1. Modelo de materia oscura y su ecuación de estado . . . . .	22
4.5.2. Efectos relativistas de la EoS . . . . .	22
4.5.3. Curva de Masa-Radius . . . . .	23
4.6. Estrellas de dos fluidos y DANS . . . . .	24
4.6.1. Parámetros $\alpha$ y $\lambda$ . . . . .	24
4.6.2. Efectos de añadir DM a una NS . . . . .	24

---

<b>5. Propiedades de las DANS: Resultados y Discusión</b>	<b>26</b>
5.1. Reducción de la rigidez de la DANS . . . . .	26
5.2. Curvas de Masa-Radius . . . . .	27
5.3. Efectos de la masa de materia oscura en la distribución de materia . . . . .	28
5.4. Cantidad máxima de Materia Oscura en las DANS . . . . .	30
5.4.1. Barrido de los valores de $\alpha$ . . . . .	30
5.4.2. Dependencia de $\lambda_{max}$ en función de $m_\chi$ . . . . .	31
5.5. Discusión de los resultados . . . . .	33
<b>6. Conclusiones</b>	<b>36</b>
<b>7. Futuras líneas de Trabajo</b>	<b>38</b>
<b>Referencias</b>	<b>39</b>

## 1. Introducción

El estudio de la estructura estelar es un área de la física que integra varios conceptos físicos como son la gravitación, física nuclear e hidrodinámica. Lo que convierte a este área de la astrofísica en un campo de gran interés académico y de investigación. Entre las estrellas más estudiadas, uno de los subgrupos de mayor interés es el de los objetos compactos.

### 1.1. Objetos compactos

Los objetos compactos son cuerpos astronómicos en los que los efectos relativistas son relevantes [2]. Cuando se habla de objetos compactos los astrofísicos se suelen referir a una Enana Blanca (White Dwarf) (WD), una Estrella de Neutrones (Neutron Star) (NS) o un Agujero Negro (Black Hole) (BH) [3]. La formación de estos cuerpos ocurre tras el consumo de todo el combustible nuclear de una estrella convencional la cual, dependiendo de su masa, se convierte en uno de estos objetos compactos [4–6].

Los objetos compactos difieren de las estrellas convencionales en cómo mantienen su equilibrio. Mientras que una estrella convencional contrarresta la presión de la gravedad mediante las reacciones de fisión nuclear, los objetos compactos deben su estabilidad a mecanismos más complejos. Las WD y las NS mantienen su estructura gracias a la presión de degeneración de electrones y neutrones respectivamente, recibiendo así el nombre de estrellas degenerada [5]. Los BH, sin embargo, no tienen estructura, son estrellas totalmente colapsadas que acumulan toda su masa en un único punto al que llamamos singularidad [2, 4].

### 1.2. Estrellas de neutrones

Otra diferencia que hace interesantes a los objetos compactos es su gran densidad en comparación a estrellas convencionales de su misma masa [5]. En especial, las NS son las estrellas conocidas con mayor densidad [3], dándonos a entender que son el último paso en el colapso de los objetos masivos antes de llegar a los BH [4, 5]. Estas características hacen de las NS excelentes entornos para comprobar nuestro entendimiento de física de altas energías y gravitación, sirviendo como un laboratorio astrofísico para estudiar los estados de materia más exóticos, los cuáles son irreproducibles en la Tierra [7].

Debido a la necesidad de Relatividad General (General Relativity) (GR) para estudiar los efectos gravitatorios de los objetos compactos, en 1939 Tolman, Oppenheimer y Volkoff estudiarían la curvatura del espacio-tiempo generado por un objeto compacto simétrico, llegando así a la ecuación de equilibrio hidrostático de GR, también conocida como ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [8, 9]. En especial Oppenheimer y Volkoff estudiaron el equilibrio de un fluido de neutrones modelizado como un Gas Ideal de Fermi Completamente Degenerado, siendo este el primer modelo teórico de las NS [9].

Desde 1939, avances en la teoría que describe la materia a tan altas energías y medidas de NS han conducido la necesidad de actualizar ese modelo de NS por uno que concuerde con las medidas astrofísicas [10]. Las medidas experimentales actuales nos dicen que la masa de las NS tienen que estar entre  $0.77 M_{\odot}$  [11] y  $2.072 M_{\odot}$  [12], mientras que los radios están entre 10 km [11] y 13.02 km [13]. El problema es que, como se comentó anteriormente, en las NS las densidades son tan elevadas que aún no se tiene un modelo comúnmente aceptado para describir la ecuación de estado de una estrella de neutrones NS [1, 14].

### 1.3. Materia Oscura

Simultáneamente a todo este estudio de estructura estelar, medidas de la velocidad de dispersión de galaxias en el cúmulo de Coma [15], las curvas de rotación de galaxias [16] y medidas del Fondo Cósmico de Microondas (cosmic microwave background) (CMB) [17] nos han mostrado la necesidad de la Materia Oscura (Dark Matter) (DM) para poder entender nuestro universo [18], haciendo de la DM otro tema de gran interés de la física moderna.

Gracias a las medidas de la colaboración Planck, sabemos que originalmente nuestro universo era un 20 % de DM [17–19]. Aunque hayamos encontrado evidencias de su existencia, las propiedades de la DM son aún un misterio y actualmente hay varios candidatos para explicarla. Sin entrar en detalle en las características de cada uno, los principales candidatos son Partículas Masivas con Débil Interacción (Weakly Interacting Massive Particles) (WIMPs), gravitinos, neutrinos estériles y axiones, todos de ellos candidatos de partículas de DM [18].

Medir las características de la DM es un reto global que cuenta con diferentes experimentos internacionales trabajando en encontrar más información sobre estas. Los experimentos se pueden dividir en cuatro tipos dependiendo de como intentan medir la DM [18].

- **Medición Directa.** Miden interacciones directas entre DM y Materia Bariónica (Baryonic matter) (BM). El principal experimento en esta categoría es DAMA/LIBRA, el cual usa cristales de NaI(Tl) y afirma haber encontrado evidencia de partículas DM en el halo galáctico [20]. Aunque hay experimentos como ANAIS-112 que usan el mismo montaje y aún no han podido confirmar los resultados de DAMA/LIBRA [21].
- **Medición indirecta.** Miden procesos de decaimiento de DM en partículas del modelo estándar (BM) como fotones o neutrinos. Este tipo de experimentos esencialmente son telescopios de rayos gamma como el caso de Fermi-LAT [22] o telescopios de neutrinos como ICECUBE [23] o KM3NeT [24].
- **Colisionadores de partículas.** Buscan generar partículas de DM mediante la colisión a altas energía de partículas de BM. El único colisionador que puede llegar a

conseguir esto es el LHC [18] aunque aún no ha habido evidencias de la generación y detección de materia oscura mediante este método.

- **Mediciones cosmológicas.** Buscan medir efectos de la DM en la estructura del universo y delimitar sus propiedades. El principal experimento dedicado a esto es el satélite Planck [17] pero también telescopios como Euclid pueden generar nuevos datos de fuentes diferentes al CMB [25].

#### 1.4. Estrellas de neutrones con materia oscura

Recientemente, las NS han captado la atención por ser buenos candidatos para el estudio de la DM [7]. Gracias a su gran campo gravitatorio y su larga vida ( $10^{10}$  años) [7] se espera que las NS, a medida que orbitan los núcleos galácticos donde la densidad de DM es mayor, capturen esta DM [26] formando un sistema de dos fluidos, al cual denominamos como Estrellas de Neutrones con Materia oscura (Dark matter Admixed Neutron Stars) (DANS) [7, 27–29].

Actualmente las DANS son únicamente estrellas teóricas ya que no se ha podido confirmar la medición de una, aunque se espera que NS como HESS J1731-347 puedan ser DANS [30]. Debido a la incertidumbre de las ecuaciones de estado de la BM y la naturaleza desconocida de la DM, los modelos de DANS cuentan con varios grados de libertad, resultando en modelos diferentes para describir las DANS.

El modelo teórico para el estudio de las DANS es una ampliación de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff que incluye dos fluidos perfectos sin interacción, en vez de uno para el caso original [7]. Aunque el fundamento teórico sea bien conocido, el problema surge en definir las ecuaciones de estado de la BM y la DM debido a que aún no sabemos cómo se comporta la BM en densidades tan elevadas [14] y que aún no se sabe el modelo exacto para describir la DM [18].

Este Trabajo de Fin de Grado (TFG) contribuye a este área de investigación mediante el desarrollo e implementando un marco computacional para resolver las ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff de dos fluidos y explorando la estructura de las DANS en función de sus grados de libertad. El objetivo es comprender mejor los parámetros que afectan a la estructura de las DANS e identificar posibles observables que puedan restringir las propiedades de la DM mediante la observación de objetos compactos.

## 2. Objetivos

En este capítulo se presentan de forma explícita los objetivos de este TFG. Estos principalmente estarán adaptados del anteproyecto presentado para la asignación de TFG. Debido a los resultados obtenidos, se ha tenido que añadir y reformular los objetivos originales para reflejar esta información.

### 2.1. Objetivo general

El objetivo principal del presente TFG es estudiar las propiedades estructurales de las estrellas de neutrones con materia oscura (DANS), analizando los parámetros que las definen y observando cómo las variaciones en estos afectan a su estructura final.

### 2.2. Objetivos específicos

Los objetivos específicos son hitos concretos necesarios para el desarrollo de este TFG y para el cumplimiento del objetivo general. La mayoría de estos objetivos están relacionados con la obtención de herramientas teóricas o computacionales usadas para el estudio de las DANS.

- **Deducir la ecuación de TOV:** Usando el formalismo de la GR deduciremos la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.
- **Crear un programa de integración numérica:** Este programa usa un método de Runge-Kutta de 4º orden para resolver las ecuaciones TOV. Este código se usará para todos los cálculos numéricos resultando en el software DANTE.py.
- **Encontrar las curvas de masa-radio de estrellas de neutrones:** Revisando la literatura, encontrar una ecuación de estado (EoS) para la materia bariónica y usarla junto el programa numérico para calcular las curvas de M-R.
- **Encontrar la EoS para la materia oscura:** Trataremos la materia oscura como un gas ideal de Fermi completamente degenerado. Con mecánica estadística, calcularemos la EoS de ese gas.
- **Deducir las ecuaciones de TOV para dos fluidos:** Asumiendo que el sistema está formado por dos fluidos perfectos sin interacción, usaremos el formalismo de la GR para calcular las nuevas ecuaciones de TOV.
- **Construir un modelo de DANS:** Juntando las EoS de la estrella de neutrones y materia oscura podemos usar las ecuaciones de TOV para dos fluidos para modelizar las DANS.

### 3. Fundamento Teórico

En este capítulo presentaremos las herramientas teóricas necesarias para el desarrollo de este TFG. En primer lugar, calcularemos las ecuaciones esenciales para construir un modelo estelar dentro del marco de la GR. Después, calcularemos las ecuaciones de estado que rigen el comportamiento de la materia que compone nuestras DANS.

#### 3.1. Modelos estelares relativistas

Partamos de la métrica para un espacio-tiempo estático y con simetría esférica<sup>1</sup> [2,4,31,32]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.1)$$

Como queremos encontrar la métrica para nuestro modelo estelar, la métrica (Eq. 3.1) deberá cumplir las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

donde se están usando unidades de  $c = 1$ ,  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein (Eq. 3.3) y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento.

Las ecuaciones de Einstein se pueden reescribir de forma equivalente a la ecuación 3.2 [4,33], tal que

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (3.4)$$

Esta expresión, aunque sea idéntica a la de la ecuación 3.2 presenta la ventaja que para el caso en el que estemos fuera de la estrella,  $T_{\mu\nu} = 0$ , las ecuaciones de Einstein pasan a ser

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.5)$$

Las ecuaciones de Einstein nos permiten saber cómo la materia afecta a la curvatura del espacio-tiempo, generando así el efecto que percibimos como gravedad. Aparte de esto, el hecho de que la ecuación sea una igualdad implica que la afirmación anterior se puede invertir, haciendo que la ecuación nos diga cómo la curvatura afecta a la materia. Esto nos permite obtener una ecuación de equilibrio hidrostático para un sistema sometido a la gravedad.

Dada la ecuación 3.1 podemos calcular sus curvas geodésicas usando las ecuaciones de Euler-Lagrange [33]:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>La deducción de esta expresión se puede encontrar en [2,4].

donde  $\tau$  es el tiempo propio de la trayectoria,  $x^\mu$  son las coordenadas  $(t, x, y, z)$  y  $L$  se define como

$$L = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -e^{2\Phi(r)}\dot{t}^2 + e^{2\Lambda(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2. \quad (3.7)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (Eq.3.6), tenemos que las curvas geodésicas son

$$\ddot{t} + 2\partial_r\Phi\dot{r}\dot{t} = 0, \quad (3.8)$$

$$\ddot{r} + \partial_r\Lambda\dot{r}^2 + e^{2(\Phi-\Lambda)}\partial_r\Phi\dot{t}^2 - re^{-2\Lambda}\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta e^{-2\Lambda}\dot{\phi}^2 = 0, \quad (3.9)$$

$$\ddot{\theta} + 2\frac{1}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0, \quad (3.10)$$

$$\ddot{\phi} + 2\frac{1}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\phi}\dot{\theta} = 0. \quad (3.11)$$

Comparando estas ecuaciones con la ecuación geodésica en su forma general (Eq. 3.12), podemos sacar que los símbolos de Christoffel serán los de la ecuación 3.13.

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0. \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \partial_r\Phi & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r\Lambda & \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\Phi-\Lambda)}\partial_r\Phi \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2\Lambda} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r\sin^2\theta e^{-2\Lambda} & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta\cos\theta & \Gamma_{\phi r}^\phi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dados estos símbolos de Christoffel, las únicas componentes del tensor de Ricci no nulas serán

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2(\Phi-\Lambda)} \left[ \partial_r^2\Phi + (\partial_r\Phi)^2 - \partial_r\Phi\partial_r\Lambda + \frac{2}{r}\partial_r\Phi \right] \\ R_{rr} &= \partial_r\Phi\partial_r\Lambda - \partial_r^2\Phi - (\partial_r\Phi)^2 + \frac{2}{r}\partial_r\Lambda \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\Lambda} [r(\partial_r\Lambda - \partial_r\Phi) - 1] + 1 \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Finalmente, podemos calcular el escalar de curvatura de esta métrica,

$$R = -2e^{-2\Lambda} \left[ \partial_r^2\Phi + (\partial_r\Phi)^2 - \partial_r\Phi\partial_r\Lambda + \frac{2}{r}(\partial_r\Phi - \partial_r\Lambda) + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\Lambda}) \right]. \quad (3.15)$$

Con las ecuaciones 3.14 y 3.15 ya tenemos toda la información de la curvatura calculada, lado izquierdo de la ecuación de Einstein (Eq. 3.2). A continuación, dividiremos el espacio en dos regiones, el interior y el exterior de la estrella, y resolveremos las ecuaciones de Einstein para cada una de ellas.

### 3.1.1. Métrica exterior de Schwarzschild

Como nos encontramos en el vacío, podemos hacer uso de las ecuaciones de Einstein para  $T_{\mu\nu} = 0$  (Eq. 3.5). El primer paso para resolver estas ecuaciones es ver que  $R_{tt}$  y  $R_{rr}$  tienen un gran parecido por lo que podemos escribir

$$e^{2(\Lambda-\Phi)}R_{tt} + R_{rr} = 0 \Rightarrow \frac{2}{r}(\partial_r\Phi - \partial_r\Lambda) = 0, \quad (3.16)$$

siempre que ambas componentes tiendan a 0 de forma independiente [4], lo cual se cumple.

La solución de la ecuación 3.16 implica que  $\Phi = -\Lambda + C$ , donde  $C$  es una constante. Esta constante se puede igualar a 0, sin pérdida de generalidad, haciendo el siguiente cambio de coordenadas  $t \rightarrow e^{-C}t$  [4]. Haciendo dicho cambio, tendremos que

$$\Phi = -\Lambda. \quad (3.17)$$

Igualando  $R_{\theta\theta}$  a 0 y usando la condición anterior tendremos que

$$e^{2\Phi}(2r\partial_r\Phi + 1) = \partial_r(re^{2\Phi}) = 1. \quad (3.18)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, tendremos

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{R_S}{r}, \quad (3.19)$$

donde  $R_S$  es una constante por determinar. Usando las ecuaciones 3.19 y 3.17 la métrica general (Eq. 3.1), se convierte en

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.20)$$

Esta métrica debe cumplir dos condiciones: Para  $r \rightarrow \infty$  debemos obtener la métrica del espacio plano, algo que se obtiene independientemente del valor de  $R_s$ , y que la métrica sea consistente con el límite no relativista [4, 33]. Para ello, tenemos que

$$R_S = 2GM \quad (3.21)$$

donde  $R_S$  se le conoce como el radio de Schwarzschild ( $R_s$ ). Recordemos que la ecuación 3.21 está escrita en unidades de  $c = 1$ ,  $G$  es la constante gravitatoria, y  $M$  la masa Newtoniana de la estrella.

Sustituyendo la definición de la ecuación 3.21 en la métrica exterior (Eq. 3.20), obtenemos la conocida métrica de Schwarzschild.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.22)$$

Aunque originalmente Karl Schwarzschild propuso la métrica anterior para la solución de una masa puntual [34], acabamos de ver que esta métrica también es la solución exterior

para una estrella con volumen y masa  $M^2$ . Además, haciendo uso del teorema de Birkhoff, podemos asegurar que la métrica de Schwarzschild (Eq. 3.22) es la única solución para el vacío, para un sistema con simetría esférica [4].

### 3.1.2. Métrica interior y ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Para la métrica interior buscamos la solución en presencia de materia y energía (Eq. 3.2), es decir, tenemos que tener en cuenta el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$ . Usando la definición del tensor de Einstein (Eq. 3.3) y las ecuaciones 3.14 y 3.15,

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{1}{r^2} e^{2(\Phi-\Lambda)} (2r\partial_r\Lambda - 1 + e^{2\Lambda}) \\ G_{rr} &= \frac{1}{r^2} (2r\partial_r\Phi + 1 - e^{2\Lambda}) \\ G_{\theta\theta} &= r^2 e^{-2\Lambda} \left[ \partial_r^2\Phi + (\partial_r\Phi)^2 - \partial_r\Phi\partial_r\Lambda + \frac{1}{r} (\partial_r\Phi - \partial_r\Lambda) \right] \\ G_{\phi\phi} &= \sin^2\theta G_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para modelar la materia de nuestra estrella usaremos el tensor de energía-momento de un fluido perfecto [4].

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.24)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $p$  es la presión del fluido y  $u_\mu$  su cuadrivelocidad.

Si movemos nuestro sistema de referencia a uno comovil con el fluido, la cuadrivelocidad de este pasará a ser

$$u_\mu = (e^\Phi, 0, 0, 0), \quad (3.25)$$

por lo que las componentes del tensor de energía-momento en el sistema comovil serán

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \rho e^{2\Phi} \\ T_{rr} &= p e^{2\Lambda} \\ T_{\theta\theta} &= p r^2 \\ T_{\phi\phi} &= p r^2 \sin^2\theta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dadas las ecuaciones 3.23 y 3.26, tendremos cuatro ecuaciones de Einstein (Eq. 3.2). Pero solo tres de estas serán independientes, ya que la componente  $(\phi\phi)$  es directamente proporcional a la  $(\theta\theta)$  con un factor de  $\sin^2\theta$ . La ecuación que viene de la componente  $tt$  será

$$\frac{1}{r^2} e^{-2\Lambda} (2r\partial_r\Lambda - 1 + e^{2\Lambda}) = 8\pi G\rho, \quad (3.27)$$

la componente  $(rr)$

$$\frac{1}{r^2} e^{-2\Lambda} (2r\partial_r\Phi + 1 - e^{2\Lambda}) = 8\pi Gp, \quad (3.28)$$

<sup>2</sup>Se puede hacer un símil con el electromagnetismo en el cual una carga puntual y una esfera con la misma carga generan el mismo campo eléctrico externo.

y la componente  $(\theta\theta)$ ,

$$e^{-2\Lambda} \left[ \partial_r^2 \Phi + (\partial_r \Phi)^2 - \partial_r \Phi \partial_r \Lambda + \frac{1}{r} (\partial_r \Phi - \partial_r \Lambda) \right] = 8\pi G p. \quad (3.29)$$

Motivados por la solución exterior, hacemos el siguiente cambio de variable

$$m(r) = \frac{1}{2G} (r - r e^{-2\Lambda}) \Leftrightarrow e^{2\Lambda} = \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1}. \quad (3.30)$$

Esto hace que el elemento  $g_{rr}$  sea parecido al de la métrica de Schwarzschild (Eq. 3.22), solo que ahora  $M$  es una función a determinar y dependiente de  $r$  ( $m(r)$ ).

$$g_{rr} = e^{2\Lambda(r)} = \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1}. \quad (3.31)$$

Dado este cambio de variable, la ecuación 3.27 se simplifica en

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2. \quad (3.32)$$

A continuación, integramos esta ecuación. Para ello consideramos que la estrella tiene radio  $R$  y a partir de este punto tendremos vacío  $\rho = 0$  y la solución exterior (Eq. 3.22). Esto nos dice que para que la métrica interior y exterior sean iguales en  $r = R$  se debe cumplir

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr, \quad (3.33)$$

donde  $M$  es la masa newtoniana que encontramos en la métrica de Schwarzschild. Es importante comentar que esta masa es la masa que mediríamos teniendo en cuenta sus efectos gravitatorios. Sin embargo esta masa  $M$  no es la masa en reposo de todas las componentes que forman la estrella ( $\bar{M}$ ), si no que encontramos que es menor (Eq. 3.34). Esto se debe a que al estar en GR tenemos efectos relativistas<sup>3</sup>. En este caso, el hecho de que la estrella esté ligada de forma gravitatoria nos dice que el sistema ligado es más estable (menos energía/masa) por lo que la diferencia entre  $\bar{M}$  y  $M$  será esa energía de ligadura gravitatoria (Eq. 3.34) [2, 4].

$$E_B = \bar{M} - M > 0. \quad (3.34)$$

Usando el cambio de variable (Eq. 3.30) en la ecuación 3.28 obtenemos

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{4\pi G r^3 p(r) + Gm(r)}{r [r - 2Gm(r)]}. \quad (3.35)$$

Esta ecuación diferencial nos permite calcular la componte  $(tt)$  de la métrica pero antes, deberemos saber cual es la ecuación que gobierna  $p(r)$ . Para ello, hagamos uso de la conservación del tensor de energía-momento  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

<sup>3</sup>Se puede hacer un símil con física nuclear, donde vemos que el núcleo pesa menos que la suma de las masas en reposo de sus componentes debido al efecto de ligadura de la fuerza nuclear fuerte.

Esta ecuación de conservación se simplifica en nuestro caso simétrico, ya que solo la tendremos que calcular para  $\nu = r$ , la cual culmina en

$$(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \quad (3.36)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación 3.36, llegamos a

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{4\pi Gr^3 p(r) + Gm(r)}{r[r - 2Gm(r)]}. \quad (3.37)$$

Esta es la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [8,9] o también denominada ecuación de equilibrio hidrostático. Esta ecuación nos permite relacionar la evolución radial de  $p$  con la de  $\rho$ , por lo que si tenemos una Ecuación de Estado (Equation of State) (EoS)  $p = p(\rho)$  que describa nuestro fluido, tendremos la herramienta principal para calcular la estructura de las estrellas relativistas [2,4].

### 3.1.3. Ecuación de TOV para varios fluidos

A continuación, resolveremos la métrica interior, como en la sección anterior, pero ahora considerando un fluido con dos componentes: una correspondiente a la NS y otra a la DM. Aunque para mantener generalidad en la deducción los llamaremos fluidos  $A$  y  $B$ .

Al igual que en la sección anterior, partamos de la métrica genérica (Eq. 3.1) con el cambio de variable (Eq. 3.30) ya realizado

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.38)$$

donde  $\Phi(r)$  es el potencial gravitatorio [2] y  $m(r)$  será la masa-energía en ese radio  $r$ . Debido a que la métrica (Eq. 3.38) es la misma que tenemos en el caso de un fluido, una vez hecho el cambio de la ecuación 3.30, el tensor de Einstein será el mismo del caso anterior (Eq. 3.23).

La diferencia entre ambas deducciones se encontrará en el Tensor de energía-momento. Ahora el tensor estará formado por dos fluidos perfectos [7,35,36]. El fluido  $A[B]$  tendrá densidad  $\rho_A[\rho_B]$ , presión  $p_A(p_B)$  y cuadrivelocidad  $u_\mu[v_\mu]$  y su tensor de energía-momento será  $T_{\mu\nu}^A[T_{\mu\nu}^B]$ . Considerando todo esto, el tensor de energía-momento total será

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^A + T_{\mu\nu}^B = (\rho_A + p_A)u_\mu u_\nu + p_A g_{\mu\nu} + (\rho_B + p_B)v_\mu v_\nu + p_B g_{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

Este desarrollo se hará considerando lo siguiente:

- Los fluidos  $A$  y  $B$  son perfectos y no interactúan entre sí (excepto gravitacionalmente). Es por esto que la ecuación 3.39 es la suma de cada uno de los tensores de energía-momento y no hay ninguna componente cruzada.

- Consideramos que ambos fluidos comparten un sistema comovil. Esto lo motivamos diciendo que en nuestro modelo ambos fluidos están en equilibrio con respecto del otro. Esta consideración implica que

$$u_\mu = v_\mu = (e^\Phi, 0, 0, 0). \quad (3.40)$$

Con estas consideraciones, las componentes del tensor de energía-momento en el sistema comovil serán

$$\begin{aligned} T_{tt} &= (\rho_A + \rho_B) e^{2\Phi} \\ T_{rr} &= (p_A + p_B) \left[ 1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1} \\ T_{\theta\theta} &= (p_A + p_B) r^2 \\ T_{\phi\phi} &= (p_A + p_B) r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Véase que en nuestro modelo, el tensor de energía-momento resultante (Eq. 3.41) es idéntico al de un único fluido (Eq. 3.26), el cambio es  $\rho \rightarrow \rho_A + \rho_B$  y  $p \rightarrow p_A + p_B$ . Haciendo uso de esto, podemos partir de la ecuación 3.27 y llegar a

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi (\rho_A + \rho_B) r^2. \quad (3.42)$$

La ecuación 3.42 nos dice como varía la masa en función de las densidades de ambos fluidos. La expresión nos permite ver que la masa será la suma simple de ambos, algo que cabe esperar ya que tenemos que los dos fluidos no interactúan entre sí.

Entonces, la masa total  $M$  de la estrella será

$$M = 4\pi \left( \int_0^{R_A} \rho_A r^2 dr + \int_0^{R_B} \rho_B r^2 dr \right), \quad (3.43)$$

donde  $R_A$  y  $R_B$  se obtendrán integrando las respectivas ecuaciones de equilibrio hidrostático, y se corresponderán a los radios que delimiten la presencia de sus respectivos fluidos.

Usemos ahora la ecuación 3.28 para calcular una expresión equivalente a la ecuación 3.35. Haciendo esto con el cambio a dos fluido llegamos a que la variación radial de potencial gravitatorio será

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{4\pi G r^3 [p_A(r) + p_B(r)] + Gm(r)}{r [r - 2Gm(r)]}. \quad (3.44)$$

Como los fluidos no interactúan entre sí, la conservación del tensor de energía momento ( $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ) se puede separar en dos, una para cada fluido. Cada una de las ecuaciones de conservación nos dará una ecuación que relacione  $p'_{A(B)}$  con  $\Phi'$ , similar a la ecuación 3.36,

$$\nabla_\mu T_A^{\mu\nu} (\nu = r) = 0 \Rightarrow \frac{dp_A}{dr} = -(\rho_A + p_A) \frac{d\Phi}{dr}, \quad (3.45)$$

$$\nabla_{\mu} T_B^{\mu\nu}(\nu = r) = 0 \Rightarrow \frac{dp_B}{dr} = -(\rho_B + p_B) \frac{d\Phi}{dr}. \quad (3.46)$$

Sustituyendo la ecuación 3.44 en las ecuaciones anteriores llegamos a

$$\frac{dp_A}{dr} = -(\rho_A + p_A) \frac{4\pi Gr^3(p_A + p_B) + Gm(r)}{r[r - 2Gm(r)]}, \quad (3.47)$$

$$\frac{dp_B}{dr} = -(\rho_B + p_B) \frac{4\pi Gr^3(p_A + p_B) + Gm(r)}{r[r - 2Gm(r)]}. \quad (3.48)$$

Las ecuaciones 3.47 y 3.48 son las ecuaciones de TOV para los fluidos  $A$  y  $B$  respectivamente. Este conjunto de ecuaciones diferenciales definen las ecuaciones de equilibrio hidrostático para una estrella compuesta por dos fluidos perfectos en mutuo equilibrio. Si a este sistema de ecuaciones le añadimos la ecuación 3.42 y las EoS para cada uno de los fluidos, podremos calcular los radios  $R_A$  y  $R_B$ , y la masa  $M$  para una estrella de dos fluidos [28].

## 3.2. Ecuaciones de estado

En esta sección usaremos los conceptos de la mecánica estadística relativista para calcular la EoS de un gas de partículas. Esto lo haremos con el objetivo de poder usar estos resultados para describir la EoS de la DM de nuestro modelo de DANS.

### 3.2.1. Preludio a la mecánica estadística

La mecánica estadística nos permite definir una función  $f(E)$ , la cual da la distribución de partículas a los largo de los niveles de energía [37] del sistema. La función de distribución depende del tipo de partícula en el que estemos trabajando. Para un gas ideal, la función tiene la forma

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{K_B T}} \pm 1}, \quad (3.49)$$

donde el signo  $+$  se aplica en el caso de fermiones, estadística de Fermi-Dirac (FD), y el signo  $-$  en el caso de bosones, estadística de Bose-Einstein (BE)) [5, 37–40].

Para densidades bajas y temperaturas suficientemente altas esta función [5, 37], independientemente de la estadística que usemos, se puede reducir a

$$f(E) = e^{-\frac{E-\mu}{K_B T}}. \quad (3.50)$$

Siendo esta la distribución de Maxwell-Boltzman (MB) aplicada para sistemas clásicos [5, 37, 40].

Como trabajamos con partículas relativistas, es conveniente integrar el momento en vez de la energía. Eso lo podemos conseguir usando la definición de energía relativista

$$E^2 = m_{\chi}^2 + k^2, \quad (3.51)$$

donde  $E$  es la energía de una partícula con masa  $m$  y momento  $k$ , como cambio de variable para hacer  $f(E) \rightarrow f(k)$ .

Integrando esta ecuación sobre todos los momentos posibles, podemos calcular el número de partículas por unidad de volumen como

$$n = \int \frac{gf}{h^3} d^3k, \quad (3.52)$$

donde  $f$  es la función de distribución,  $g$  nos indica la degeneración de las partículas ( $g = 2s + 1$ , donde  $s$  es el espín), y  $h$  es la constante de Planck [5].

La densidad de energía  $\rho$ , será la suma de todas las partículas con energía  $E$  (eq. 3.51) por la cantidad de partícula con dicha energía [5, 37], es decir

$$\rho = \int E \frac{gf}{h^3} d^3k. \quad (3.53)$$

Finalmente, la presión de un sistema con una distribución isotrópica de momento, la presión mecánica del gas vendrá dada por

$$p = \frac{g}{3h^3} \int kvf d^3k, \quad (3.54)$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula, la cual se obtiene como  $k/E$  [5, 38].

### 3.2.2. Ecuación de estado de un gas de Fermi completamente degenerado

Si tenemos un Gas Ideal de Fermi Completamente Degenerado (GIFCD), el potencial químico pasa a conocerse como energía de Fermi ( $E_F$ ) y la función de distribución de FD se convierte en [5, 37–40]

$$f(E) = \begin{cases} 1, & E \leq E_F \\ 0, & E \geq E_F \end{cases}. \quad (3.55)$$

Introduciendo esto en las ecuaciones 3.52, 3.53 y 3.54, y usando coordenadas esféricas para integrar el módulo del momento. Llegamos a que la densidad de partículas es

$$n = \int_0^{k_F} \frac{g}{h^3} 4\pi k^2 dk \Rightarrow n = \frac{8\pi k_F^3}{3h^3} = \frac{8\pi m_\chi^3 \xi_F^3}{3h^3}, \quad (3.56)$$

donde hemos realizado los siguientes cambios: En primer lugar, hemos asumido que las partículas de nuestro gas son de espín 1/2, por lo que su degeneración es  $g = 2$ . En segundo lugar, hemos usado la magnitud adimensional  $\xi = k/m_\chi$  [5, 38, 39]. Esta magnitud nos da el grado de relatividad de la partícula. Si  $\xi \ll 1$ , el término de la masa en la ecuación 3.51 gana al momento, mientras que si  $\xi \gg 1$ , el momento gana, haciendo que la partícula tenga efectos relativistas [5].

Con estos cambios en mente, la presión será [5, 39]

$$p = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_\chi^2}} = \frac{\pi m_\chi^4}{h^3} \phi(\xi_F), \quad (3.57)$$

$$\phi(\xi_F) = \sqrt{1 + \xi_F^2} \left( \frac{2}{3} \xi_F^3 - \xi_F \right) + \ln \left( \xi_F + \sqrt{1 + \xi_F^2} \right). \quad (3.58)$$

Mientras que la densidad de energía será [5, 39]

$$\rho = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{k_F} \sqrt{m_\chi^2 + k^2} k^2 dk = \frac{\pi m_\chi^4}{h^3} \psi(\xi_F), \quad (3.59)$$

$$\psi(\xi_F) = \sqrt{1 + \xi_F^2} (2\xi_F^3 + \xi_F) - \ln \left( \xi_F + \sqrt{1 + \xi_F^2} \right). \quad (3.60)$$

Con las ecuaciones 3.57 y 3.59 podemos obtener la ecuación de estado para este GIFCD de forma paramétrica, en función de  $\xi_F$ . Si queremos obtener una expresión directa del tipo  $P(\rho)$ , tendremos que utilizar los límites no-relativistas y cuasi-relativistas.

Expandiendo las funciones 3.58 y 3.60 entorno a  $\xi_F \sim 0$ ,

$$\phi(\xi_F) \approx \frac{5\xi_F^5}{15} - \frac{4\xi_F^7}{21} + \frac{\xi_F^9}{9} - \frac{5\xi_F^{11}}{66} + \frac{35\xi_F^{13}}{624} - \frac{7\xi_F^{15}}{160} + \frac{77\xi_F^{17}}{2176} - \frac{143\xi_F^{19}}{4864} + \dots, \quad (3.61)$$

$$\psi(\xi_F) \approx \frac{8\xi_F^3}{3} + \frac{4\xi_F^5}{5} - \frac{\xi_F^7}{7} + \frac{\xi_F^9}{18} - \frac{5\xi_F^{11}}{176} + \frac{7\xi_F^{13}}{416} - \frac{7\xi_F^{15}}{640} + \frac{33\xi_F^{17}}{4352} - \frac{429\xi_F^{19}}{77824} + \dots \quad (3.62)$$

Tomando únicamente los primeros términos de las expresiones anteriores, tendremos el caso no-relativista

$$\rho = \frac{8\pi m_\chi^4 \xi_F^3}{3h^3} = nm_\chi \equiv \rho_0, \quad (3.63)$$

$$p = \frac{8\pi m_\chi^4 \xi_F^5}{15h^3}. \quad (3.64)$$

Véase que en este caso, la densidad de energía,  $\rho$ , es equivalente a la densidad de materia,  $\rho_0$ . Esto se debe a que a primer orden toda la energía del gas viene dada por la masa en reposo, y en nuestras unidades de  $c = 1$ , la masa tiene unidades de energía. A parte de esto, las ecuaciones 3.63 y 3.64 se pueden igualar para obtener una ecuación de estado politrópica

$$p = K\rho^\Gamma \Rightarrow p = \frac{h^2 3^{2/3}}{20\pi^{2/3} m_\chi^{8/3}} \rho^{5/3}. \quad (3.65)$$

Esta ecuación coincide con la ecuación de estado que obtenemos cuando hacemos mecánica estadística sin tener en cuenta efectos relativistas [37, 40].

Para el caso cuasi-relativista, tendremos que tomar la expansión del mismo orden para cada término ( $O(5)$ ). La presión ya es orden 5, mientras que la densidad añadirá un término extra. Este término extra se puede obtener imponiendo directamente que  $m \gg k$  y nos da la siguiente ecuación de estado [41]

$$\rho = \rho_0 + \frac{3}{2}p. \quad (3.66)$$

## 4. Resolución Numérica de Modelos Estelares

En este capítulo presentamos la metodología utilizada para resolver las ecuaciones de TOV, definidas en la sección anterior, obteniendo así una solución hidrostática para estrellas en GR. En primer lugar, veremos cómo resolver las ecuaciones esenciales del capítulo anterior. Después, utilizaremos este marco teórico para replicar resultados de diferentes estrellas en GR, principalmente NS y estrellas de DM, con el objetivo de unir estos fluidos obteniendo la solución de una DANS.

### 4.1. Construcción de un modelo estelar

Las ecuaciones necesarias para calcular la solución hidrostática de una estrella de dos fluidos, según la GR son [2, 7]:

La ecuación de masa 3.42

$$m_i(r) = 4\pi \int_0^r \rho_i r'^2 dr', \quad (4.1)$$

donde  $m_i$  es la masa encerrada por un radio  $r$ , y  $\rho_i$  la densidad asociada a la estrella de materia  $i = \text{BM}, \text{DM}$  [7].

Las ecuaciones de TOV (Eq. 3.47, 3.48)

$$\frac{dp_i}{dr} = -(\rho_i + p_i) \frac{4\pi Gr^3 p_T + Gm(r)}{r[r - 2Gm(r)]}, \quad (4.2)$$

donde  $m(r)$  es la masa total encerrada en  $r$  y  $p_j$  la suma de las presiones en ese punto  $r$ , es decir  $p_j(r) = p_{\text{BM}}(r) + p_{\text{DM}}(r)$ .

En último lugar, necesitamos las EoS de ambos fluidos. Como vimos en el capítulo anterior, la forma vendrá dada de forma paramétrica tal que

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(n_i), \\ \rho_i &= \rho_i(n_i). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Las ecuaciones 4.1 y 4.2, junto con las ecuaciones de estado (Eq. 4.3) forman un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales [7]. Integrando estas ecuaciones podemos tener un modelo relativista de la estructura de una DANS.

#### 4.1.1. Integración numérica

Debido a la complejidad de las ecuaciones anteriores, la integración de estas se deberá llevar a cabo de forma numérica. Se pueden encontrar soluciones analíticas como en el caso de una estrella de un único fluido incompresible de densidad constante [2, 4, 31], lo cual sirve como punto de partida para comprobar la integración numérica. Pero para los

casos que queremos analizar como NS y DANS, tendremos que usar computación numérica para para integrar las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3.

Para solucionar las ecuaciones de estructura estelar, primero tenemos que empezar en  $r = 0$  y especificar las presiones centrales de cada componente  $p_i(r = 0) = p_{c_i}$ , las cuales actúan como condiciones iniciales. A continuación, integramos las ecuaciones 4.1 y 4.2 a lo largo de  $r$  hasta llegar al punto donde la presión del fluido sea nula  $p_i(r = R_i) = 0$ , este punto nos dice el radio total de la estrella de fluido  $i$ . Cuando todas las presiones de la estrella son nulas paramos la integración y ese radio será el radio total de la DANS.

El hecho de trabajar con una DANS nos presenta la complicación de que el único radio que podremos medir es el radio bariónico, es decir, el radio que tendrá la componente de BM. Esto se debe a que la DM aunque la materia oscura se acumule en halos alrededor de la NS nosotros mediremos el radio de la NS, no el de la DM. Es por esta razón que cuando se hace referencia al radio de una DANS se entiende como el radio bariónico ( $R \equiv R_{BM}$ ) [28, 42, 43].

Todos los cálculos numéricos se harán usando el software de DANTE.py [44]. Este resuelve las ecuaciones diferenciales 4.1, 4.2 y 4.3 usando un método de Runge-Kutta de orden 4 para integrar las ecuaciones [45, 46].

## 4.2. Estrellas de densidad constante

Debido a la complejidad de las ecuaciones usadas en nuestro modelo estelar (Eq. 4.1, 4.2 y 4.3), la mayoría de los modelos realistas de estructura estelar tienen que resolverse de manera numérica. Sin embargo, un modelo estelar que tiene solución analítica es el de una estrella de densidad constante [2, 4, 31]. Este modelo nos permite obtener una solución teórica con la que podemos comprobar el funcionamiento de DANTE.py y también familiarizarnos con el comportamiento de las estrellas relativistas.

Al tener una estrella de densidad constante, la ecuación de estado (Eq. 4.3) pasa a ser

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_* & , \quad r < R \\ 0 & , \quad r > R. \end{cases} \quad (4.4)$$

La ecuación de masa (Eq. 4.1)

$$m(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_* & , \quad r < R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_* = M & , \quad r > R. \end{cases} \quad (4.5)$$

Finalmente, integrando la ecuación 4.2 con los resultados de las ecuaciones 4.4 y 4.5, obtenemos [2, 4]

$$p(r) = \rho_* \left( \frac{\sqrt{R^3 - 2GMR^2} - \sqrt{R^3 - 2GMr^2}}{\sqrt{R^3 - 2GMr^2} - 3\sqrt{R^3 - 2GMR^2}} \right). \quad (4.6)$$

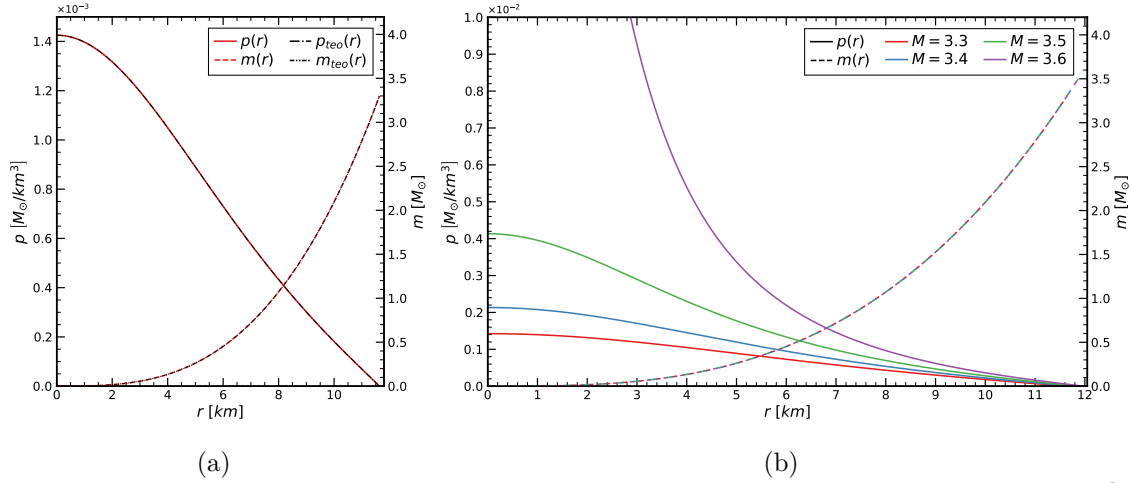


Figura 1: Solución hidrostática de un modelo estelar de densidad constante ( $\rho_* = 5 \cdot 10^{-5} M_{\odot}/\text{km}^3$ ). (a) En rojo se muestran los valores de  $p(r)$  y  $m(r)$  calculados de manera numérica con DANTE.py, mientras que en negro se muestran los valores teóricos calculados con las ecuaciones 4.5 y 4.6. (b) Soluciones hidrostáticas de estrellas con diferente masa  $M [M_{\odot}]$ .

En la figura 1 podemos ver las soluciones de la ecuación de TOV para una  $\rho_* = 5 \cdot 10^{-5} M_{\odot}/\text{km}^3$ . En la figura 1a podemos observar como integración numérica consigue replicar los resultados analíticos. En la figura 1b podemos ver como aumentar la presión central de nuestra estrella aumenta tanto su radio  $R$  como su masa  $M$ . La relación entre  $M$  y  $R$  se recopila en las curvas de Masa-Radio (MR) y estas se obtienen mediante un barrido de  $p_c$ .

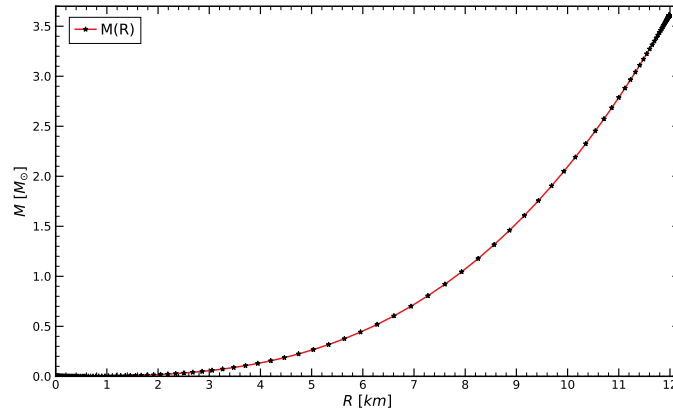


Figura 2: Curva de MR de una estrella de densidad constante ( $\rho_* = 5 \cdot 10^{-5} M_{\odot}/\text{km}^3$ ).

En la figura 2 podemos ver la curva de MR de una estrella de densidad constante. Gracias a esta figura podemos ver como el hecho de aumentar la masa conlleva un aumento del radio. Esto es algo característico de un fluido incompresible pero como veremos a continuación, las curvas de MR de modelos más realistas serán bastante distintas ya que permitirán un grado de compresibilidad.

### 4.3. Estrellas de EoS politrópica

Un modelo más realista de estrellas son aquellas con densidades no constantes [47]. Muchos de los sistemas en astrofísica sigue una EoS politrópica (Eq. 4.7) [4].

$$p = K\rho^\Gamma. \quad (4.7)$$

En estrellas compactas como las NS tenemos un gas de fermiones con densidades similares, o incluso mayores, a las de un núcleo atómico [2,4]. Si calculamos la temperatura de Fermi ( $T_F = E_F/k_B$ ) para un gas de neutrones ( $m_\chi = m_n$ ) con densidad  $\rho \sim 10^{16} \text{ g/cm}^3$  [47], usando las ecuaciones 3.51 y 3.56 tenemos que esta será del orden de  $T = 10^{13} \text{ K}$ . Gracias a observaciones [47] y los modelos de formación de las NS, como el flujo de neutrinos emitidos, tenemos que la temperatura de una NS es de  $T \sim 10^9 \text{ K}$  [2], por lo que la temperatura de la estrella no es suficientemente alta como para romper la degeneración. Gracias a esto, un modelo sencillo de una estrella compacta formada es una estrella con la EoS de un GIFCD. En el capítulo anterior vimos que el límite no relativista de un GIFCD, su EoS pasa a ser una politrópica (Eq. 3.65).

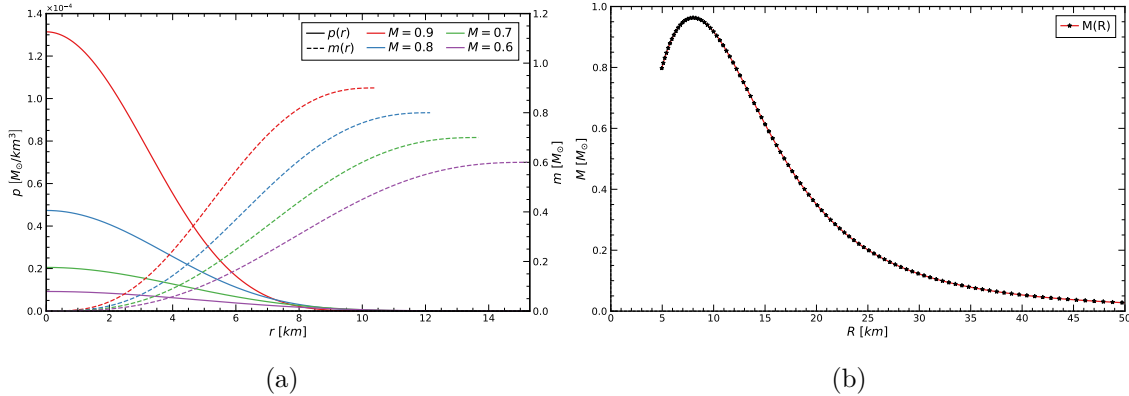


Figura 3: Solución hidrostática de un modelo estelar formado por un GIFCD no relativista de neutrones. (a) Soluciones hidrostáticas de estrellas con diferente masa  $M [M_\odot]$ . (b) Curva de MR.

En la figura 3a Podemos ver cómo en el caso de un GIFCD no relativista de neutrones, la presión y la densidad decaen de formas muy distintas comparadas con el caso de una estrella de densidad constante (Fig. 1). Podemos ver que gracias a que el gas sea compresible, a medida que nos alejamos del núcleo de la estrella la densidad y la presión empiezan a decaer rápidamente, haciendo así que para los últimos metros de radio la densidad sea tan baja que la masa apenas aumente. Otro efecto que causa esta compresibilidad es que el crecimiento de  $m(r)$  no es el mismo para todas las estrellas. Una estrella más masiva está más compacta haciendo que su radio  $R$  sea menor, y que  $m(r)$  presente un crecimiento mayor debido a que la densidad en radios pequeños es más elevada. Véase que mientras que en la figura 1 todas las estrellas tienen la misma densidad, en la 3a las estrellas más masivas tienen núcleos más densos ( $m(r)$  crece más rápido).

Otra diferencia fundamental se puede encontrar en las curvas de MR de ambos modelos. Mientras que para una estrella de densidad constante (Fig. 2) teníamos que un aumento en la masa  $M$  aumentaba el radio  $R$  ( $R \propto M^{1/3}$ ). En el caso de una EoS politrópica la compresibilidad cambia drásticamente el comportamiento de la curva de MR (Fig. 3b).

En la figura 3b podemos ver cómo para estrellas de masa  $M$  baja su radio es grande, esto se debe a que la poca cantidad de materia hace que la fuerza gravitatoria sea menor, haciendo que el radio  $R$  sea mayor. A medida que aumentamos la masa hasta  $0.8 M_{\odot}$  el radio se va reduciendo debido a la mayor fuerza gravitatoria. A partir de aproximadamente  $0.8 M_{\odot}$  hasta una masa máxima de  $0.95 M_{\odot}$ , nuestro sistema tiene dos soluciones estáticas, una estable de radio mayor y menos compacta, una más compacta e inestable [9]. Para masas más grandes de  $0.95 M_{\odot}$  no existe una solución estática para este modelo estelar.

Los resultados anteriores nos describen un modelo estelar formado por neutrones totalmente degenerados no relativistas. Aunque este sea un modelo teórico de una estrella de neutrones sabemos que presenta varios errores. En primer lugar, el propio modelo no es consistente consigo mismo, la presión central necesaria para formar las estrellas más masivas de la figura 3b no cumple la condición no relativista ( $\xi_F \ll 1$ ) por lo que deberíamos tener en cuenta la EoS completa de un GIFCD (Eq. 3.57 y Eq. 3.59). En segundo lugar, observaciones sobre NS nos dicen que se han observado NS más masivas que  $0.95 M_{\odot}$  [10, 13, 48–53]. Por lo que este modelo de EoS no es apto para describir una NS y tendremos que buscar uno más avanzado que sea compatible con las observaciones experimentales.

## 4.4. Estrellas de neutrones

### 4.4.1. Ecuación de estado

Como comentamos en la sección anterior, para describir una NS correctamente tendremos que usar una EoS que se ajuste a las medidas experimentales y modelos actuales, para ello nuestra EoS tendrá que ser más avanzada que un GIFCD no relativista de neutrones.

Necesitamos una EoS que tenga en cuenta la estructura de una NS, una corteza exterior formada por un plasma de núcleos atómicos en un mar de electrones, el cual aporta la mayor parte de la presión, una corteza interior compuesta por neutrones, electrones y núcleos ricos en neutrones, un núcleo interior formado por materia uniforme rica en neutrones, y finalmente un núcleo interior en el cual debido a su elevada densidad podremos encontrar modelos exóticos de materia. [1, 5, 14]

Encontrar una EoS que tenga en cuenta todas estas consideraciones es un problema abierto de la física y podría ser un TFG en si mismo. Debido a esto, para este trabajo usaremos las EoS de Hebeler *et al.* [1] junto con las EoS de BPS [54, 55] para la corteza exterior, debido a que es una EoS que cumple nuestros requisitos y además podemos encontrar la

expresión paramétrica. Esta EoS (Fig. 4) se calcula mediante Teoría de perturbación quiral, delimitada por la condición causal de que la velocidad del sonido no sea superlumínica ( $\sqrt{dp/d\rho} \leq 1$ ) y que  $M \geq 1.97$  para tener en cuenta los resultados de [49].

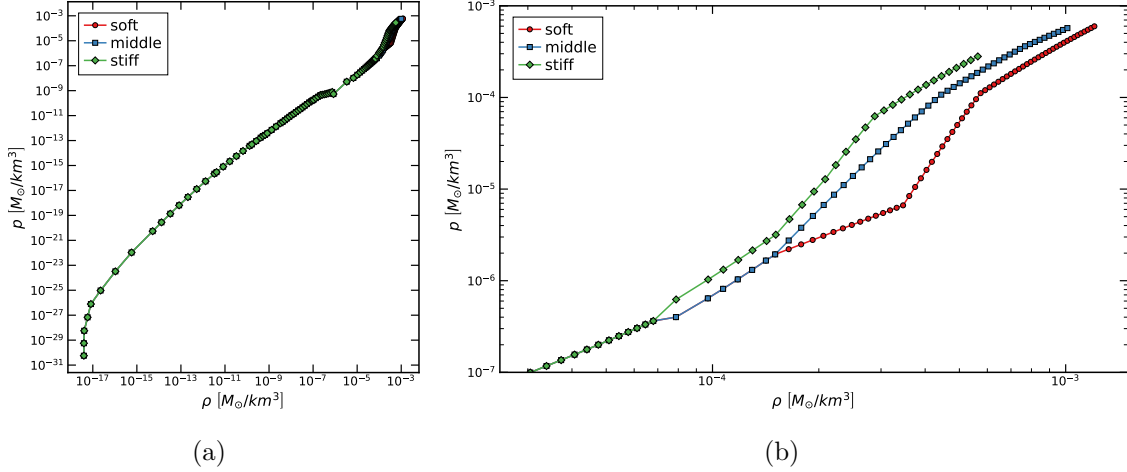


Figura 4: Ecuaciones de estado para una NS. En diferente color se presental los datos para diferentes durezas de la EoS. Las EoS “soft” y “stiff” representan los límites inferiores y superiores de rigidez, respectivamente. (a) Gráfica completa de la EoS. (b) Región de la EoS a altas densidades.

En la figura 4 podemos ver como la EoS diferencia entre tres posibles durezas para poder abarcar un rango de diferentes EoS distintas. La dureza o rigidez de una NS es un parámetro asociado a la EoS y nos dice como de fácil es de compactar la materia. Debido a que la EoS de las NS es aún un problema abierto, Hebler *et al.* [1] abarcan esta incertidumbre usando las EoS “soft” y “stiff” como casos límites y la EoS “middle” como un punto medio. Permittiéndonos así poder trabajar con cierta seguridad de que nuestras observaciones son compatibles con todos los posibles modelos de NS.

#### 4.4.2. Estudio de la rigidez

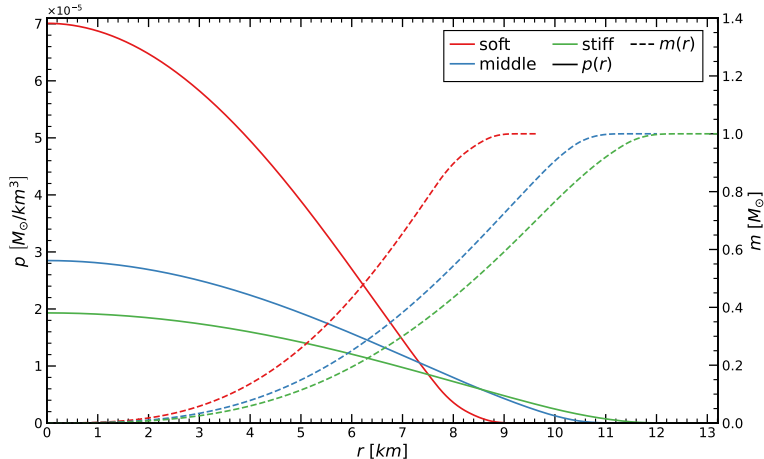


Figura 5: Soluciones hidrostáticas para una NS con diferente rigidez y masa total  $M = 1 [M_\odot]$ . El punto  $r$  en el que la curva deja de ser mostrada indica el radio  $R$  de la estrella.

En la figura 5 podemos ver cómo la rigidez de la EoS afecta a la estructura de una NS. Aunque los tres modelos tengan la misma masa ( $M = 1 M_{\odot}$ ) podemos ver que el radio  $R$ , la presión central  $p_c$ , y la distribución de materia  $m(r)$  son distintas. Se observa que una EoS blanda nos da un radio  $R$  menor y una  $p_c$  mayor. Esto se debe a que en una EoS blanda la materia se puede compactar más aumentando la densidad, haciendo que la masa crezca más rápido, aumentando también la presión y reduciendo el radio. Mientras que en una EoS más dura, la densidad es menor por lo que vemos los efectos opuestos, estrellas menos densas y con radios más grandes.

#### 4.4.3. Curva de Masa-Radio

Este efecto también se puede ver en las curvas de MR de cada modelo (Fig. 6). Podemos ver que para la misma masa  $M$ ,  $R_{stiff} > R_{middle} > R_{soft}$ , siendo la razón el hecho de que al aumentar la dureza hacemos que sea más difícil compactar la materia y entonces el radio aumenta. Otra diferencia que se puede observar entre las diferentes EoS es el hecho de que una ecuación más rígida permite masas mayores. Esto se debe a que como vimos en la figura 5, las densidades y presiones en una estrella más dura son menores, permitiendo así que para la misma presión central, la masa sea mayor.

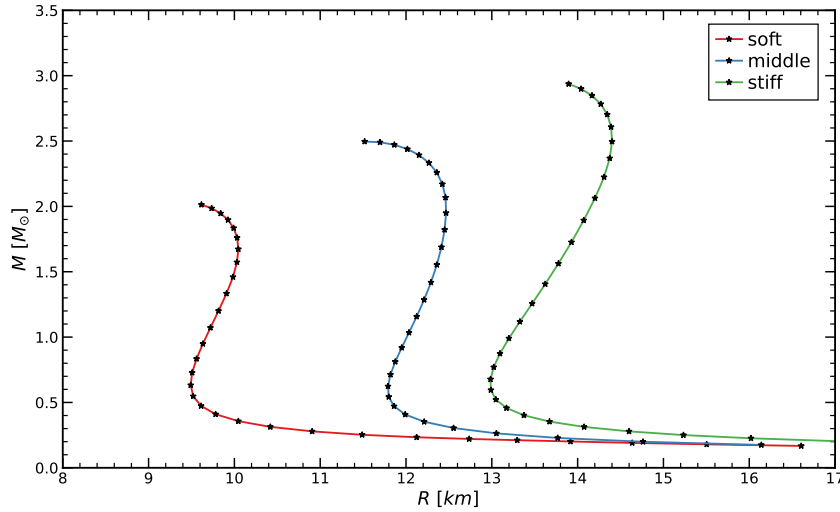


Figura 6: Curvas de MR de cada una de las EoS usadas para describir a las NS.

Leyendo las curvas de MR (Fig 6) se identifica que a medida que aumentamos la masa de la estrella, independientemente de la EoS, su radio se reduce rápidamente hasta llegar a una masa  $M \sim 0.5 [M_{\odot}]$ . A partir de este punto, añadir más masa hace que el radio aumente levemente, indicando que estamos en un punto de saturación, en el que la estrella se mantiene por la repulsión nuclear y fermiónica [3]. Finalmente, a partir de una cierta masa, entorno a  $2M_{\odot}$ , añadir más masa solo vuelve a reducir el radio hasta llegar el punto en el que se viola la condición de  $\sqrt{dp/d\rho} \leq 1$  [1].

## 4.5. Estrellas de materia oscura

### 4.5.1. Modelo de materia oscura y su ecuación de estado

La DM es aún un problema abierto de la física a la hora de escribir este TFG [56]. Actualmente existen varios candidatos de DM, con sus respectivas características, como los WIMPs [21], Gravitinos [19], neutrinos estériles, axiones, etc [18, 56]. Debido a esta falta de certeza en las medidas experimentales, tendremos que tomar consideraciones a la hora de elegir cómo modelizar la DM.

En primer lugar, una de las principales decisiones que tenemos que tomar a la hora de modelizar una partícula de DM es decidir qué tipo de partícula será, una vez tengamos esto podremos obtener la EoS asociada. En este TFG hemos optado por un GIFCD para modelizar la DM. En el capítulo anterior (Eq. 3.57 y 3.59) vimos que la expresión paramétrica de la EoS para un GIFCD es

$$p = \frac{\pi m_\chi^4}{h^3} \left[ \sqrt{1 + \xi_F^2} \left( \frac{2}{3} \xi_F^3 - \xi_F \right) + \ln \left( \xi_F + \sqrt{1 + \xi_F^2} \right) \right], \quad (4.8)$$

$$\rho = \frac{\pi m_\chi^4}{h^3} \left[ \sqrt{1 + \xi_F^2} \left( 2\xi_F^3 + \xi_F \right) - \ln \left( \xi_F + \sqrt{1 + \xi_F^2} \right) \right], \quad (4.9)$$

donde  $m_\chi$  es la masa de la partícula de DM,  $h$  es la constante de Planck, y  $\xi_F = k_F/m_\chi$  es el momento de Fermi adimensional.

Este modelo de DM, aunque sea el más sencillo para fermiones, se usa en varios estudios de las DANS [7, 27, 28, 42, 43]. Nosotros utilizamos este modelo porque, en primer lugar, es el único que nos permite describir un gas de partículas relativistas con presión no nula sin tener que hacer uso de la teoría cuántica de campos (algo que escapa los conocimientos de un estudiante de grado). En segundo lugar, porque en los modelos de partículas bosónicas frías la presión se introduce mediante la interacción entre las partículas de materia oscura [57, 58] y, por el momento, no hay evidencias de esto.

### 4.5.2. Efectos relativistas de la EoS

Cuando deducimos las ecuaciones 4.8 y 4.9 en la parte teórica, lo hicimos usando mecánica estadística relativista. Si no hubiéramos tenido en cuenta efectos relativistas tenemos una expresión politrópica (Eq. 3.65) como las que estudiamos en la sección de estrellas de EoS politrópica. En la figura 7 se muestra la comparación de como cambia la EoS (Fig. 7a), y las soluciones hidrostáticas (Fig. 7b) si tenemos en cuenta efectos relativistas o no.

Como podemos ver en la figura 7a, el hecho de tener en cuenta efectos relativistas hace que para densidades muy elevadas, la presión, para la misma densidad, sea menor. Esto significa que para la misma masa  $m_\chi$ , tener en cuenta efectos relativistas hace que la EoS sea menos rígida que en el caso clásico. Este efecto se puede comprobar en la figura 7b,

donde para la misma masa total  $M$ , podemos ver que el radio  $R$  es menor, y la presión y densidades centrales son mayores para el caso relativista.

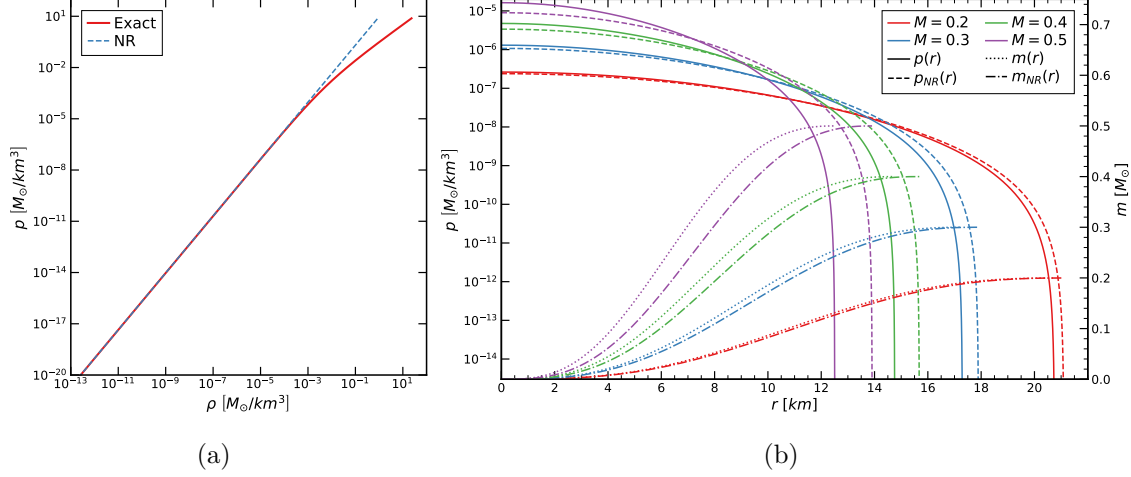


Figura 7: (a) Comparación entre la ecuación de estado de un Gas Ideal de Fermi Completamente Degenerado relativista (*exact*), frente a la EoS de un GIFCD no relativista (*NR*), de masa  $m_\chi = 1$  [GeV]. (b) Comparación entre las soluciones hidrostáticas para estrellas, de diferente masa  $M$ , formadas por materia oscura (GIFCD) relativista y no relativista de masa  $m_\chi = 1$  [GeV].

#### 4.5.3. Curva de Masa-Radio

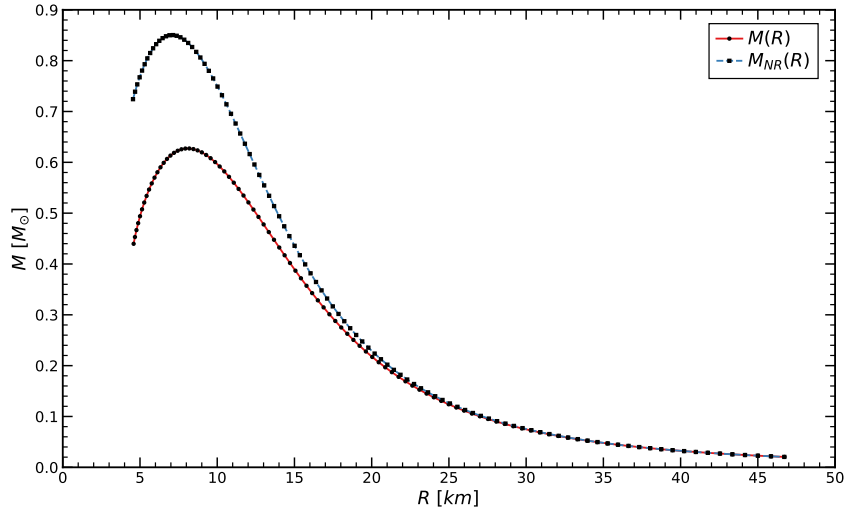


Figura 8: Curva de Masa-Radio para un modelo de estrellas de materia oscura, descrita como un Gas Ideal de Fermi Completamente Degenerado de masa  $m_\chi = 1$  [GeV]. En la figura se comparan los resultados obtenidos mediante la solución relativista  $M(R)$  contra los obtenidos con la aproximación no relativista  $M_{NR}(R)$  de la ecuación de estado.

La curva de MR asociada a nuestro modelo de DM (Fig. 8) es extremadamente similar a la curva de MR obtenida por un GIFCD de misma masa ( $m_\chi = 1$  [GeV]). Ambas curvas, tanto la relativista como la clásica, se muestran en la figura 8, donde podemos ver que para masas totales  $M$  pequeñas ambos modelos son equivalentes, ya que los efectos relativistas

solo son relevantes para presiones y densidades elevadas. Para masas  $M$  más grandes vemos como los modelos se separan, el modelo relativista, al ser menos rígido, para la misma masa  $M$  tiene un radio  $R$  menor, al igual que presenta una masa total máxima menor al modelo clásico más rígido.

## 4.6. Estrellas de dos fluidos y DANS

Durante las secciones anteriores hemos resuelto diferentes modelos de estrellas relativistas de un fluido, incluidos modelos que describen NS y estrellas de DM. En esta sección juntaremos estos dos últimos modelos para construir un modelo para las DANS. Para ello, usaremos las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3, donde  $i$  barrerá la BM de la NS y la DM, con las EoS que definimos en sus respectivas secciones, EoS de [1] para la BM y EoS de un GIFCD para la DM.

### 4.6.1. Parámetros $\alpha$ y $\lambda$

Para el caso de una estrella de dos fluidos (i.e. una DANS) es recomendable definir dos nuevos parámetros que describan la cantidad de DM dentro de la NS. El parámetro  $\alpha$  se define como la fracción de las presiones centrales de ambos fluidos (Eq. 4.10).

$$\alpha = \frac{p_{cDM}}{p_{cBM}} = \frac{p_{DM}(r=0)}{p_{BM}(r=0)}. \quad (4.10)$$

Mientras que el parámetro  $\lambda$  se define como el porcentaje de masa total que es materia oscura (Eq. 4.11). También referido como fracción de DM [7].

$$\lambda = \frac{M_{DM}}{M} = \frac{M_{DM}}{M_{DM} + M_{BM}}. \quad (4.11)$$

Es importante diferenciar estos parámetros ya que en la bibliografía aunque la mayoría trabajen con  $\lambda$ , podemos encontrar artículos que usan el parámetro  $\alpha$  [7, 29].

### 4.6.2. Efectos de añadir DM a una NS

A continuación resolveremos las soluciones hidrostáticas para DANS con diferentes valores de  $\lambda$ . Esto nos permitirá ver cómo introducir un segundo fluido de DM en nuestra NS, aunque no haya interacción entre ambos, afecta a la estructura de la estrella. El objetivo de esta sección es explicar el formalismo necesario para trabajar con estrellas de dos fluidos, los resultados obtenidos de las DANS se presentarán en el siguiente capítulo.

En figura 9 podemos ver el efecto que tiene añadir diferentes cantidades de materia oscura a una estrella de neutrones de una  $M_{\odot}$ . A medida que añadimos materia oscura a la estrella, la masa total  $M$  aumenta, aunque  $M_{BM} = 1M_{\odot}$ , y el radio total de la estrella disminuye al igual que la presión central del fluido aumenta, un efecto que estudiaremos en el siguiente capítulo. Esta gráfica nos permite ver que aunque los dos fluidos no tengan

ninguna interacción entre si, los fluidos notan la gravedad generada por el otro. Si añadimos materia oscura en forma de núcleo en la estrella, su materia se compacta debido a este aumento en la gravedad, otro efecto que veremos más en detalle en el siguiente capítulo.

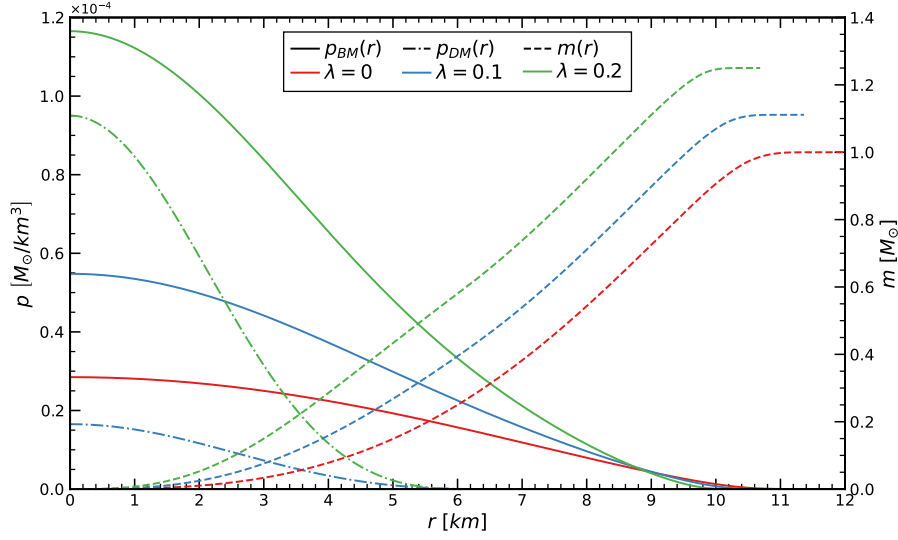


Figura 9: Soluciones hidrostáticas de DANS con una  $M_{\odot}$  de BM y diferentes valores de fracción de DM  $\lambda$ . En línea continua se muestra el perfil de presión de la BM  $p_{BM}(r)$ , la línea discontinua y punteada (*dash-dot*) el perfil de la presión de la DM  $p_{DM}(r)$ , y en línea discontinua el perfil de la masa total  $m(r) = m_{BM}(r) + m_{DM}(r)$ . La EoS utilizada para la NS es la *middle*, mientras que  $m_{\chi} = 1\text{GeV}$ .

A lo largo de este capítulo hemos resuelto las ecuaciones de TOV para diferentes fluidos descritos por EoS cada vez más avanzadas. Primero, empezamos con una estrella de densidad constante para comprobar nuestra herramienta de integración numérica [44] con una solución analítica. Luego, introducimos la EoS de un GIFCD no relativista como ejemplo de estrellas con EoS politrópica. A continuación, para poder describir de forma apropiada la parte de NS de las DANS utilizamos las EoS de Hebeler *et al.* [1], mientras que para describir la materia oscura usamos la EoS de un GIFCD, esta vez teniendo en cuenta efectos relativistas. Juntando estos dos modelos para describir la BM y DM de una DANS, respectivamente, usamos las ecuaciones de TOV para dos fluidos para encontrar la solución hidrostática de nuestro modelo de DANS.

A continuación, en el siguiente capítulo, nos centraremos en el estudio de las DANS y sus propiedades, usando las herramientas presentadas en este capítulo. Estudiaremos como cada parámetro del modelo afecta a la solución estelar final y expondremos los resultados obtenidos.

## 5. Propiedades de las DANS: Resultados y Discusión

En este capítulo estudiaremos las DANS usando el modelo teórico presentado en el capítulo anterior. Para definir la BM usaremos las EoS de hebelner *et al.* [1] para las NS, mientras que definiremos la DM como un GIFCD formados por partículas fundamentales de masa  $m_\chi$ . Las ecuaciones de TOV (Eqs. 4.1, 4.2 y 4.3) se resolverán numéricamente usando el software DANTE.py [44].

### 5.1. Reducción de la rigidez de la DANS

En el capítulo anterior vimos los efectos que tenía añadir DM a una NS (Fig. 9), vimos como a medida que añadíamos DM en forma de núcleo, esta hacia que la BM se compactase, disminuyendo su radio y aumentando su presión central ( $p_c$ ). Estos efectos de poder hacer que la materia se compacte los hemos visto en la figura 5 en la que vimos como variar la rigidez de la EoS puede hacer que la NS sea más compresible.

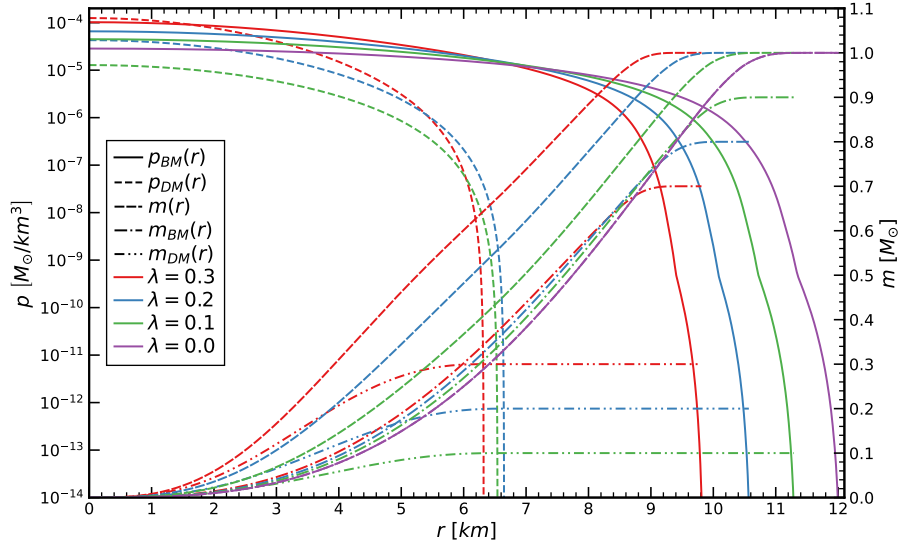


Figura 10: Soluciones hidrostáticas para DANS de masa total  $M = 1 M_\odot$  con diferentes cantidades de DM. La cantidad de DM viene fijada por la fracción de DM  $\lambda$  y cada color en la figura representa un diferente valor de  $\lambda$ . Para calcular estos datos se ha usado la EoS *middle* y se ha tomado  $m_\chi = 1 \text{ GeV}$ .

Motivados por el resultado de la figura 9 hemos realizado el siguiente estudio: Calculamos las soluciones hidrostáticas para DANS con  $M = 1 M_\odot$  con diferentes fracciones de DM en su interior. Esto nos permite estudiar cómo cambia la estructura estelar de una DANS de masa  $M$  fija, únicamente en función de su fracción de DM. Lo cual es útil ya que a niveles experimentales solo podemos medir  $M$  de forma directa y no  $M_{BM}$  o  $M_{DM}$ .

En la figura 10 podemos ver que al tener tener una mayor fracción de DM conseguimos que la estrella sea más compacta, véase que el radio  $R$  es menor a medida que aumentamos  $\lambda$ .

Esto se debe a dos factores, la interacción gravitatoria entre ambos fluidos y la distribución de materia de la DANS. Como vimos en la figura 9 el hecho de tener BM en campo gravitatorio, generado por DM, hace que esta materia se compacte más, algo que volvemos a ver en la figura 10. Pero otro factor esencial es que a medida que aumentamos  $\lambda$ , la cantidad de BM del sistema disminuye, haciendo que esta se compacte en radios menores lo que puede apreciarse en la distribución de  $m_{BM}$  de la figura 10.

Gracias a esto podemos observar que la fracción de DM de una DANS hace que la materia este más compacta que en lo que estaría en una NS, o en otras palabras, las DANS son menos rígidas que las NS. Esto no solo implica que el radio  $R$  sea menor si no que también aumenta las presiones centrales de ambos fluidos, por lo que la condición causal se alcanzará de cada fluido se alcanzará antes, reduciendo la masa máxima de la estrella.

## 5.2. Curvas de Masa-Radio

Los resultados de la sección anterior se pueden comprobar estudiando las curvas de MR de las DANS según nuestro modelo (Fig. 11). Con ellas podemos comprobar que para cada valor de  $M$ , independiente de la EoS que se use para la BM, el radio  $R$  decrece a medida que aumentamos  $\lambda$ . Otro resultado de la sección anterior que se puede comprobar en la figura 11 es que aumentar  $\lambda$  disminuye el valor de  $M$  máximo.

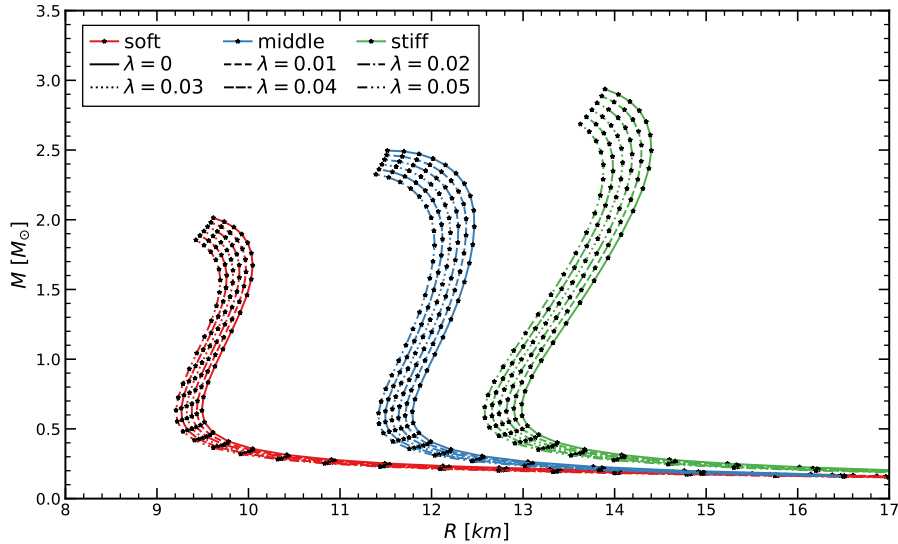


Figura 11: Curvas de Masa-Radio para DANS con diferentes fracciones de DM  $\lambda$ . En diferente color se muestran las DANS que usan diferente EoS para modelizar la BM, mientras que los diferentes estilos de línea diferencian los valores de  $\lambda$ . Para todas las curvas, la DM se ha modelizado como un GIFCD cuyas partículas tienen masa  $m_\chi = 1$  GeV.

Comparando la figura 11 con la figura 6 podemos ver como una DANS con  $\lambda = 0$  es idéntica a una NS, algo que se debe cumplir y nos sirve para comprobar que nuestro código [44] sea autoconsistente.

Un resultado que podemos obtener de la figura 11 es que tener en cuenta la presencia de DM en una DANS nos añade más posibilidades de estrellas hidrostáticas estables. Con esto nos referimos a que tener en cuenta DM permite a EoS que pudieran ser descartadas por medidas experimental puedan a volver ser consideradas.

Esto por supuesto añade aún más grados de libertad al problema de las DANS. No solo tenemos el problema de no tener una EoS para la BM dentro de una NS, sino que tenemos que tener en cuenta la EoS de la DM y los diferentes valores de  $\lambda$  posibles. La EoS de la DM es un problema abierto aún de la física, como todo lo relacionado con la DM, pero más adelante veremos que los valores de  $\lambda$  tienen un límite superior físico según nuestro modelo, un valor máximo  $\lambda_{max}$  que dependerá de  $m_\chi$  y  $M$ .

### 5.3. Efectos de la masa de materia oscura en la distribución de materia

En las secciones anteriores, todos los cálculos se han hecho asumiendo que la masa de la partícula de DM es de  $m_\chi = 1$  GeV pero este valor solo es un valor representativo, hay diversos modelos que esperan valores distintos. En esta sección estudiaremos explícitamente la dependencia de la estructura de las DANS se ve afectada por el valor de  $m_\chi$ , manteniendo el resto de parámetros (estudiados en secciones anteriores) fijos.

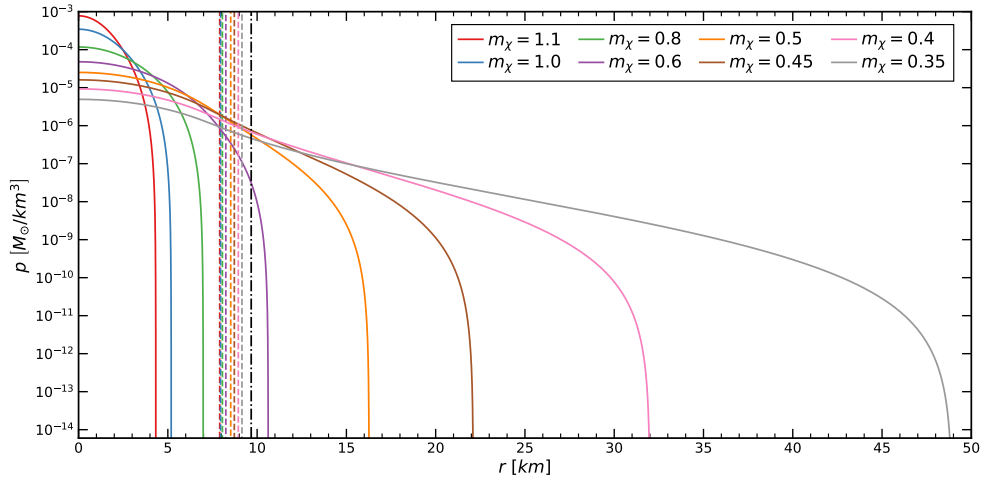


Figura 12: Soluciones hidrostáticas para DANS de  $M = 1 M_\odot$  y  $\lambda = 0.3$ , con diferentes valores para la masa de la partícula de DM. La línea continua es el perfil de la presión de la DM  $p_{DM}(r)$ , las líneas verticales discontinuas son los radios ( $R \equiv R_{BM}$ ) de la estrella, y la línea discontinua y punteada negra es el radio de una NS de  $M = 1 M_\odot$ . Para simular la BM se ha usado la EoS *soft*.

Como se observa en la figura 12, cambiar la masa  $m_\chi$  afecta principalmente el modo en que la DM se distribuye en el interior de la DANS. Para masas más grandes, la DM se compacta en radios más pequeños, mientras que para masas menores, la materia es más difícil de compactar, aumentando el radio. Este efecto proviene de la EoS usada para la DM (Eqs. 4.8 y 4.9), en estas el único parámetro libre es  $m_\chi$ , haciéndolo el indicador de rigidez de la EoS.

Sin embargo, los efectos más interesantes surgen de estudiar cómo la distribución de DM afecta a la estructura de la DANS. Podemos distinguir entre dos tipos de acumulaciones de DM. Núcleos de DM cuando la DM se acumula de tal forma que  $R_{DM} < R$  y halos de DM cuando se acumula tal que  $R_{DM} > R$ . Como podemos ver en la figura 12, cuando la masa es lo suficientemente pequeña, la DM se acumula en estructuras más grandes que el radio de la DANS (halo de DM), mientras que si aumentamos  $m_\chi$  el radio del cúmulo de materia oscura disminuye hasta ser inferior al de la DANS (núcleo de DM).

Si estudiamos cómo cambia el radio  $R$  de la DANS en función de la estructura del cúmulo de DM podemos ver que, cuando tenemos un núcleo de DM, el radio es menor que cuando tenemos un halo de DM. Cuanto más grande sea este halo, más grande será la DANS mientras que el efecto opuesto (compactar el núcleo) es más difícil de observar ya que el radio decrece con más dificultad.

Este efecto se debe a que el fluido de BM solo nota el campo gravitatorio del fluido de DM encerrado en su interior. Cuando la DM se encuentra compactada en un núcleo en el interior de la DANS, la BM nota el campo gravitatorio de toda la DM, mientras que si esta se acumula en un halo, la cantidad que escape el radio  $R$  de la estrella no ejercerá ningún efecto sobre la BM, reduciendo así la interacción gravitatoria entre ambos fluidos. Es por esto que disminuir la masa  $m_\chi$  hace que el radio  $R$  sea mayor, al hacer el halo más grande disminuimos la cantidad de DM que interactúa gravitacionalmente con el sistema, y como sabemos que al disminuir la cantidad de DM la DANS es menos compacta, el radio  $R$  aumenta.

Este razonamiento es totalmente consistente con la gravedad newtoniana pero el lector puede preguntarse si esto también se cumple en la GR. Si recordamos la ecuación 3.44, esta nos dice que  $\Phi$  depende de la masa encerrada de ambos fluidos  $m(r)$  y las presiones de ambos fluidos, las ecuaciones de TOV, al depender directamente del valor de  $\Phi$  (Eq. 3.45 y 3.46) también presentan esta dependencia. Esto nos dice que el fluido de BM solo nota la gravedad generada por sí mismo y la DM hasta el punto en el que  $p_{BM} = 0$ , es decir  $R$ , demostrando así que el razonamiento newtoniano es consistente con la GR.

Gracias a esto, podemos ver cómo la masa de la partícula de materia oscura  $m_\chi$  es un parámetro relevante para el estudio de las DANS. Variaciones en el orden de magnitud del GeV hacen que la estructura y comportamiento de la estrella varíe de forma significativa. Más adelante en este capítulo discutiremos la relevancia de que la masa tenga que estar en este rango pero lo importante de este resultado son las diferencias en la estructura estelar entre DANS con núcleos de DM y DANS con halos de DM.

## 5.4. Cantidad máxima de Materia Oscura en las DANS

En las secciones anteriores estudiamos como los diferentes parámetros ( $\lambda$  y  $m_\chi$ ) afectaban a la estructura de una DANS. En esta sección estudiaremos la relación que tienen estos parámetros entre sí, fijando la masa  $M$ , y veremos como para ciertas masas  $m_\chi$ , existe una cantidad máxima de DM,  $\lambda_{max}$ , que se puede acumular en la DANS.

### 5.4.1. Barrido de los valores de $\alpha$

La existencia de un valor máximo de la fracción de DM se puede ver en la figura 13, en esta gráfica se hace un barrido de los valores de  $\alpha$  fijando la masa de la DANS ( $M$ ), la EoS de la BM y la masa de la partícula de DM ( $m_\chi$ ), permitiéndonos así ver la dependencia de  $\lambda$  con  $\alpha$ .

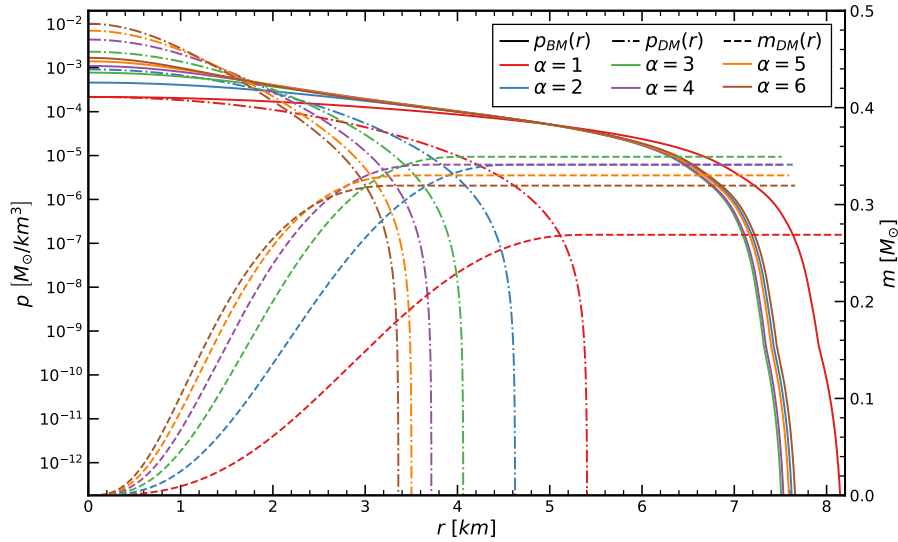


Figura 13: Soluciones hidrostáticas de DANS, de  $M = 1M_\odot$ , barriendo la fracción de presiones centrales,  $\alpha$ . Cada color de línea indica los valores asociados a cada estrella de un  $\alpha$  específico. Las líneas solidas indican el perfil de la presión de la BM ( $p_{BM}(r)$ ), las discontinuas punteadas indican la presión de la DM ( $p_{DM}(r)$ ) y las discontinuas el perfil de masa de DM ( $m_{DM}(r)$ ). Para describir la BM se ha usado la EoS *soft* y la masa de la partícula de DM es de  $m_\chi = 1 \text{ GeV}$ .

En la figura 13 podemos ver como hasta  $\alpha = 3$ , si aumentamos el valor de  $\alpha$  el valor de  $\lambda$  también aumenta, mientras que a partir de este valor aumentar  $\alpha$  reduce el valor de  $\lambda$ . Este comportamiento es esperado gracias a que en la figura 8 vimos que una estrella de DM tiene una masa máxima. A niveles generales, comparando las figuras 8 y 13, podemos ver que la cantidad de materia oscura que se acumula en el vacío es mayor frente al caso de estar dentro de una DANS, esto se debe a que el fluido de la BM compacta la DM haciendo que la masa máxima y el radio decrezca.

En la figura 13 vemos que el valor de  $\lambda$  para  $\alpha = 2$  y  $\alpha = 4$  son extremadamente parecidos, siendo la diferencia real entre ambos de  $1.276 \cdot 10^{-5}$ . Gracias a esta coincidencia, podemos

usar estas dos soluciones para comparar la estructura de dos DANS con la misma  $\lambda$  pero diferente  $\alpha$ .

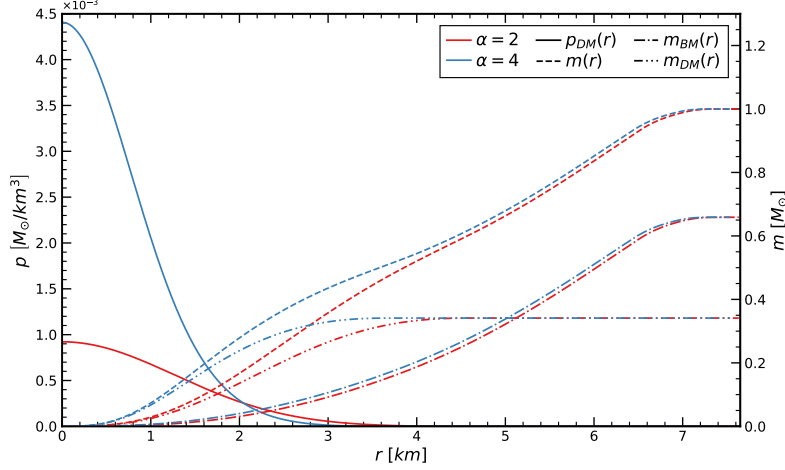


Figura 14: Soluciones de dos DANS de masa  $M = 1 M_{\odot}$ , con  $\alpha = 2$  (rojo) y  $\alpha = 4$  (azul). El perfil de la presión de la DM ( $p_{DM}(r)$ ) se muestra con una línea continua, mientras que los perfiles de la masa total ( $m(r)$ ), masa de BM ( $m_{BM}(r)$ ), y masa de DM ( $m_{DM}(r)$ ), se muestran con líneas discontinuas, discontinuas punteadas y discontinuas con doble punto, respectivamente. Para describir la BM se ha usado la EoS *soft* y la masa de la partícula de DM es de  $m_{\chi} = 1$  GeV.

En la figura 14 tenemos que la solución para  $\alpha = 4$  es más compacta que la solución de  $\alpha = 2$ . Esto principalmente se puede ver por la diferencia en entre presiones centrales, siendo la de  $\alpha = 4$  4.778 veces mayor que la de  $\alpha = 2$ , y con el hecho de que la diferencia de radios ( $R(\alpha = 2) - R(\alpha = 4)$ ) es de unos 97 metros. Una particularidad de DANS con presiones centrales de DM tan grandes es que la densidad de DM en el núcleo es tan grande que para los radios  $r$  más centrales la masa  $m(r)$  de la estrella está dominada por la DM en vez de la BM, véanse los perfiles de masa para la solución de  $\alpha = 2$ .

#### 5.4.2. Dependencia de $\lambda_{max}$ en función de $m_{\chi}$

Como se vio anteriormente, existe una cantidad máxima de DM  $\lambda_{max}$  que se puede acumular en la DANS. Este valor dependerá de los principales parámetros que definen una DANS: Su masa  $M$ , la EoS que usamos para describir la BM y la masa de la partícula de DM.

En la figura 15 calculamos el valor de  $\lambda_{max}$  en función de  $m_{\chi}$  para dos DANS, con núcleos de DM, de masas  $M = 1 M_{\odot}$  y  $M = 1.5 M_{\odot}$ , teniendo en cuenta las tres EoS para la BM. De esta figura podemos sacar los siguientes resultados: El valor de  $\lambda_{max}$  decrece a medida que aumentamos la masa de la partícula de DM. Aumenta si consideramos EoS más rígidas para la BM. Decrece si aumentamos la masa total  $M$  de la DANS.

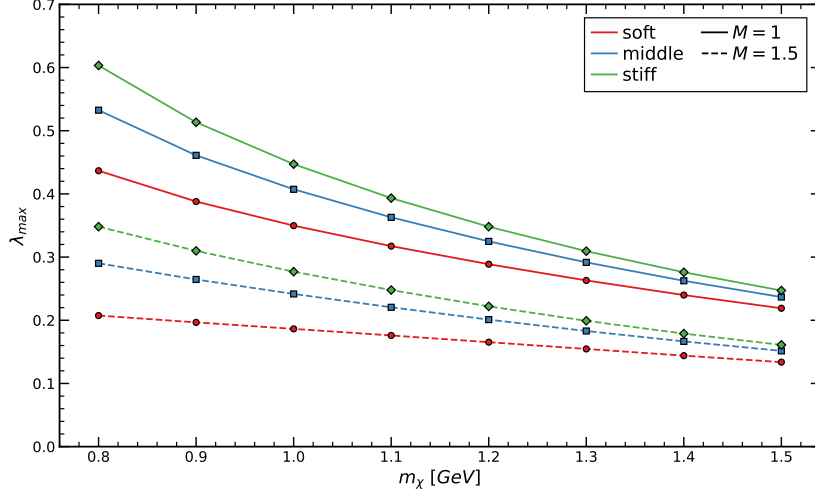


Figura 15: Dependencia de los valores máximos de la fracción de DM ( $\lambda_{max}$ ) en función de la masa de la partícula de DM ( $m_\chi$ ). En esta gráfica se calculan los valores de  $\lambda_{max}$  para DANS de masa  $M = 0.5 M_\odot$  (línea continua) y  $M = 1.5 M_\odot$  (línea discontinua), con cada color indicando la EoS usada para describir la BM de la estrella.

La razón por la que se especifica que las DANS deben tener núcleos de DM es porque no existe un valor máximo para la fracción de DM en el caso de que la DM se acumule en forma de halos. En el caso de tener halos de DM, los roles de ambos fluidos se invierten, esto significa que tenemos estrellas de DM con una pequeña componente de BM en su interior.

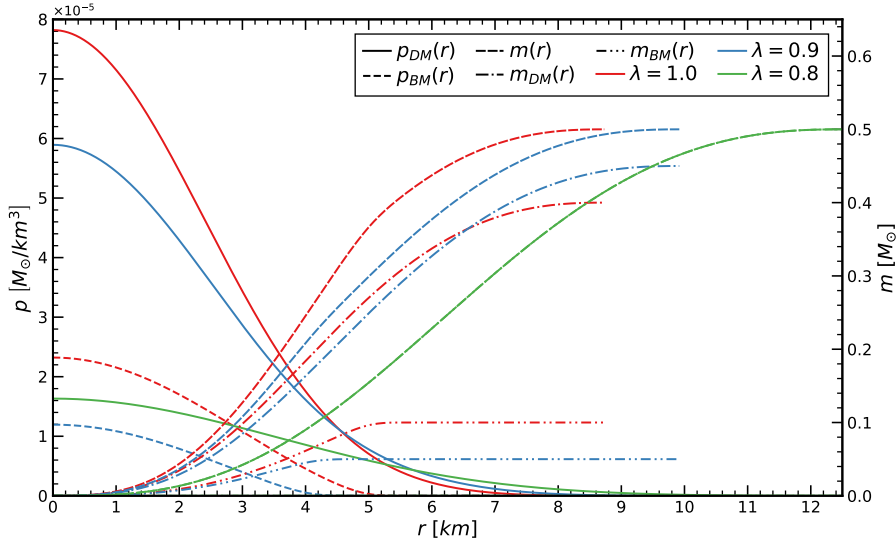


Figura 16: Soluciones hidrostáticas para DANS de masa total  $M = 1 M_\odot$  dominadas por DM. Para calcular estos datos se ha usado la EoS *middle* y se ha tomado  $m_\chi = 1$  GeV.

Como podemos ver en la figura 16, cuando la DM se acumula en forma de halo, esta no tiene un valor de  $\lambda_{max}$  ya que como podemos ver, hay una solución para  $\lambda = 1$ , la cual simplemente es una estrella formada unicamente por DM.

Gracias a estos estudios, podemos observar que el valor de  $\lambda_{max}$  solo existe en el caso de que cuando se tenga  $\lambda = \lambda_{max}$  la DANS acumule su DM en forma de núcleo. Esta restricción principalmente afecta a DANS de masas  $M$  más pequeñas, como  $M = 0.5 M_{\odot}$  para la figura 16. Cuando tenemos estrellas de esta masa  $M$ , a medida que aumentamos  $\lambda$  puede ser que la DM se acumule en forma de núcleos, pero si antes de llegar a  $\lambda_{max}$  la DM es tan abundante que su radio  $R_{DM} > R$ , esta DANS podrá barrer todos los valores posibles de  $\lambda$ .

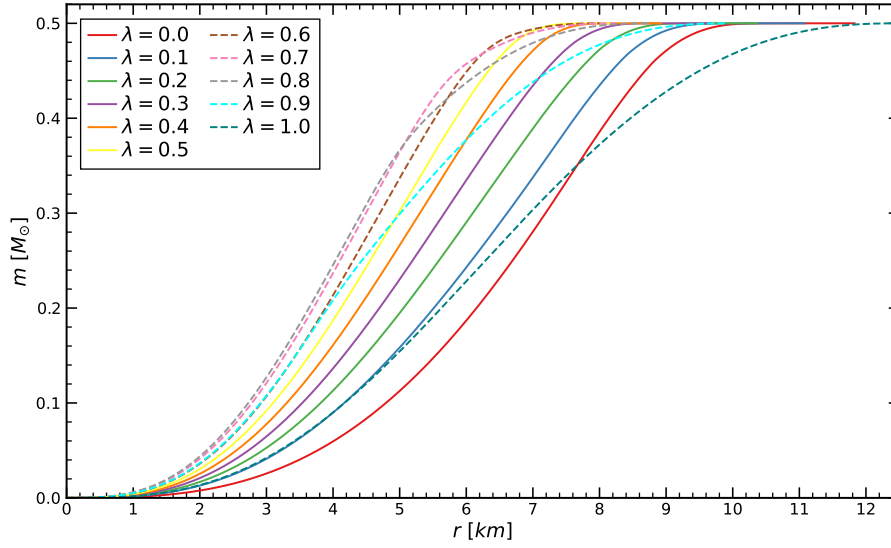


Figura 17: Perfil de los valores de  $m(r)$  para DANS con  $M = 0.5 M_{\odot}$ , barriendo todos los valores de  $\lambda$ . En líneas sólidas se muestran las soluciones en las que la DM de la DANS se acumula como núcleo, mientras que en líneas discontinuas se dibuja el caso de acumularse como halo.

## 5.5. Discusión de los resultados

A lo largo de la sección anterior hemos visto cómo una DANS puede ser descrita por 4 parámetros: Su masa total  $M$ , la fracción de DM  $\lambda$  (Eq. 4.11) y las dos EoS para describir la BM y DM. Gracias a como está construido DANTE.py [44], este permite seleccionar directamente estos parámetros para, de forma automática, encontrar las condiciones iniciales para obtener los parámetros deseados. Como se ha comentado anteriormente, nuestro modelo utiliza la EoS de Hebler *et al.* [1] para la BM, y la EoS para la DM es la de un GIFCD. Esta elección de EoS reemplaza los parámetros iniciales por la elección de la rigidez de la EoS de la BM (*soft*, *middle* y *stiff*) y la masa de la partícula de DM ( $m_{\chi}$ ), la cual hemos tomado que sea de entorno al GeV [7, 27, 28, 42, 43].

En primer lugar, vimos que para las masas  $m_{\chi}$  en nuestro rango de estudio, aumentar la cantidad DM de una DANS hace que esta sea más compacta o menos rígida. La principal consecuencia de esto es el desplazamiento de las curvas de MR (Fig. 11) hacia abajo y a la derecha. Este desplazamiento lateral nos dice que para dos DANS con la misma masa pero diferentes valores de  $\lambda$ , la estrella con más materia oscura será más densa al tener un

radio menor. Este aumento de densidad es el causante del desplazamiento vertical hacia abajo, al compactar la estrella y aumentar la presión central del fluido, esto conlleva que se llegue a la condición causal ( $v_s \geq 1$ ) para masas menores reduciendo así el máximo de masa para las DANS con ese valor de  $\lambda$ .

Posteriormente, vimos cómo la masa de la partícula de DM ( $m_\chi$ ) afecta a la estructura de las DANS dejando todos los parámetros fijos menos  $m_\chi$  (Fig. 12). Vimos cómo la forma en la que se acumulaba la DM depende de  $m_\chi$ , cuando  $m_\chi$  es mayor la estrella se acumula en cúmulos más compactos mientras que si la partícula es más ligera el radio del cúmulo es mayor, lo que indica que es más difícil de acumular. El radio de la estructura formada por la DM lo llamamos  $R_{DM}$  y dependiendo de su relación con el radio bariónico de la DANS ( $R$ ) definimos dos situaciones: Si  $R_{DM} < R$  decimos que la DANS tiene un núcleo de DM. Mientras que, si  $R_{DM} > R$  decimos que la DANS tiene un halo de DM.

El valor de  $m_\chi$  que hace que se cambie de núcleo a halo de DM es un valor que depende del resto de parámetros de la DANS ( $M$ ,  $\lambda$  y EoS de la BM). Aunque ese valor varíe, el comportamiento general de DANS con núcleos o halos de DM es el mismo independientemente de los valores del resto de parámetros. Como vimos anteriormente, añadir DM a una DANS hace que esta se compacte, reduciendo su radio  $R$  en comparación con el caso de una NS de misma masa  $M$ . Esto es algo que se cumple independientemente de cómo se acumule la DM (Fig. 12), sin embargo, si la DM se acumula en núcleos dentro de la DANS, podemos ver que el efecto gravitatorio es mayor haciendo que esta se compacte más que en el caso de un halo de DM. Lo cual se resume en  $R_{NS} > R_{halo} > R_{core}$ , donde  $R_{NS}$  es el radio de una NS,  $R_{halo}$  es el radio de una DANS con un halo de DM y  $R_{core}$  es el radio de una DANS con un núcleo de DM, todas estas estrellas con la misma  $M$ , misma EoS y en el caso de  $R_{halo}$  y  $R_{core}$  misma  $\lambda$ .

Finalmente, descubrimos que las DANS tienen que tener una cantidad máxima de DM, siempre que estas acumulen la DM en forma de núcleo. Esto se debe a que aumentar la presión central del fluido de DM (aumentar  $\alpha$ ) no siempre lleva a un aumento de  $M$ . Aumentar la presión central del fluido suele hacer que  $R$  decazca, dependiendo de la EoS, hay un punto en el que aumentar la presión central hace que  $R$  sea tan pequeño que aunque la densidad en el centro sea mayor esta se integra en radios tan pequeños que  $M$  empieza a decrecer. En términos de la ecuación 3.33,  $R$  decae más rápido de lo que  $\rho$  aumenta.

La existencia de un  $\lambda_{max}$  nos permite poner un límite superior a uno de los cuatro parámetros de las DANS. Si pudiéramos medir  $M$  con suficiente precisión y tuviéramos las EoS de BM y DM, entonces podríamos asegurar que la cantidad de DM dentro de una DANS tiene que ser menor de un cierto valor  $\lambda_{max}$ . Otro caso es en el que pudiéramos medir  $\lambda$ ,  $M$  y tuviéramos la EoS de la DM, en este caso podríamos usar ese valor de la fracción de DM como  $\lambda_{max}$  y dar un límite sobre  $m_\chi$ .

Los resultados mencionados anteriormente, especialmente los efectos de añadir DM a una DANS, son consistentes con los resultados de la literatura publicada sobre las DANS. Leung *et al.* [27], Scordino y Bombaci [28], Ivanytskyi *et al.* [42] y Sagun *et al.* [43] estudian, entre otras características de las DANS, como varían las curvas de MR en función de la fracción de DM, todos ellos obteniendo que para masas de  $m_\chi = 1\text{GeV}$ , las curvas de MR se compactaban más a medida que aumentábamos nuestro parámetro  $\lambda$ . Otros estudios como los de Ciarcelluti y Sandin [35, 36] encontraron el mismo resultado general para un modelo de *mirror dark matter*, es decir que usaron la misma EoS para la BM y DM [36]. Mientras que Ellis *et al.* [57] llega al mismo resultado para un Gas de Bosones Libres con interacción.

El resultado de la figura 12 es menos estudiado ya que analizando las ecuaciones de la EoS de un GIFCD (Eq. 4.8 y 4.9) podemos ver que la masa  $m_\chi$  es inversamente proporcional a la rigidez de la EoS. Como modelizamos la DM como un GIFCD, tenemos que para masas ligeras la EoS es más difícil de compactar (rígida) que para masas más masivas. De todos modos, Scordino y Bombaci [28] y Ivanytskyi *et al.* [42] muestran que para los mismo parámetros de la DANS, valores mayores de  $m_\chi$  suelen llevar a núcleos de DM mientras que valores menores de  $m_\chi$  llevan a la formación de halos, algo que coincide con lo mostrado en la figura 12.

Finalmente, no hemos conseguido encontrar ninguna referencia para confirmar los resultados de la figura 15. Scordino y Bombaci [28], Ivanytskyi *et al.* [42] y Sagun *et al.* [43] definen un valor crítico de la fracción de DM,  $\lambda_{crit}$ , como aquel para el cual  $M_{max} = 2 M_\odot$ , lo cual difiere de nuestra definición de  $\lambda_{max}$ . De todos modos, el comportamiento de que haya un valor de presión central que de un valor máximo de  $M$  es algo confirmado por las curvas de MR de diferentes tipos de fluidos (véase la figura 8). La única diferencia siendo que el fluido de DM ahora está contenido dentro de la DANS, haciendo que esta curva de MR se compacte. Por lo que confiamos en la validez de los resultados obtenidos en la sección anterior.

## 6. Conclusiones

A lo largo de este TFG hemos estudiado las propiedades estructurales de las DANS y cómo estas dependen de parámetros físicos aún por determinar. En primer lugar, repasamos los fundamentos teóricos de GR para obtener la ecuación de TOV para un sistema compuesto por dos fluidos sin interacción. Posteriormente, usamos la mecánica estadística para obtener la EoS de un modelo sencillo de DM descrito como un GIFCD. A continuación, con todas las herramientas teóricas, usando nuestro software DANTE.py [44], resolvimos de manera numérica diferentes modelos de estrellas en el marco de la GR: Estrellas de densidad constante y EoS politrópica para familiarizarnos con la hidrostática de las estrellas en campos gravitatorios. Estrellas de neutrones, para las cuales usamos la EoS de Hebeler *et al.* [1] y pudimos replicar sus resultados. Estrellas de DM, haciendo especial énfasis en la necesidad de efectos relativistas debido a las altas densidades en el núcleo de la estrella. Finalmente, juntamos estos últimos modelos, NS y estrellas de DM, para construir un modelo de DANS.

Con este modelo, vimos que las DANS dependían principalmente de cuatro parámetros: Su masa ( $M$ ), su fracción de DM ( $\lambda$ ), y las EoS de las componentes de BM y DM de la estrella. Por supuesto estas EoS pueden depender a su vez de más parámetros. En nuestro caso, al usar la EoS de de Hebeler *et al.* [1] para la BM solo tenemos que especificar cual de las tres durezas (*soft*, *middle* o *stiff*) usar. Mientras que para la DM, al estar descrita como un GIFCD, solo tenemos que especificar la masa de la partícula de DM ( $m_\chi$ ).

Variando estos parámetros (moviendo  $m_\chi$  entorno al GeV) concluimos que: Aumentar la  $\lambda$  daba lugar a una DANS más compacta, radio  $R$  menor para la misma  $M$ . Dependiendo del valor de  $m_\chi$  tenemos que la DM se acumula en núcleos dentro de la estrella para masas grandes, mientras que para masas pequeñas la DM se acumula en halos que se extienden fuera del radio  $R$  de la DANS. Finalmente, vimos que existe una cantidad máxima de DM ( $\lambda_{max}$ ) que se puede almacenar dentro de la DANS siempre que esta se almacene en forma de núcleo.

Todos estos resultados, menos el de  $\lambda_{max}$  son compatibles con lo que se ha estudiado en otros estudios [7]. Esto nos permite decir con confianza que las herramientas que hemos desarrollado para la realización de este TFG son válidas y dan resultados consistentes. Esto es relevante porque el resultado de la existencia de un valor  $\lambda_{max}$  es algo que no se ha podido encontrar en la literatura publicada y sería una magnitud interesante de estudiar. Lo ideal sería confirmar la validez de las afirmaciones comentadas en la sección de discusión del capítulo anterior y rellenar la figura 15 con más valores de  $m_\chi$ .

La principal limitación de nuestro estudio viene por parte de las EoS de los fluidos de BM y DM. Una de las principales ventajas de trabajar con la EoS de Hebeler *et al.* [1] es que entre las tres rigideces definidas podemos barrer dos casos límites y un caso promedio

dentro de la incertidumbre de las medidas experimentales. Esto nos permite respaldar nuestros resultados con cierta seguridad ya que si son comunes para las tres EoS de estado es probable que lo sea para otros modelos de EoS para la BM. Por parte de la DM, trabajar con un GIFCD es algo que limita nuestro modelo porque aún no tenemos suficientes conocimientos sobre la DM para saber su naturaleza. Es por eso que puede ser que nuestros resultados sí que sean sensibles a la EoS de la DM, por lo que se deberían comprobar con modelos más complejos como los de un gas de bosones con interacción entre partículas de DM [57, 59].

La naturaleza de las DANS es aún un misterio abierto que depende de dos problemas físicos aún por resolver: el comportamiento de la materia en las NS (la EoS de la BM) y la naturaleza de la DM (su EoS). Actualmente existen varios experimentos buscando resolver estos problemas: Por parte de las NS tenemos la misión NICER [12, 13, 60, 61], observaciones de LIGO/Virgo [50] o medidas del efecto Shapiro [49, 53, 62], mientras que por parte de la DM tenemos los métodos de detección comentados en la introducción.

Aunque el comportamiento de las componentes de materia de las DANS aún sea un misterio, gracias a que las ecuaciones de TOV para dos fluidos (Eq. 4.2) tenemos la metodología para poder estudiar su estructura haciendo suposiciones sobre sus EoS. En este TFG hemos hecho esto, asistiéndonos de herramientas de integración numérica [44], demostrando que la estructura de las DANS depende tanto de la cantidad de DM en su interior como de las propiedades de esta, haciéndola así diferenciable de NS convencionales y dándonos una posibilidad de medirlas.

## 7. Futuras líneas de Trabajo

Una vez terminado el estudio de la estructura de las DANS, se presentan diferentes ampliaciones a este para complementar el trabajo realizado en este TFG:

1. El primero de ellos es considerar más EoS, tanto para la BM como para la DM. Actualmente existen diferentes posibilidades para las EoS de NS, si podemos obtener las expresiones paramétricas de cada una de ellas o incluso calcular nuestra expresión podríamos volver a realizar los cálculos para asegurar que los resultados se mantengan para esta variación del modelo. La EoS de la DM es la más delimitante ya que no podemos asegurar que esta se comporte como un GIFCD. Aunque es esperable que el comportamiento no varíe drásticamente al realizar un estudio de estructura más avanzado, este podría tener en cuenta EoS de tanto fermiones como bosones, pudiendo incluso considerar interacciones entre el propio fluido o temperaturas finitas para ver como estos parámetros afectan a la estructura.
2. Otro añadido que podemos incluir en nuestro estudio son los estudios de otras propiedades como la deformabilidad de marea (tidal deformability) de las DANS, momento de inercia [27] o la radiación gravitatoria emitida por un sistema binario [63]. Centrándonos especialmente en la deformabilidad de marea, esta nos dice cómo de fácil es alterar la forma de un objeto compacto mediante el uso de un campo gravitatorio externo [7]. Este parámetro es de especial utilidad en estudios de ondas gravitacionales y las medidas de LIGO/Virgo permiten restringir el valor de este, por lo que ver como varía a medida que añadimos DM al sistema nos daría otra posible manera de medir las DANS [7, 50].
3. Otra línea de desarrollo que se puede tener en cuenta es estudiar la estabilidad de las soluciones de DANS con presiones centrales de DM elevadas. En la figura 14 vimos como existen dos soluciones para una DANS con  $M = 1 M_{\odot}$  y  $\lambda = 0.3412$ , una solución en la que la presión central del fluido de DM era dos veces mayor al de BM ( $\alpha = 2$ ) y otra en la que era cuatro veces mayor  $\alpha = 4$ . Cabría esperar que la solución de  $\alpha = 2$  fuera estable mientras que  $\alpha = 4$  fuera inestable pero eso se debería calcular analizando el espectro de las oscilaciones radiales de la densidad [64].
4. Finalmente, la futura línea de trabajo más directa es seguir al tanto del estado del arte relacionado con las medidas de NS y DM. Esto permitirá mejorar los modelos que usamos para ambas EoS con el objetivo de incrementar la credibilidad de nuestro modelo y en el caso de que aparezca un objeto compacto con propiedades anómalas como HESS J1731-347 [11, 30], permitir explicarlo como una DANS.

## Referencias

- [1] K. Hebeler, J. M. Lattimer, C. J. Pethick, and A. Schwenk, “Equation of state and neutron star properties constrained by nuclear physics and observation,” *The Astrophysical Journal*, vol. 773, p. 11, jul 2013.
- [2] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco, USA: W. H. Freeman, 1973.
- [3] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*. New York: Springer, 2nd ed., 2000.
- [4] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2 ed., 2019.
- [5] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. New York: Wiley-Interscience, 1983.
- [6] M. Camenzind, *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.
- [7] F. Grippa, G. Lambiase, and T. K. Poddar, “Searching for new physics in an ultradense environment: A review on dark matter admixed neutron stars,” *Universe*, vol. 11, no. 3, 2025.
- [8] R. C. Tolman, “Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid,” *Phys. Rev.*, vol. 55, pp. 364–373, Feb 1939.
- [9] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On massive neutron cores,” *Phys. Rev.*, vol. 55, pp. 374–381, Feb 1939.
- [10] F. Özel and P. Freire, “Masses, radii, and the equation of state of neutron stars,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 54, no. Volume 54, 2016, pp. 401–440, 2016.
- [11] V. Doroshenko, V. Suleimanov, G. Pühlhofer, and A. Santangelo, “A strangely light neutron star within a supernova remnant,” *Nature Astronomy*, vol. 6, pp. 1444–1451, Dec. 2022.
- [12] T. E. Riley and *et al.*, “A NICER View of the Massive Pulsar PSR J0740+6620 Informed by Radio Timing and XMM-Newton Spectroscopy,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 918, p. L27, sep 2021.
- [13] M. C. Miller and *et al.*, “PSR J0030+0451 Mass and Radius from NICER Data and Implications for the Properties of Neutron Star Matter,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 887, p. L24, dec 2019.

- [14] P. Haensel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*, vol. 326 of *Astrophysics and Space Science Library*. New York: Springer, 2006.
- [15] F. Zwicky, “Republication of: The redshift of extragalactic nebulae,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 41, pp. 207–224, Jan. 2009.
- [16] V. C. Rubin and W. K. J. Ford, “Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions,” *The Astrophysical Journal*, vol. 159, pp. 379–403, Feb. 1970.
- [17] N. Aghanim and *et al.*, “Planck 2018 results: Vi. cosmological parameters,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, p. A6, Sept. 2020.
- [18] J. L. Feng, “Dark matter candidates from particle physics and methods of detection,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 48, no. Volume 48, 2010, pp. 495–545, 2010.
- [19] S. Profumo, L. Giani, and O. F. Piattella, “An introduction to particle dark matter,” *Universe*, vol. 5, no. 10, 2019.
- [20] R. Bernabei *et al.*, “First results from DAMA/LIBRA and the combined results with DAMA/NaI,” *The European Physical Journal C*, vol. 56, pp. 333–355, Aug. 2008.
- [21] J. Amaré and *et al.*, “Annual modulation results from three-year exposure of ANAIS-112,” *Phys. Rev. D*, vol. 103, p. 102005, May 2021.
- [22] S. Murgia, “The Fermi-LAT galactic center excess: Evidence of annihilating dark matter?,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 70, no. 1, pp. 455–483, 2020.
- [23] M. G. Aartsen, R. Abbasi, Y. Abdou, M. Ackermann, J. Adams, J. Aguilar, M. Ahlers, D. Altmann, J. Auffenberg, X. Bai, *et al.*, “Search for dark matter annihilations in the sun with the 79-string icecube detector,” *Physical review letters*, vol. 110, no. 13, p. 131302, 2013.
- [24] A. Saina, M. Gutierrez, S. R. Gozzini, J. de Dios Zornoza, and S. Navas, “Indirect Search for Dark Matter with the KM3NeT Neutrino Telescope,” *PoS*, vol. ICRC2023, p. 1377, 2023.
- [25] R. Laureijs *et al.*, “Euclid: Esa’s mission to map the geometry of the dark universe,” in *Space Telescopes and Instrumentation 2012: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*, vol. 8442, pp. 329–336, SPIE, 2012.
- [26] G. Bertone and M. Fairbairn, “Compact stars as dark matter probes,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 043515, Feb 2008.

- [27] S.-C. Leung, M.-C. Chu, and L.-M. Lin, “Dark-matter admixed neutron stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 107301, Nov 2011.
- [28] D. Scordino and I. Bombaci, “Dark matter admixed neutron stars with a realistic nuclear equation of state from chiral nuclear interactions,” *Journal of High Energy Astrophysics*, vol. 45, pp. 371–381, 2025.
- [29] A. Das, T. Malik, and A. C. Nayak, “Dark matter admixed neutron star properties in light of gravitational wave observations: A two fluid approach,” *Phys. Rev. D*, vol. 105, p. 123034, Jun 2022.
- [30] V. Sagun, E. Gianfrandi, T. Dietrich, O. Ivanytskyi, R. Negreiros, and C. Providência, “What is the nature of the HESS J1731-347 compact object?,” *The Astrophysical Journal*, vol. 958, p. 49, nov 2023.
- [31] K. Schwarzschild, “Über das gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler flüssigkeit nach der einsteinschen theorie,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 424–434, 1916.
- [32] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2nd ed., 2009.
- [33] M. Aparicio Resco, “Introducción a la relatividad general y cosmología.” Manuscrito para el curso de Relatividad General y Cosmología, UEM, Jun 2024.
- [34] K. Schwarzschild, “Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 189–196, 1916.
- [35] P. Ciarcelluti and F. Sandin, “Have neutron stars a dark matter core?,” *Physics Letters B*, vol. 695, no. 1, pp. 19–21, 2011.
- [36] F. Sandin and P. Ciarcelluti, “Effects of mirror dark matter on neutron stars,” *Astroparticle Physics*, vol. 32, no. 5, pp. 278–284, 2009.
- [37] J. J. Brey Abalo, J. de la Rubia Pacheco, and J. de la Rubia Sánchez, *Mecánica Estadística*. Madrid: UNED, 1 ed., 2001.
- [38] D. Clayton, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*. Astronomy / Astrophysics, University of Chicago Press, 1983.
- [39] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Chicago: University of Chicago Press, 1939.
- [40] R. K. Pathria and P. D. Beale, *Statistical Mechanics*. Oxford: Elsevier, 3rd ed., 2011.

- [41] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed., 2006.
- [42] O. Ivanytskyi, V. Sagun, and I. Lopes, “Neutron stars: New constraints on asymmetric dark matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, p. 063028, Sep 2020.
- [43] V. Sagun, E. Gianfrandi, O. Ivanytskyi, I. Lopes, and K. A. Bugaev, “Constraints on the fermionic dark matter from observations of neutron stars,” in *Proceedings of Science (PANIC2021)*, p. 313, Sissa Medialab, 2022.
- [44] D. García Tejada, “DANTE.py – Dark matter Admixed Neutron sTar solvEr.” <https://github.com/Diego-gt-phys/DANTE>, 2025. GitHub repository.
- [45] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2nd ed., 2002.
- [46] GeeksforGeeks contributors, “Runge kutta 4th order method to solve differential equation.” <https://www.geeksforgeeks.org/runge-kutta-4th-order-method-solve-differential-equation/>, 2018. Accessed: 2025-05-07.
- [47] S. Hughes, “General relativity (8.962).” <https://ocw.mit.edu/courses/8-962-general-relativity-spring-2020/>, 2020. MIT OpenCourseWare, Massachusetts Institute of Technology, accessed May 2, 2025.
- [48] D. R. Lorimer and M. Kramer, *Handbook of Pulsar Astronomy*, vol. 4 of *Cambridge Observing Handbooks for Research Astronomers*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.
- [49] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts, and J. W. T. Hessels, “A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay,” *Nature*, vol. 467, pp. 1081–1083, Oct. 2010.
- [50] B. P. Abbott and *et al.*, “Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, p. 161101, Oct 2017.
- [51] J. M. Lattimer, “Neutron star mass and radius measurements,” *Universe*, vol. 5, no. 7, 2019.
- [52] J. M. Lattimer and M. Prakash, “The physics of neutron stars,” *Science*, vol. 304, no. 5670, pp. 536–542, 2004.
- [53] H. T. Cromartie and *et al.*, “Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar,” *Nature Astronomy*, vol. 4, pp. 72–76, Jan. 2020.
- [54] G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland, “The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models,” *apj*, vol. 170, p. 299, Dec. 1971.

- [55] J. W. Negele and D. Vautherin, “Neutron star matter at sub-nuclear densities,” *nphysa*, vol. 207, pp. 298–320, June 1973.
- [56] M. Misiaszek and N. Rossi, “Direct detection of dark matter: A critical review,” *Symmetry*, vol. 16, no. 2, 2024.
- [57] J. Ellis, G. Hütsi, K. Kannike, L. Marzola, M. Raidal, and V. Vaskonen, “Dark matter effects on neutron star properties,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, p. 123007, Jun 2018.
- [58] A. E. Nelson, S. Reddy, and D. Zhou, “Dark halos around neutron stars and gravitational waves,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2019, p. 012, jul 2019.
- [59] X. Li, F. Wang, and K. Cheng, “Gravitational effects of condensate dark matter on compact stellar objects,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2012, p. 031, oct 2012.
- [60] K. C. Gendreau, Z. Arzoumanian, and T. Okajima, “The Neutron star Interior Composition Explorer (NICER): an Explorer mission of opportunity for soft x-ray timing spectroscopy,” in *Space telescopes and instrumentation 2012: ultraviolet to gamma ray*, vol. 8443, pp. 322–329, SPIE, 2012.
- [61] M. C. Miller and *et al.*, “The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 918, p. L28, sep 2021.
- [62] I. I. Shapiro, “Fourth test of general relativity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 789–791, Dec 1964.
- [63] M. Bezares, D. Viganò, and C. Palenzuela, “Gravitational wave signatures of dark matter cores in binary neutron star mergers by using numerical simulations,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, p. 044049, Aug 2019.
- [64] M. Hippert, E. Dillingham, H. Tan, D. Curtin, J. Noronha-Hostler, and N. Yunes, “Dark matter or regular matter in neutron stars? how to tell the difference from the coalescence of compact objects,” *Phys. Rev. D*, vol. 107, p. 115028, Jun 2023.

