



**Universidad
Europea**

UNIVERSIDAD EUROPEA DE MADRID

**ESCUELA DE ARQUITECTURA, INGENIERÍA Y
DISEÑO**

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**ESTUDIO DE QUBITS SEMICONDUCTORES
MEDIANTE INTERFEROMETRÍA LZSM**

JORGE BONILLA RODRÍGUEZ

Dirigido por

Dr. RODRIGO BLASCO CHICANO

CURSO 2024-2025

TÍTULO: ESTUDIO DE QUBITS SEMICONDUCTORES MEDIANTE INTERFEROMETRÍA LZSM.

AUTOR: JORGE BONILLA RODRÍGUEZ

TITULACIÓN: GRADO EN FÍSICA

DIRECTORES DEL PROYECTO: Dr. RODRIGO BLASCO CHICANO

FECHA: 3 de junio de 2025

RESUMEN

Este trabajo de fin de grado, realizado en el marco de uno de los proyectos del grupo de investigación Novel Platforms and Nano-devices for Quantum Simulation and Computation en el Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid (ICMM-CSIC), estudia la dinámica de qubits en puntos cuánticos semiconductores mediante interferometría de Landau-Zener-Stückelberg-Majorana (LZSM), una técnica basada en la manipulación coherente de sistemas de dos o más niveles bajo una perturbación periódica. Esta herramienta permite explorar transiciones cuánticas inducidas por cruces evitados múltiples, revelando información esencial sobre la estructura energética del sistema y su sensibilidad a parámetros de control externos.

Se parte del análisis de un sistema de dos niveles bajo una modulación lineal y oscilatoria, describiendo su evolución mediante el formalismo de Floquet y modelos analíticos como el modelo de impulso adiabático (AIM). Se implementan simulaciones numéricas y se contrastan con expresiones analíticas que permiten describir la probabilidad de transición en función de los parámetros. Se identifican condiciones de resonancia multifotónica, efectos de interferencia constructiva y destructiva, y se analizan diagramas de interferencia LZSM característicos en diferentes regímenes (adiabático y diabático), incluyendo expresiones explícitas para analizar físicamente la probabilidad promedio de excitación. Finalmente, el estudio se extiende a un modelo realista de cuatro niveles que incorpora el grado de libertad de valle energético, relevante en sistemas de puntos cuánticos dobles de silicio tipo Si/SiGe.

ABSTRACT

This bachelor's final project, carried out as part of a project within the group Novel Platforms and Nano-devices for Quantum Simulation and Computation at the Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid (ICMM-CSIC), investigates the dynamics of qubits in semiconductor quantum dots using Landau–Zener–Stückelberg–Majorana (LZSM) interferometry. This technique is based on the coherent manipulation of two- and multi-level systems under periodic driving and enables the exploration of quantum transitions induced by multiple avoided crossings, revealing essential information about the system's energy structure and its sensitivity to external control parameters.

The study begins with the analysis of a two-level system under linear and oscillating bias, describing its evolution using Floquet theory and analytical models such as the adiabatic-impulse model (AIM). Numerical simulations are implemented and compared with analytical expressions that describe the transition probability as a function of system parameters. Multiphoton resonance conditions, constructive and destructive interference effects are identified, and characteristic LZSM interference patterns are analyzed in both the adiabatic and diabatic regimes, including explicit formulas that allow for a physical analysis of the average excitation probability. Finally, the study is extended to a realistic four-level model that incorporates the valley degree of freedom, which is relevant in silicon-based double quantum dot systems (Si/SiGe).

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero dar las gracias a mis padres por haberme apoyado siempre y por haber hecho posible que pudiera estudiar esta carrera. A mi hermano, por ser desde siempre un referente y un ejemplo que admiro profundamente. Y también al resto de mi familia, que en todo momento me ha hecho sentir acompañado y respaldado.

Gracias a mis compañeros y amigos, con quienes he compartido estos años. Hemos pasado por mucho juntos, y vuestro apoyo, tanto dentro como fuera de las aulas, ha sido una parte fundamental del camino.

Agradezco también a los profesores que he tenido durante la carrera, que han dejado una huella en mi forma de pensar y aprender. En especial, a mi tutor Rodrigo, por su apoyo y confianza en este proyecto.

Y, por supuesto, quiero agradecer de corazón a Gloria Platero y Sigmund Kohler por haberme acogido en su grupo de investigación, proponerme este proyecto y acompañarme durante todo el proceso. Ha sido un verdadero privilegio aprender de vosotros y formar parte del grupo.

La naturaleza no es clásica. Si quieres hacer una simulación de la naturaleza, será mejor que la hagas con la mecánica cuántica, y por Dios que es un problema maravilloso porque no parece nada fácil.

Richard Feynman

TABLA RESUMEN

	DATOS
Nombre y apellidos:	Jorge Bonilla Rodríguez
Título del proyecto:	Estudio de qubits semiconductores mediante interferometría LZSM
Directores del proyecto:	Rodrigo Blasco Chicano
El proyecto se ha realizado en colaboración de una empresa o a petición de una empresa:	SI
El proyecto ha implementado un producto:	NO
El proyecto ha consistido en el desarrollo de una investigación o innovación:	SI
Objetivo general del proyecto:	Investigar qubits en puntos cuánticos, mediante interferencia de Landau-Zener-Stückelberg-Majorana (LZSM). Para aplicación en el estudio del impacto del grado de libertad del valle energético en los patrones de interferencia.

Lista de Acrónimos

AIM adiabatic-impulse model. 3, 4, 13, 17, 22, 23, 25, 35, 36

DQD doble punto cuántico. 9, 28, 29

LZSM Landau-Zener-Stückelberg-Majorana. 2-5, 16, 21, 26, 31, 34-37

QD punto cuántico. 8, 9, 28, 30, 31

TM matriz de transferencia. 13

WKB Wentzel-Kramers-Brillouin. 12

Índice de figuras

1.	Comparación entre la evolución continua y estroboscópica en un sistema de dos niveles bajo una modulación oscilatoria. En rojo se muestra la probabilidad de transición calculando el propagador en cada paso y los puntos azules la muestran calculada de forma estroboscópica para tiempos $t = nT$.	8
2.	Diagrama energético para un sistema de dos niveles bajo un desajuste lineal, en gris se muestran los estados diabáticos ($\Delta = 0$), mientras que en rojo y azul los estados adiabáticos, además se remarca el <i>gap</i> dado por el parámetro de tunelamiento Δ .	11
3.	Probabilidad de transición Landau-Zener en régimen diabático $\delta \ll 1$. En rojo se muestra la probabilidad de transición Landau-Zener analítica y en azul se muestra la evolución continua resolviendo el hamiltoniano numéricamente.	13
4.	Probabilidad de transición con modulación oscilatoria. En azul se muestra la probabilidad de transición entre niveles diabáticos y en rojo la probabilidad de mantenerse en el mismo estado.	15
5.	Niveles energéticos adiabáticos bajo un desajuste oscilatorio. Se observan dos cruces evitados por periodo entre el nivel energético superior (rojo) e inferior (azul).	16
6.	Probabilidad P_+ de transición en un sistema con un desajuste oscilatorio tras múltiples pasos sobre los cruces evitados. En azul se muestra la evolución continua y en rojo los puntos estroboscópicos calculados con la fórmula 3.55.	20
7.	Diagramas de interferencia LZSM calculando la probabilidad de transición promedio en la base adiabática de forma analítica y numérica. En rojo se muestran los puntos de interferencia constructiva.	22
8.	Diagrama de interferencia LZSM calculando la probabilidad de transición promedio en la base diabática de forma analítica y numérica. En rojo se ven los puntos de resonancia debido a transiciones multifotónicas.	23
9.	Energías en una heteroestructura Si/SiGe, representado como un sistema de cuatro niveles, sometidos a un desajuste energético.	30
10.	Diagrama de interferencia LZSM en el régimen diabático, calculando la probabilidad de transición entre puntos y en el mismo punto, con una asimetría energética entre los niveles locales de $E_L = 1$ y $E_R = 6$.	32
11.	Diagrama de interferencia LZSM en el régimen diabático, calculando la probabilidad de transición entre puntos para parámetros extremos del ángulo entre los tunelamientos t y t' .	32

12. Diagrama de interferencia LZSM en un modelo de 4 niveles en el régimen adiabático, se puede observar la asimetría debido a la diferencia entre los niveles locales de cada punto E_L y E_R 33

Índice

Lista de Acrónimos	vi
Índice de figuras	vii
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Contexto y justificación	2
1.3. Planteamiento del problema	3
2. OBJETIVOS	4
2.1. Objetivo general	4
2.2. Objetivos específicos	4
2.3. Beneficios del proyecto	5
3. MARCO TEÓRICO	6
3.1. Teoría de Floquet	6
3.2. Puntos cuánticos como sistemas de dos niveles	8
3.2.1. Hamiltoniano y estados en un sistema de dos niveles	9
3.2.2. Probabilidad de Landau-Zener	10
3.2.3. Modulación oscilatoria	14
3.3. Diagramas de interferencia LZSM	16
4. METODOLOGÍA	25
4.1. Descripción de la solución, metodologías y herramientas empleadas	25
4.2. Recursos requeridos	26
5. RESULTADOS	28
5.1. Estados y energías en un DQD en Si/SiGe	28
5.2. Interferometría LZSM aplicada al modelo de 4 niveles	31
6. DISCUSIÓN	34
7. CONCLUSIONES	36
7.1. Conclusiones del trabajo	36
7.2. Conclusiones personales	36
8. FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO	37
Referencias	38

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Estado del arte

La mecánica cuántica surgió a principios del siglo XX para tratar de explicar fenómenos que la física clásica no lograba explicar. Entre los primeros trabajos destacados se encuentran los de Planck, acerca de la radiación del cuerpo negro, y Einstein, sobre el efecto fotoeléctrico. Asimismo, durante los años veinte, físicos como De Broglie, Heisenberg y Schrödinger contribuyeron significativamente, introduciendo conceptos como la dualidad onda-partícula, el principio de incertidumbre y la ecuación de onda.

La idea de aplicar la mecánica cuántica a la computación emergió en la década de 1980 cuando Paul Benioff propuso un modelo de computadora basado en principios de la mecánica cuántica [1], y Richard Feynman sugirió que las computadoras cuánticas podrían simular sistemas físicos complejos de manera más eficiente que las computadoras clásicas. En 1994, Peter Shor presentó un algoritmo cuántico para factorizar números grandes, generando así un gran interés por esta tecnología y sus aplicaciones.

Con el progreso en esta área, emergió la necesidad de definir las condiciones esenciales que un sistema físico debe cumplir para ser considerado una plataforma adecuada para la computación cuántica. Fue en este escenario donde David DiVincenzo elaboró una serie de cinco premisas fundamentales para lograr la computación cuántica universal [2]:

1. Un sistema físico escalable con qubits bien caracterizados.
2. La capacidad de inicializar los qubits en un estado fiducial simple, normalmente el estado base $|000\dots\rangle$.
3. Tiempos de coherencia cuántica largos, mucho mayores que el tiempo de operación de las puertas.
4. Un conjunto universal de puertas cuánticas.
5. Capacidad de medir qubits de forma individual.

Estos criterios siguen guiando el desarrollo experimental de tecnologías cuánticas y son referencia para evaluar la viabilidad de distintas plataformas físicas.

La implementación de qubits se ha logrado en distintos soportes físicos, cada uno con características particulares. Los qubits de iones atrapados ofrecen una manipulación precisa y tiempos de coherencia largos, aunque su escalabilidad es limitada. Los qubits fotónicos son ideales para la transmisión de información por su baja interacción con el entorno, pero la implementación de compuertas universales es compleja. Los qubits superconductores, ampliamente desarrollados, destacan por su alta controlabilidad y escalabilidad, aunque requieren entornos criogénicos extremadamente controlados [3].

En la actualidad, los qubits semiconductores presentan un estado de desarrollo avanzado. Ya se han implementado matrices de múltiples qubits en silicio, lo que demuestra su potencial de escalabilidad. Se ha conseguido inicializar en el estado base de manera fiable en condiciones experimentales. Los tiempos de coherencia alcanzan valores del orden de milisegundos gracias al uso de silicio purificado, situándose entre los más altos en plataformas sólidas. Además, se han desarrollado compuertas cuánticas con fidelidades superiores al 99 %, y la lectura individual de qubits se realiza con alta precisión [4].

Para caracterizar y controlar qubits, es esencial comprender su dinámica cuántica bajo pulsos externos y en interacción con el entorno. En este contexto, la interferometría de Landau–Zener–Stückelberg–Majorana (LZSM) es una herramienta clave para estudiar estos sistemas. Generando una perturbación oscilatoria (como un campo eléctrico o magnético) y modulando unos parámetros de control, el estado atraviesa repetidamente un cruce evitado obteniendo una fase en su camino, dando lugar a patrones de interferencias característicos en la probabilidad de transición del qubit.

El análisis de estos patrones de interferencia revela información fundamental sobre el sistema: por ejemplo, la visibilidad y la frecuencia de las oscilaciones dependen del acoplamiento entre niveles, mientras que la posición de las franjas refleja la fase acumulada o transiciones multifotónicas. Además, la pérdida de visibilidad indica procesos de decoherencia, lo que permite evaluar la estabilidad y el entorno del qubit [5]. Este tipo de interferometría es ampliamente utilizada en variedad de plataformas como qubits superconductores [6], centros de vacantes de nitrógeno (NV) en diamante [7] y puntos cuánticos entre otros.

En qubits semiconductores, esta técnica se ha usado para estudiar efectos clave como la hibridación entre los grados de libertad de valle y órbita en puntos cuánticos de Si/SiGe, que pueden ofrecer protección frente al ruido de carga [8]. También se ha empleado para medir tiempos de coherencia, para evaluar la calidad del qubit [9]. Además, ha facilitado la implementación de compuertas rápidas [10]. Todo esto convierte a la interferometría LZSM en una herramienta muy versátil para el estudio, diseño y optimización de qubits.

1.2. Contexto y justificación

Este trabajo se sitúa en el contexto actual de investigación en tecnologías cuánticas, con un enfoque en el diseño y control de qubits. En este ámbito, los puntos cuánticos de silicio destacan como una arquitectura prometedora, gracias a su potencial de escalabilidad y a sus excelentes propiedades de coherencia.

La motivación principal de este proyecto es investigar el uso de la interferometría LZSM como herramienta para el análisis y control de sistemas de qubits. En particular, se estudia su capacidad para extraer información relevante sobre transiciones cuánticas, acoplamientos efectivos y sensibilidad a distintos parámetros del sistema.

El desarrollo del trabajo se articula en torno a dos objetivos. En primer lugar, analizar la dinámica de sistemas de dos niveles, utilizando simulaciones numéricas y modelos analíticos como el adiabatic-impulse model (AIM), con el fin de comprender los mecanismos de interferencia bajo distintas condiciones de modulación. En segundo lugar, este estudio se amplía a un modelo más realista de cuatro niveles que incorpora explícitamente el grado de libertad de valle, característico de los puntos cuánticos en silicio, con el objetivo de examinar su impacto sobre la estructura de los diagramas LZSM y sus posibles aplicaciones experimentales.

Este proyecto se ha desarrollado en el seno del grupo de investigación Novel Platforms and Nano-devices for Quantum Simulation and Computation del Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid (ICMM-CSIC), con el propósito de aportar, desde una perspectiva teórica y computacional, una metodología para analizar sistemas mediante interferometría LZSM y en concreto profundizar en el conocimiento de la importancia del grado de libertad del valle energético en puntos cuánticos dobles en silicio. El conjunto de los códigos necesarios para obtener las gráficas y hacer las simulaciones se puede encontrar en este repositorio [11].

1.3. Planteamiento del problema

Aunque se ha avanzado notablemente en el diseño y control de qubits en puntos cuánticos, todavía existen limitaciones a la hora de entender en detalle cómo se comportan estos sistemas completamente. Por ello, la interferometría LZSM se ha consolidado como una herramienta versátil para estudiar la dinámica de qubits sometidos a modulaciones periódicas, permitiendo acceder a información sobre transiciones cuánticas, acoplamientos efectivos y procesos de decoherencia. No obstante, su aplicación en sistemas con mayor complejidad interna, como aquellos que incorporan el grado de libertad de valle, plantea nuevos desafíos a la hora de interpretar los patrones de interferencia que se observan.

En este contexto, surge la necesidad de analizar de forma estructurada cómo varía la respuesta del sistema en distintos regímenes de operación y modelos, combinando descripciones analíticas y simulaciones numéricas. Este trabajo se plantea como una contribución en esa dirección, explorando el uso de la interferometría LZSM como herramienta de caracterización en sistemas de dos y más niveles, con el objetivo de comprender mejor su aplicabilidad y limitaciones en escenarios más realistas.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo general

El objetivo general es estudiar la dinámica de qubits en puntos cuánticos semiconductores mediante interferometría LZSM, comenzando por sistemas básicos de dos niveles y extendiendo el análisis a un sistema más complejo de cuatro niveles que incorpora el grado de libertad de valle. Se emplearán modelos analíticos y simulaciones numéricas para caracterizar la evolución del sistema en distintos regímenes.

2.2. Objetivos específicos

- Analizar la teoría de Floquet para sistemas periódicos, con el objetivo de comprender cómo se describe la evolución en sistemas modulados periódicamente en el tiempo y obtener un método para calcular la evolución de estos sistemas de forma estroboscópica.
- Estudiar las diferentes bases de un sistema de dos niveles, analizando las energías y los autoestados, y comprendiendo cómo influyen el acoplamiento y el *detuning* en la dinámica del sistema. Para poder calcular y comprender la probabilidad de transición de Landau-Zener en cruces evitados, como base para entender transiciones no adiabáticas en sistemas con modulación periódica.
- Estudiar el efecto de una modulación oscilatoria sobre el sistema, para obtener las condiciones de resonancia multifotónica y la función de la amplitud y su frecuencia en la evolución.
- Aplicar el AIM para describir la dinámica completa del qubit bajo un desajuste oscilatorio, creando así un marco analítico tratable para estos sistemas y comparar los resultados con simulaciones numéricas, evaluando así su utilidad como herramienta analítica y la mejora computacional que presenta frente al cálculo numérico.
- Representar diagramas de interferencia LZSM en función de ϵ_0 (desajuste inicial) y A (amplitud de la modulación), para visualizar las condiciones de resonancia y la respuesta del qubit a parámetros externos.
- Presentar un modelo realista de qubits en Si/SiGe, donde al incluir el efecto del valle energético del silicio se convierte en un modelo de cuatro niveles. Analizar energías y estados en este nuevo sistema, para comprender cuales son los parámetros relevantes, como los acoplamientos o la modulación externa, y su impacto en la dinámica.
- Realizar un análisis analítico de las condiciones de resonancia en el régimen de modulación rápida, y comprobar los resultados mediante diagramas de interferencia LZSM.

- Comparar los resultados obtenidos numéricamente en el régimen adiabático con resultados experimentales para validar el modelo.

2.3. Beneficios del proyecto

Este trabajo hace un análisis detallado de la dinámica de qubits en puntos cuánticos semiconductores mediante interferometría LZSM, lo que ayuda a comprender cómo se comportan estos sistemas bajo modulaciones periódicas. El análisis de la evolución tanto en sistemas de dos como de cuatro niveles proporciona una base sólida para entender fenómenos de interferencia cuántica y transiciones controladas. Además, es aplicable a otras plataformas de qubits.

Durante el transcurso del proyecto se ha desarrollado un código, el cual permite de forma sencilla aplicar esta herramienta a diferentes implementaciones de qubits, ajustando los convenientes parámetros al caso particular. Al utilizar tanto modelos analíticos como simulaciones numéricas se facilita la interpretación de los resultados y permite entender el sistema desde distintos puntos de vista. Incorporar el grado de libertad de valle en el modelo extiende el estudio a situaciones más realistas, como las que se encuentran en puntos cuánticos de silicio, y valida la utilidad del modelo en sistemas con una complejidad mayor a la de dos niveles.

En conjunto, el proyecto aporta una visión clara y estructurada de la interferometría LZSM, herramienta que resulta útil en el diseño, caracterización y mejora de qubits en el contexto de tecnologías cuánticas.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Teoría de Floquet

Considerando inicialmente el problema cuántico general descrito por una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo con un Hamiltoniano periódico en el tiempo.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad H(t+T) = H(t). \quad (3.1)$$

La evolución temporal del estado cuántico desde un instante inicial t_0 hasta un tiempo final t_1 está dada por el operador de evolución temporal:

$$U(t_1, t_0) = \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} H(t) dt \right). \quad (3.2)$$

donde \mathcal{T} denota el operador de ordenación temporal.

La periodicidad del Hamiltoniano implica que, al igual que sucede en sistemas con periodicidad espacial analizados mediante la teoría de Bloch, el sistema puede describirse mediante soluciones especiales, denominadas estados de Floquet, cuya forma general es:

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{-i\varepsilon_n t/\hbar} |\Phi_n(t)\rangle, \quad |\Phi_n(t+T)\rangle = |\Phi_n(t)\rangle. \quad (3.3)$$

Aquí, ε_n son las llamadas cuasienergías y los estados $|\Phi_n(t)\rangle$ se conocen como modos o autoestados periódicos de Floquet. Estas cuasienergías juegan un papel análogo al de las energías en sistemas estáticos, con la diferencia de que están definidas módulo $\hbar\omega$, donde $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental de la perturbación periódica. Esto significa que las cuasienergías no son únicas, sino que están definidas en zonas periódicas análogas a las zonas de Brillouin en el espacio de los momentos en la teoría de Bloch [12].

Propiedades de la teoría de Floquet

Una propiedad fundamental de estos estados es que son autovectores del operador de evolución en un periodo:

$$U(t_0 + T, t_0) |\psi_n(t_0)\rangle = e^{-i\varepsilon_n T/\hbar} |\psi_n(t_0)\rangle. \quad (3.4)$$

Este operador, permite obtener el espectro de cuasienergías mediante su diagonalización en un instante arbitrario t_0 , ya que los autovalores $e^{-i\varepsilon_n T/\hbar}$ no dependen del valor de t_0 .

Una vez determinadas las cuasienergías y los estados $|\psi_n(t_0)\rangle$, es posible obtener su evolución temporal completa mediante:

$$|\psi_n(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_n(t_0)\rangle, \quad (3.5)$$

Los estados de Floquet pueden elegirse para formar una base ortonormal completa en cualquier instante t . Como consecuencia, el operador de evolución temporal puede escribirse como:

$$U(t_2, t_1) = \sum_n e^{-i\varepsilon_n(t_2-t_1)/\hbar} |\Phi_n(t_2)\rangle \langle \Phi_n(t_1)|. \quad (3.6)$$

Esto permite expresar la evolución de un estado cuántico arbitrario como una superposición de estados de Floquet:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-i\varepsilon_n(t-t_0)/\hbar} |\Phi_n(t)\rangle, \quad c_n = \langle \Phi_n(t_0) | \psi(t_0) \rangle. \quad (3.7)$$

Esta descomposición revela dos escalas temporales en la dinámica:

- (i) Oscilaciones rápidas asociadas a la periodicidad de los modos $|\Phi_n(t)\rangle$, también conocida como micromovimiento,
- (ii) Dinámica lenta causada por el desfase relativo entre los factores de fase $e^{-i\varepsilon_n t/\hbar}$.

Si el sistema se encuentra inicialmente en un solo estado de Floquet, su evolución será periódica (salvo por un factor de fase global); en cambio, una superposición de varios modos conlleva una evolución no periódica debido a la interferencia entre cuasienergías. Así, la teoría de Floquet permite descomponer la dinámica de sistemas periódicos en componentes rápidas y lentas [13].

Una estrategia útil para estudiar la dinámica efectiva de sistemas periódicos consiste en analizar su evolución estroboscópica, es decir, observar la evolución del estado cuántico únicamente en instantes separados por un múltiplo del periodo T . Esta técnica permite eliminar las oscilaciones rápidas debidas al micromovimiento, resaltando únicamente la evolución lenta gobernada por las cuasienergías, como se ve reflejado en la figura 1.

Partiendo del operador de evolución temporal [Ec. 3.2] para un periodo T la evolución en tiempos $t = nT$, con $n \in \mathbb{Z}$, se obtiene aplicando consecutivamente el propagador, tal que:

$$U(nT, 0) = [U(T, 0)]^n. \quad (3.8)$$

Esto se puede deducir, siguiendo el desarrollo de [14], de modo que primero se descomponen la integral del propagador total como suma de integrales idénticas:

$$U(nT, 0) = \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^{nT} H(t) dt \right) = \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)T}^{kT} H(t) dt \right). \quad (3.9)$$

Reescribiendo la suma dentro del exponente como un producto de exponenciales, y considerando que los integrandos son periódicos e idénticos en cada intervalo, además de que conmutan entre sí, es posible introducir el operador de ordenación temporal dentro del

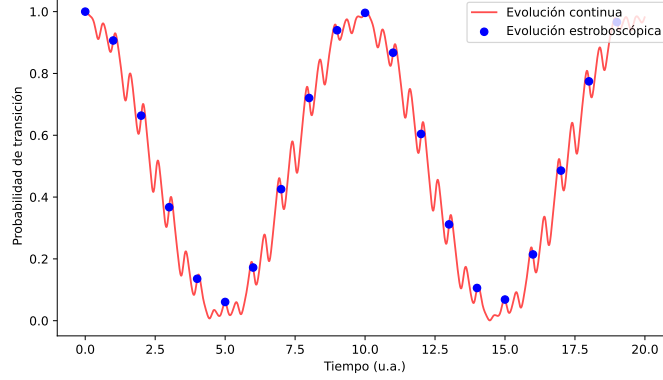


Figura 1: Comparación entre la evolución continua y estroboscópica en un sistema de dos niveles bajo una modulación oscilatoria. En rojo se muestra la probabilidad de transición calculando el propagador en cada paso y los puntos azules la muestran calculada de forma estroboscópica para tiempos $t = nT$.

producto. De este modo, se obtiene:

$$U(nT, 0) = \prod_{k=1}^n \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H(t) dt \right) = [U(T, 0)]^n. \quad (3.10)$$

Esta propiedad, aunque a primera vista básica, tendrá una gran importancia a lo largo del trabajo, puesto que permitirá estudiar sistemas complejos reduciendo costos computacionales.

Es importante remarcar que en las simulaciones numéricas se utilizarán unidades naturales $\hbar = 1$, con el objetivo de simplificar los cálculos y facilitar su interpretación. No obstante, en todas las deducciones analíticas se mantendrá explícitamente el valor de \hbar , con el fin de conservar la generalidad y claridad de las expresiones.

3.2. Puntos cuánticos como sistemas de dos niveles

Los puntos cuánticos son nanoestructuras semiconductoras que confinan a los electrones en las tres dimensiones espaciales, generando un espectro de niveles de energía discretos. Esta propiedad permite modelarlos como sistemas de dos niveles, al seleccionar dos estados energéticos bien definidos para representar los estados lógicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

Una implementación común es el qubit de espín propuesto por Loss y DiVincenzo, en el que la información se codifica en el espín de un único electrón confinado en un punto cuántico (QD). En este caso, los estados de espín “arriba” ($|\uparrow\rangle$) y “abajo” ($|\downarrow\rangle$) se utilizan como base computacional [15].

También son ampliamente utilizados los qubits de carga, en los que los estados lógicos corresponden a la localización del electrón en un sistema de doble punto cuántico (DQD) en el punto izquierdo $|L\rangle$ o derecho $|R\rangle$ del qubit [16].

Cabe destacar que, aunque estas y otras implementaciones físicas sean distintas, la formulación matemática que describe la dinámica de un sistema de dos niveles es común a todas ellas. Por lo tanto, el tratamiento matemático será aplicable a cualquier qubit basado en dos niveles energéticos, independientemente de su realización física específica.

3.2.1. Hamiltoniano y estados en un sistema de dos niveles

Para elegir un sistema concreto, se considerará a partir de este momento el caso de un DQD, cuya dinámica puede describirse en la base: $\mathcal{B} = \{|L\rangle, |R\rangle\}$ la cual conocemos como la base diabática o de estados de carga.

En un primer modelo sin interacción entre los dos estados, y por tanto sin transiciones entre estados, el Hamiltoniano actúa de forma diagonal sobre esta base:

$$H |L\rangle = \epsilon_L |L\rangle, \quad (3.11)$$

$$H |R\rangle = \epsilon_R |R\rangle. \quad (3.12)$$

Donde ϵ_L y ϵ_R son las energías asociadas a cada uno de los puntos cuánticos, determinadas por factores como los potenciales eléctricos locales o desajustes de energía entre ambos.

No obstante, para describir correctamente la física del sistema, es fundamental incluir el efecto túnel entre los dos estados. Este fenómeno cuántico permite que el electrón pase de un QD al otro incluso en ausencia de energía suficiente para hacerlo clásicamente. El túnel introduce una mezcla coherente entre los estados $|L\rangle$ y $|R\rangle$, dando lugar a oscilaciones entre ellos.

Este acoplamiento se introduce como un término fuera de la diagonal en el Hamiltoniano, que toma la forma:

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_L & \Delta/2 \\ \Delta/2 & \epsilon_R \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde Δ representa la amplitud de túnel, es decir, la magnitud del acoplamiento entre los estados, que determina la probabilidad de transición entre ellos

Para analizar más fácilmente el sistema, se define el *detuning*, $\epsilon = \epsilon_L - \epsilon_R$, que mide la diferencia de energía entre los dos estados, el cual es típicamente modulado temporalmente de forma experimental.

$$H = \begin{bmatrix} \epsilon(t)/2 & \Delta/2 \\ \Delta/2 & -\epsilon(t)/2 \end{bmatrix} = \frac{\epsilon(t)}{2} \sigma_z + \frac{\Delta}{2} \sigma_x \quad (3.14)$$

Siendo σ_x y σ_z las matrices de Pauli. Esta representación con el *detuning* es especialmente útil para estudiar la dinámica del qubit, ya que muestra cómo el desajuste energético y el acoplamiento controlan la evolución del sistema.

Por otro lado, en este tipo de sistemas, resulta útil considerar la base adiabática, formada por los autoestados del Hamiltoniano una vez que se ha incluido el acoplamiento túnel. Esta base se obtiene al diagonalizar el Hamiltoniano, lo cual conduce a dos niveles de energía conocidos como energías adiabáticas:

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon(t)^2 + \Delta^2} = \pm \frac{1}{2} \Delta E(t). \quad (3.15)$$

donde ΔE representa la separación energética entre niveles y está determinada por el *detuning* ϵ y el acoplamiento Δ .

Los autoestados adiabáticos correspondientes se expresan como combinaciones lineales de los estados de carga $|L\rangle$ y $|R\rangle$, con coeficientes que dependen de la relación entre ϵ y ΔE . Se escriben como:

$$|E_+\rangle = \gamma_- |L\rangle - \gamma_+ |R\rangle, \quad (3.16)$$

$$|E_-\rangle = \gamma_+ |L\rangle + \gamma_- |R\rangle. \quad (3.17)$$

donde:

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{\epsilon(t)}{\Delta E}}. \quad (3.18)$$

Estos estados constituyen una base natural para describir la evolución del sistema cuando las condiciones externas varían lentamente. En este régimen, el teorema adiabático garantiza que, si el sistema parte de un autoestado del Hamiltoniano, permanecerá en él a lo largo de la evolución. Así, la dinámica se restringe a seguir las curvas de energía E_{\pm} , con los autoestados $|E_{\pm}\rangle$.

3.2.2. Probabilidad de Landau-Zener

En sistemas cuánticos de dos niveles, aplicar una modulación temporal al parámetro de control, en este caso, el *detuning* permite inducir transiciones entre los estados del sistema de forma controlada. Una de las formas más simples y fundamentales de modulación es el desajuste lineal, dado por: $\epsilon(t) = vt$, donde v representa la velocidad del barrido.

Este tipo de dinámica, además de ser analíticamente resoluble, permite entender cómo parámetros como la velocidad del barrido y el acoplamiento afectan las transiciones entre niveles. Su estudio ofrece una base útil para abordar modelos más complejos, como los que incluyen modulaciones oscilatorias.

Un primer análisis de estos sistemas se puede hacer analizando cómo evolucionan las energías diabáticas y adiabáticas [Ec. 3.15] ante esta perturbación, de modo que se obtiene la siguiente gráfica.

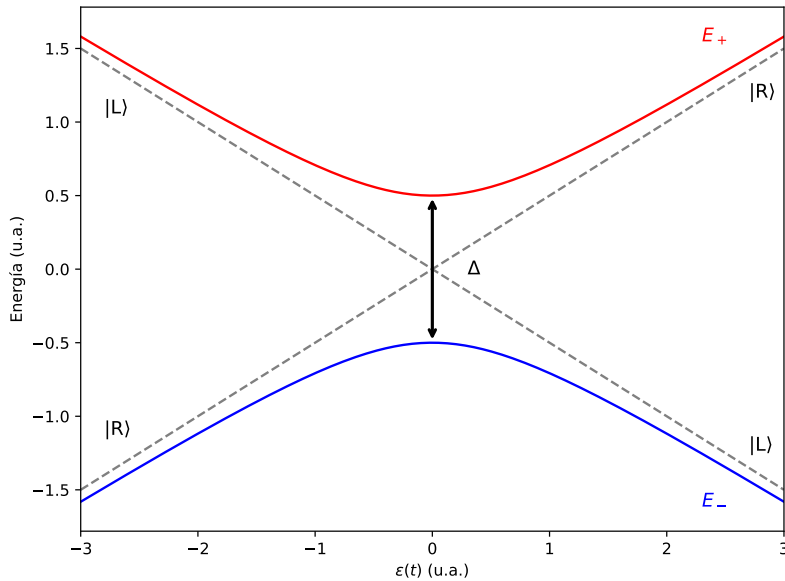


Figura 2: Diagrama energético para un sistema de dos niveles bajo un desajuste lineal, en gris se muestran los estados diabáticos ($\Delta = 0$), mientras que en rojo y azul los estados adiabáticos, además se remarca el *gap* dado por el parámetro de tunelamiento Δ .

De esta se obtiene uno de los resultados más importantes de estos sistemas conocido como cruce evitado, que surge cuando existe un acoplamiento entre los estados. En ausencia de este acoplamiento, las energías locales se cruzan en $\epsilon(t) = 0$, dando lugar a un cruce real. Sin embargo, al introducir el término de acoplamiento, los estados se mezclan y las autoenergías se separan, generando un *gap* (separación energética entre niveles), el cual depende directamente del acoplamiento túnel Δ .

Una característica importante de los cruces evitados se consigue al analizar la evolución de los niveles en diferentes bases. Partiendo del estado inicial $|R\rangle$, que en el límite $t \rightarrow -\infty$ corresponde al estado de menor energía E_- , una evolución lenta (adiabática) llevará al sistema hacia el estado $|L\rangle$ manteniéndose en el estado fundamental adiabático. En cambio, una evolución rápida (diabática) provocará una transición al estado adiabático de mayor energía E_+ , permaneciendo en el estado diabático $|R\rangle$.

Con esto en mente, el objetivo natural surge en la necesidad de calcular esta probabilidad de transición entre los autoestados del sistema durante el paso por la región de cruce evita-

do, así como caracterizar la fase acumulada durante este proceso. Partiendo del sistema en el estado fundamental adiabático $|E_-\rangle$ cuando $t \rightarrow -\infty$, se busca calcular la probabilidad P_{LZ} de que termine en el estado excitado adiabático $|E_+\rangle$ cuando $t \rightarrow +\infty$, tras atravesar el cruce evitado.

Para ello seguiremos el método de Landau [17], el cual no busca resolver exactamente la ecuación de Schrödinger, sino estimar la probabilidad de transición usando una aproximación semiclasica tipo Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB). Partimos del Hamiltoniano [Ec. 3.14] con desajuste lineal y con autoestados $E_{\pm}(t)$. Esta aproximación se basa en calcular el salto de fase entre las ramas adiabáticas en el plano complejo del tiempo, considerando que la evolución cuántica es adiabática, salvo en las inmediaciones del cruce evitado.

El sistema atraviesa un cruce en el que los niveles no se cruzan verdaderamente en el eje real, pero sí lo hacen formalmente en el plano complejo, en los puntos t_c tales que:

$$\epsilon(t_c)^2 + \Delta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_c = \pm i \frac{\Delta}{v}. \quad (3.19)$$

Así, la probabilidad de que el sistema cambie de rama adiabática se estima a partir de la fase acumulada a lo largo de una trayectoria en el plano complejo que conecta los niveles a través de ese cruce complejo. Esto da lugar a la siguiente expresión general:

$$P_{LZ} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \text{Im} \int_{t_0}^{t_c} [E_+(t) - E_-(t)] dt\right) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \text{Im} \int_{t_0}^{t_c} \sqrt{\epsilon(t)^2 + \Delta^2} dt\right) \quad (3.20)$$

Donde hemos usado $E_+(t) - E_-(t) = \sqrt{\epsilon(t)^2 + \Delta^2}$.

Evaluando explícitamente la integral desde $t_0 = 0$ hasta $t_c = i\Delta/v$:

$$\text{Im} \int_0^{i\Delta/v} \sqrt{(vt)^2 + \Delta^2} dt = \frac{\pi\Delta^2}{4v}. \quad (3.21)$$

Finalmente, obtenemos la fórmula de Landau-Zener para la probabilidad de transición:

$$P_{LZ} = \exp\left(-\frac{\pi\Delta^2}{2\hbar v}\right) = \exp(-2\pi\delta), \quad (3.22)$$

donde $\delta = \frac{\Delta^2}{4\hbar v}$ se define como el parámetro de adiabaticidad.

Además, se puede obtener la fase que el sistema acumula al atravesar el cruce, conocida como fase de Stokes, la cual no se deduce directamente en el modelo de Landau, pero sí puede obtenerse mediante enfoques más completos como el modelo exacto de Zener. Esta fase está dada por:

$$\phi_S(\delta) = \frac{\pi}{4} + \delta(\ln \delta - 1) + \arg[\Gamma(1 - i\delta)], \quad (3.23)$$

donde Γ es la función Gamma y $\arg[\cdot]$ denota la fase de su argumento. La fase de Stokes

será fundamental en el apartado de interferometría LZSM, ya que permite comprender la interferencia entre trayectorias cuánticas generadas por cruces evitados sucesivos.

Una vez calculada la probabilidad, es natural estudiar el comportamiento del sistema bajo distintas condiciones. Será especialmente útil estudiar el régimen adiabático en ambas bases, ya que esto permitirá identificar las transiciones no adiabáticas relevantes para el control de qubits en sistemas reales. Para ello, se comparará la evolución continua del sistema con la probabilidad analítica utilizando el método de matriz de transferencia (TM), el cual asume evolución adiabática fuera del cruce evitado y modela el cruce como una transición no adiabática puntual, similar al AIM que se abordará en la sección dedicada a LZSM.

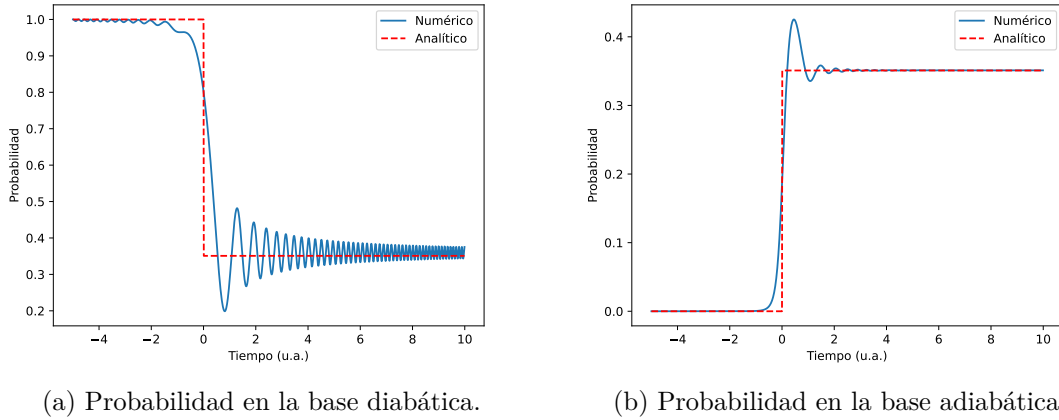


Figura 3: Probabilidad de transición Landau-Zener en régimen diabático $\delta \ll 1$. En rojo se muestra la probabilidad de transición Landau-Zener analítica y en azul se muestra la evolución continua resolviendo el hamiltoniano numéricamente

Como se puede ver, la probabilidad de Landau-Zener describe fenómenos físicos distintos según la base en la que trabajemos. En la base diabática representa la probabilidad de permanecer en el mismo estado, mientras que en la base adiabática, de manera análoga, representa la probabilidad de una transición entre estados. Aunque su interpretación varía, en ambos casos describen el mismo proceso físico. Ambas probabilidades muestran oscilaciones notables cerca del cruce evitado, especialmente en la base diabática debido a la rapidez de la evolución. Sin embargo, como mencionamos al establecer las condiciones, en el límite $t \rightarrow -\infty$ ambas tienden a estabilizarse en el valor analítico esperado, dado que los estados adiabáticos se aproximan a los estados diabáticos.

3.2.3. Modulación oscilatoria

Ahora estudiaremos el caso del Hamiltoniano de un sistema de dos niveles sometido a un desajuste oscilatorio en el tiempo, descrito por:

$$H(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon(t) & \Delta \\ \Delta & -\epsilon(t) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

donde $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \cos(\omega t)$. Aquí, ϵ_0 es el desajuste inicial y A la amplitud de una modulación armónica de frecuencia ω ; Δ es el acoplamiento constante entre los dos estados.

Para simplificar la dependencia temporal, realizamos una transformación de fases con el operador unitario:

$$U(t) = \exp\left(-i\frac{1}{2}\phi(t)\sigma_z\right), \quad (3.25)$$

donde la fase acumulada $\phi(t)$ es:

$$\phi(t) = \int_0^t \epsilon(t') dt' = \epsilon_0 t + \frac{A}{\omega} \sin(\omega t). \quad (3.26)$$

Aplicando esta transformación, el Hamiltoniano en el nuevo marco rotante es:

$$\tilde{H}(t) = U^\dagger(t)H(t)U(t) - iU^\dagger(t)\frac{d}{dt}U(t). \quad (3.27)$$

Al calcularlo explícitamente, se observa que el *detuning* $\epsilon(t)$ en la diagonal se cancela exactamente con la derivada temporal del operador $U(t)$, de modo que el Hamiltoniano transformado depende sólo del acoplamiento Δ . Utilizando las propiedades de las matrices de Pauli bajo rotaciones, obtenemos:

$$\tilde{H}(t) = \frac{\Delta}{2} (\sigma_x \cos \phi(t) + \sigma_y \sin \phi(t)). \quad (3.28)$$

Esto significa que el acoplamiento ya no es fijo, sino que rota continuamente en el plano xy del espacio de Bloch, siguiendo la fase dinámica $\phi(t)$.

Para tratar la dependencia complicada en $\phi(t)$, expandimos las funciones $\cos \phi(t)$ y $\sin \phi(t)$ utilizando la identidad de Jacobi-Anger, que establece:

$$e^{i\beta \sin(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{in\omega t}, \quad (3.29)$$

donde $J_n(\beta)$ son las funciones de Bessel de primer tipo. En nuestro caso, al escribir $\cos \phi(t)$

y $\sin \phi(t)$ en términos de exponenciales $e^{\pm i\phi(t)}$, aplicamos:

$$e^{\pm i\phi(t)} = e^{\pm i(\epsilon_0 t + \frac{A}{\omega} \sin(\omega t))} = e^{\pm i\epsilon_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{A}{\omega}\right) e^{in\omega t}, \quad (3.30)$$

reordenando:

$$e^{\pm i\phi(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{A}{\omega}\right) e^{i(\pm\epsilon_0 + n\omega)t}. \quad (3.31)$$

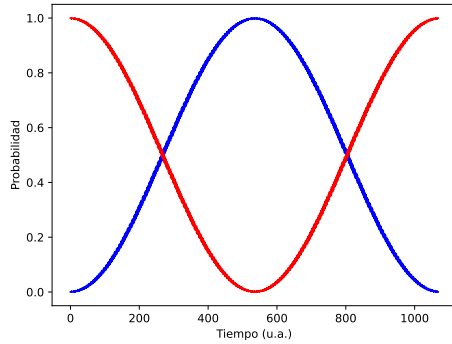
Así, $\cos \phi(t)$ y $\sin \phi(t)$ se expresan como una superposición de términos oscilando a frecuencias combinadas $\pm\epsilon_0 + n\omega$, representando procesos donde el sistema intercambia múltiplos n de cuantos de energía.

En la práctica, los términos que oscilan muy rápidamente se promedian a cero al integrar sobre tiempos largos, fenómeno conocido como la *rotating-wave approximation* (RWA). Sólo los términos de baja frecuencia (cerca de cero) contribuyen significativamente.

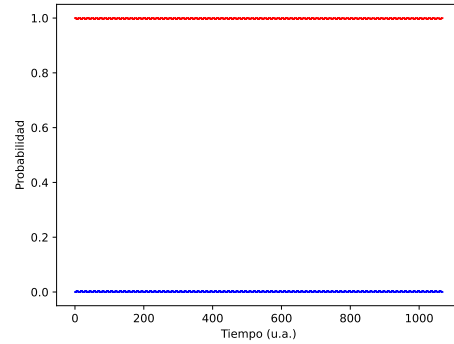
Esto lleva a la condición de resonancia:

$$\pm\epsilon_0 + n\omega \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 = n\omega, \quad (3.32)$$

donde n es un entero. Es decir, la transición eficiente entre niveles ΔE ocurre cuando el desajuste estático ϵ_0 coincide con un múltiplo de la frecuencia de modulación; esta condición se ve reflejada en la figura 4.



(a) Caso resonante $\epsilon_0 = 3\omega$.



(b) Caso no resonante $\epsilon_0 = 1,5\omega$.

Figura 4: Probabilidad de transición con modulación oscilatoria. En azul se muestra la probabilidad de transición entre niveles diabáticos y en rojo la probabilidad de mantenerse en el mismo estado.

Bajo esta condición, el Hamiltoniano efectivo se simplifica a:

$$H_{\text{eff}} = \frac{\Delta}{2} J_n\left(\frac{A}{\omega}\right) \sigma_x, \quad (3.33)$$

donde el acoplamiento efectivo es

$$\Delta_{\text{eff}} = \Delta \cdot J_n \left(\frac{A}{\omega} \right). \quad (3.34)$$

y está modulado por el valor de la función de Bessel.

Cuando $J_n(A/\omega) = 0$, el acoplamiento efectivo se anula y el sistema queda prácticamente 'congelado', un fenómeno conocido como localización dinámica, donde la dinámica coherente es suprimida debido a la modulación externa [18].

Esto permite hacer la ingeniería de transiciones: modulando A y ω , es posible controlar la amplitud de las oscilaciones entre los dos niveles, o incluso detenerlas completamente, abriendo así aplicaciones en el control de sistemas cuánticos.

Esta capacidad de manipulación precisa nos conduce al análisis de diagramas de interferencia LZSM, donde se estudian sistemáticamente las transiciones como función de los parámetros A , ω y ϵ_0 .

3.3. Diagramas de interferencia LZSM

Antes se ha estudiado el comportamiento efectivo del sistema bajo un desajuste oscilatorio para caracterizar su comportamiento ante ciertos parámetros para obtener sus condiciones de resonancia. El objetivo en este apartado será analizar la probabilidad de transición del sistema tras varios periodos de oscilación. Para ello debemos comprender cómo se comportan las energías bajo esta perturbación durante un periodo de evolución [Fig 5].

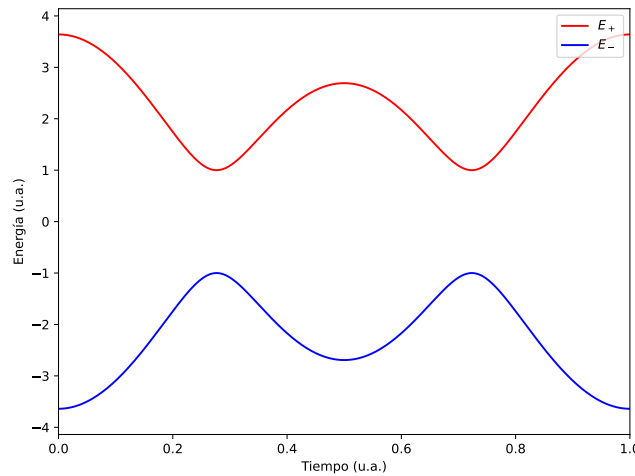


Figura 5: Niveles energéticos adiabáticos bajo un desajuste oscilatorio. Se observan dos cruces evitados por periodo entre el nivel energético superior (rojo) e inferior (azul).

Como se puede observar, al igual que en el caso de desajuste lineal, se produce el cruce evitado. Sin embargo, debido a la naturaleza oscilatoria de la modulación, este ocurre dos veces por periodo en t_1 , con $\omega t_1 = \arccos\left(\frac{\epsilon_0}{A}\right)$ y otra al volver en t_2 , donde $\omega t_2 = \pi + \omega t_1$. Correspondientes a los instantes en los que el sistema pasa por el valor crítico $\epsilon(t) = 0$, es decir, cuando se alcanza la distancia mínima entre niveles adiabáticos. Por tanto, los cruces evitados se repiten de manera periódica con el mismo intervalo temporal $T_d = 2\pi/\omega$.

Puesto que se busca estudiar la dinámica tras varios períodos de evolución y debido a la complejidad de la acumulación de fases entre cruces, el modelo AIM resulta especialmente útil. Este modelo propone que la evolución del sistema puede aproximarse como adiabática en todo momento excepto justo en los cruces evitados, donde se produce una transición instantánea (un impulso). Se seguirá el desarrollo llevado a cabo en [5] para desarrollar el modelo.

Evolución adiabática

En las regiones adiabáticas, el sistema sigue los autovalores del Hamiltoniano, acumulando una fase dinámica, pero sin cambiar de nivel. En la base adiabática, esta evolución se representa mediante el operador unitario:

$$U(\zeta(t, t_i)) = \exp(-i\zeta(t, t_i)\sigma_z), \quad (3.35)$$

donde la fase acumulada, similar al modelo de Landau, se obtiene por:

$$\zeta(t, t_i) = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_i}^t \Delta E(t') dt', \quad \Delta E(t) = \sqrt{\epsilon(t)^2 + \Delta^2}. \quad (3.36)$$

Esto implica que los estados $|E_+(t)\rangle$ y $|E_-(t)\rangle$ evolucionan únicamente adquiriendo fases opuestas, sin intercambio de población.

Transición no adiabática

Para modelar este impulso, es importante notar que es posible hacer una linealización de la modulación oscilatoria cerca del cruce evitado, tal que:

$$\epsilon(t) = (t - t_0) \left. \frac{d\epsilon}{dt} \right|_{t=t_0} + o(t - t_0), \quad (3.37)$$

De modo que, siendo la primera derivada no nula y despreciando términos de orden mayor, se redefine el parámetro de adiabaticidad como:

$$\delta = \frac{\Delta^2}{4\hbar \left. \frac{d\epsilon}{dt} \right|_{t=t_0}}. \quad (3.38)$$

Entonces se puede reescribir la probabilidad de transición usando la fórmula de Landau-Zener [Ec.3.22] con este nuevo parámetro de adiabaticidad. Además, por analogía directa entre el modelo lineal y oscilatorio, vemos que $v \sim A\omega$.

Entonces, en las inmediaciones del cruce evitado, el sistema puede realizar una transición no adiabática con probabilidad P_{LZ} . La transición se modela entonces mediante una matriz de transferencia N en la base adiabática:

$$N = \begin{pmatrix} Re^{-i\phi_S} & -T \\ T & Re^{i\phi_S} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

donde $R = \sqrt{1 - P_{LZ}}$, $T = \sqrt{P_{LZ}}$, y ϕ_S es la fase de Stokes.

La evolución completa a través de un cruce, incluyendo las fases acumuladas antes y después, se expresa como:

$$U(\zeta_f)NU(\zeta_i) = \begin{pmatrix} Re^{-i(\phi_S + \zeta_i + \zeta_f)} & -Te^{-i(\zeta_i - \zeta_f)} \\ Te^{i(\zeta_i - \zeta_f)} & Re^{i(\phi_S + \zeta_i + \zeta_f)} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

Asumiendo que el sistema comienza y termina su evolución lejos de los cruces, es decir, en regiones donde la evolución puede considerarse puramente adiabática, entonces toda la dinámica del ciclo puede describirse como dos evoluciones adiabáticas intercaladas por dos transiciones no adiabáticas. En ese caso, la evolución durante un ciclo completo se describe mediante la llamada matriz de doble paso Ξ :

$$\Xi = \sqrt{U_2} N^{-1} U_1 N \sqrt{U_2}. \quad (3.41)$$

Para obtener las componentes de esta matriz y poder realizar cálculos posteriores, resulta útil diagonalizar Ξ . Para ello, se introduce una matriz unitaria A de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21}^* \\ A_{21} & A_{11}^* \end{pmatrix}, \quad AA^\dagger = \mathbb{I}, \quad |A_{11}|^2 + |A_{21}|^2 = 1, \quad (3.42)$$

de modo que se cumple:

$$A\Xi A^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

donde ϕ es el ángulo de fase asociado a la evolución. Esta condición implica que la matriz Ξ puede escribirse como:

$$\Xi = A^\dagger \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} A, \quad (3.44)$$

a partir de lo cual se obtienen las expresiones explícitas para los elementos de Ξ :

$$\Xi_{11} = |A_{11}|^2 e^{i\phi} + |A_{21}|^2 e^{-i\phi}, \quad (3.45)$$

$$\Xi_{21} = -2iA_{11}A_{21} \sin \phi. \quad (3.46)$$

Entonces, al expresar los elementos de Ξ a partir del modelo de transferencia se obtiene:

$$\Xi_{11} = -R^2 e^{-i\zeta_+} - T^2 e^{-i\zeta_-}, \quad (3.47)$$

$$\Xi_{12} = -2iRT \sin(\Phi_{St}) = -\Xi_{12}^*, \quad (3.48)$$

con las fases definidas como:

$$\zeta_+ = \zeta_1 + \zeta_2 + 2\phi_S, \quad \zeta_- = \zeta_1 - \zeta_2, \quad \Phi_{St} = \phi_S + \zeta_1. \quad (3.49)$$

La probabilidad de encontrar el sistema en el estado excitado tras un ciclo completo es:

$$P_+^{\text{double}} = |\Xi_{12}|^2 = 4P(1 - P) \sin^2 \Phi_{St}. \quad (3.50)$$

Para comprender esta dinámica se puede hacer una analogía de este comportamiento con el de un interferómetro de Mach-Zehnder: cada cruce actúa como un divisor de haces, y las trayectorias cuánticas interferentes acumulan una diferencia de fase Φ_{St} , llamada fase de Stückelberg, que modula la visibilidad de la interferencia.

Transiciones múltiples

Una vez obtenida la dinámica al atravesar una vez el cruce es necesario comprender ahora el caso de múltiples cruces. La evolución del sistema después de n periodos completos puede describirse mediante matrices de evolución específicas para los distintos intervalos temporales. Si denotamos por T_d el periodo del desajuste oscilatorio, la evolución temporal queda definida por las siguientes relaciones:

$$U(t, t_1 + nT_d) \Xi^n, \quad \text{para } t - nT_d \in (t_1, t_2), \quad (3.51)$$

$$U(t, t_2 + nT_d) N U_1 \Xi^n, \quad \text{para } t - nT_d \in (t_2, t_1 + T_d), \quad (3.52)$$

donde Ξ representa la matriz de evolución asociada a un solo ciclo de cruce evitado, N y U_1 representan las contribuciones debidas a la dinámica adiabática entre cruces. El estado del sistema tras n periodos completos está, por tanto, dado por:

$$\Xi^n = \begin{pmatrix} \Xi_{11}^{(n)} & \Xi_{12}^{(n)} \\ -\Xi_{12}^{(n)*} & \Xi_{11}^{(n)*} \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

Los componentes se pueden obtener de forma similar a la usada para la ecuación 3.46 lo cual generalizando para n periodos se obtiene:

$$\Xi_{11}^{(n)} = \cos(n\phi) + i \frac{\text{Im} \Xi_{11}}{\sin \phi} \sin(n\phi), \quad \Xi_{12}^{(n)} = \Xi_{12} \frac{\sin(n\phi)}{\sin \phi}, \quad \phi = \arccos(\text{Re} \Xi_{11}). \quad (3.54)$$

De modo que la probabilidad de transición al estado excitado tras n cruces es:

$$P_+(n) = |\Xi_{12}^{(n)}|^2 = 4P(1-P) \sin^2 \Phi_{St} \cdot \frac{\sin^2(n\phi)}{\sin^2 \phi} = P_+^{\text{double}} \cdot \frac{\sin^2(n\phi)}{\sin^2 \phi} \quad (3.55)$$

Esta ecuación no solo permite analizar la dinámica del sistema de forma estroboscópica en tiempos $t = nT$ [Fig. 6], con un costo computacional significativamente menor que el de los métodos basados en la teoría de Floquet (aunque con una pérdida de precisión en ciertos regímenes), sino que además proporciona una base para un análisis analítico accesible, lo que facilita una comprensión más profunda del comportamiento del sistema.

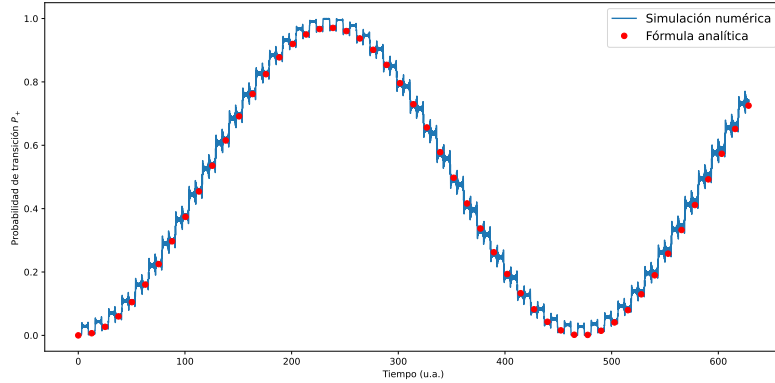


Figura 6: Probabilidad P_+ de transición en un sistema con un desajuste oscilatorio tras múltiples pasos sobre los cruces evitados. En azul se muestra la evolución continua y en rojo los puntos estroboscópicos calculados con la fórmula 3.55.

Con esto hemos obtenido una forma de analizar el comportamiento del sistema en función del tiempo. Pero típicamente esto no es algo que sea accesible experimentalmente, lo que buscamos obtener será la probabilidad promedio de que el sistema pueda cambiar de estado. Para ello, promediaremos la ecuación 3.55 sobre n ciclos de oscilación.

$$\overline{P_+} = \frac{|\Xi_{21}|^2}{2 \sin^2 \phi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\Xi_{21}|^2}{|\Xi_{21}|^2 + (\text{Im} \Xi_{11})^2} \quad (3.56)$$

Esto permitirá capturar el comportamiento resonante acumulado (constructivo o destructivo) a lo largo de muchos ciclos, además de proporcionar una medida comparable con observables experimentales, pudiendo obtener así condiciones en las que el sistema alcanza resonancia y acumulación de población en el estado excitado.

Se puede ver de forma directa del promedio que este alcanza su máximo cuando $\text{Im } \bar{\Xi}_{11} = 0$ dando la condición de resonancia: $(1 - P) \sin \zeta_+ - P \sin \zeta_- = 0$

En particular, en los regímenes adiabático y diabático, la condición de resonancia en función de las fases acumuladas adopta las siguientes formas:

$$\zeta_1 + \zeta_2 = k\pi \quad \text{para } \delta \gg 1 \quad (\text{adiabático}) \quad (3.57a)$$

$$\zeta_1 - \zeta_2 = k\pi \quad \text{para } \delta \ll 1 \quad (\text{diabático}). \quad (3.57b)$$

De tal forma que podemos usar la fórmula 3.36 para evaluar explícitamente ζ_+ y ζ_- para obtener las condiciones de resonancia, en función de los parámetros del sistema:

$$2A \approx k\pi\hbar\omega \quad \text{para } \delta \gg 1 \quad (\text{adiabático}), \quad (3.58a)$$

$$\varepsilon_0 \approx k\hbar\omega \quad \text{para } \delta \ll 1 \quad (\text{diabático}). \quad (3.58b)$$

Para el límite diabático se recupera la misma fórmula que en la ecuación 3.32, lo cual no es de extrañar, ya que en ambos casos se describe la probabilidad de transiciones multifotónicas, la energía efectiva de transición entre niveles $\varepsilon_0 \approx \Delta E$ domina sobre los demás parámetros del sistema. Por otro lado, en el régimen adiabático, donde la evolución del sistema es lenta y las transiciones entre niveles son poco probables, es la amplitud A la que adquiere un rol dominante, debido a que esta probabilidad se ve más influenciada por la acumulación de fase dinámica a través del cruce.

Para el caso adiabático la fórmula de transición promedio, teniendo en cuenta que $\sin^2(\Phi_{\text{St}}) = \frac{1}{4}(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-)$, toma la forma:

$$\bar{P}_+ = \frac{P(1 - P)(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-)}{P(1 - P)(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-) + [(1 - P) \sin \zeta_+ + P \sin \zeta_-]^2} \quad (3.59)$$

Reordenando y simplificando se llega finalmente a la fórmula:

$$\bar{P}_+ = \frac{P(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-)}{\sin^2 \zeta_+ + P(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-)} \quad (3.60)$$

De la cual se puede obtener el primer diagrama de interferencia LZSM, el cual comparamos con un método de resolución directa mediante la evolución del hamiltoniano [Fig. 7].

Se observa una clara concordancia entre los resultados del modelo AIM y los obtenidos mediante la evolución completa del Hamiltoniano. En particular, se verifica la condición de resonancia derivada previamente para el caso $\varepsilon_0 \approx 0$. Los demás puntos de interferencia pueden obtenerse de forma análoga, incorporando términos de orden superior en la expansión, lo que revela una dependencia conjunta de A y ε_0 , dando lugar a un patrón característico de curvas cóncavas como se ve en el diagrama y franjas de resonancia cuyo

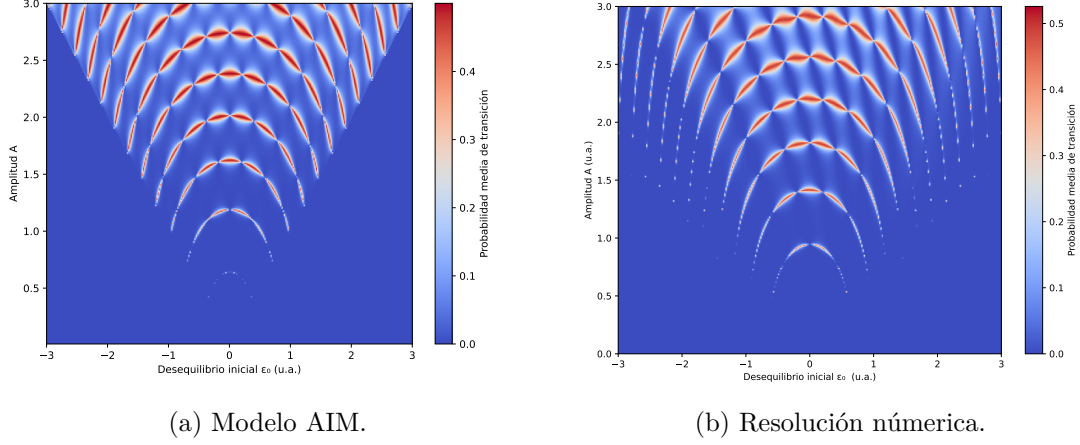


Figura 7: Diagramas de interferencia LZSM calculando la probabilidad de transición promedio en la base adiabática de forma analítica y numérica. En rojo se muestran los puntos de interferencia constructiva.

número viene dado por el correspondiente entero k . Es importante remarcar en este punto que el modelo AIM necesita de la presencia de cruces evitados en la evolución, por ello su rango de validez se centra en $\epsilon_0 < \|A\|$, fuera de este se supone que no hay transferencia.

Este tipo de diagramas no solo permiten visualizar las condiciones de resonancia, sino que resultan útiles en múltiples aplicaciones, como el análisis de coherencia cuántica, la identificación de *sweet spots*, es decir, puntos de operación donde el qubit presenta una dinámica más robusta frente al ruido, y el diseño de puertas lógicas cuánticas en función de los parámetros del sistema, entre otras aplicaciones discutidas en la introducción.

Para el caso de modulación rápida se puede obtener de la fórmula 3.56 aplicando las condiciones del régimen diabático:

$$\overline{P}_+ = \frac{2\pi\delta \cos^2(\zeta_2 - \pi/4)}{\sin^2 \zeta_- + 4\pi\delta \cos^2(\zeta_2 - \pi/4)} \quad (3.61)$$

De modo que, haciendo una comparación entre el modelo AIM y la resolución numérica del hamiltoniano, obtenemos la figura 8.

En este caso, el diagrama presenta franjas verticales correspondientes a $\epsilon_0 = k\hbar\omega$, es decir, cada una de las líneas representa una condición de resonancia multifotónica del sistema.

En las cercanías de la k -ésima resonancia, para $\omega \approx \omega^{(k)}$, se puede aproximar la probabilidad de transición como:

$$P_{\text{up}}^{(k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_k^2}{\Delta_k^2 + (k\hbar\omega - \epsilon_0)^2}, \quad (3.62)$$

donde Δ_k se corresponde con el acoplamiento efectivo (Ec 3.34) y en una primera aproxima-

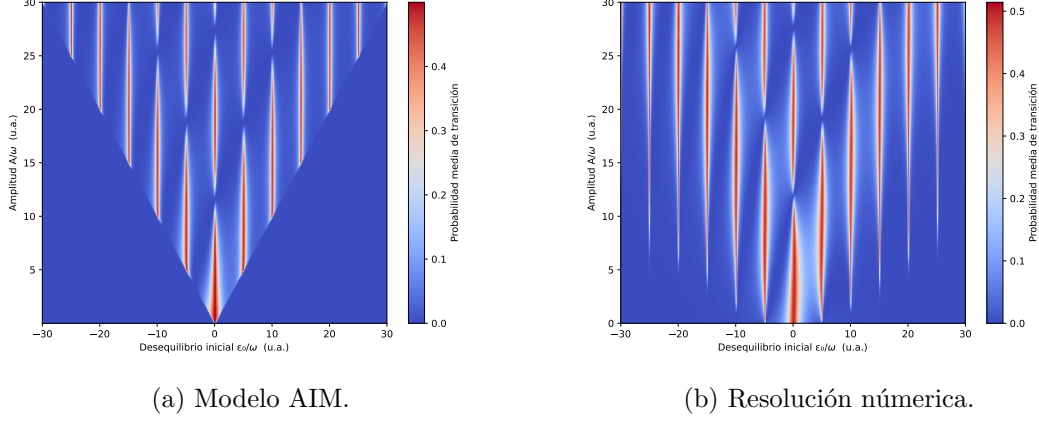


Figura 8: Diagrama de interferencia LZSM calculando la probabilidad de transición promedio en la base diabática de forma analítica y numérica. En rojo se ven los puntos de resonancia debido a transiciones multifotónicas.

mación en $\frac{A}{\omega}$ se puede expresar como:

$$\Delta_k = \Delta \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\pi A}} \cos\left(\frac{A}{\hbar\omega} - \frac{\pi}{4}(2k+1)\right). \quad (3.63)$$

La probabilidad total P_{up} se obtiene sumando las contribuciones individuales de cada k :

$$P_{\text{up}} = \sum_k P_{\text{up}}^{(k)}. \quad (3.64)$$

Esta fórmula es típicamente usada para describir estos sistemas donde la interferencia provoca franjas correspondientes a transiciones multifotónicas, por su simplicidad e independencia de las fases acumuladas. De esta forma, se ha podido demostrar que el modelo AIM es capaz de predecir con gran exactitud estos diagramas de interferencia.

En resumen, los diagramas de interferencia LZSM obtenidos mediante el modelo AIM nos permiten identificar de forma precisa las condiciones de resonancia y zonas de interferencia constructiva o destructiva con un menor costo computacional. Además, representa un marco analizable matemática y físicamente. Puesto que la resolución numérica, aunque sea más exacta, representa un costo computacional alto y es un modelo de caja negra.

En posteriores apartados, usaremos estos conceptos para definir una metodología concreta que permita escalar esto a análisis de sistemas más complejos. En concreto, presentaremos un modelo de cuatro niveles que incluye el grado de libertad de valle energético, característico de puntos cuánticos en Si/SiGe y aplicaremos esta metodología para caracterizar el sistema.

Cabe destacar que la metodología empleada es fácilmente extensible a otros sistemas cuánticos con estructuras de múltiples niveles y grados de libertad adicionales, como en el caso de puntos cuánticos triples, o arquitecturas más complejas que incluyen acoplamiento spin-valle o interacción con cavidades superconductoras.

4. METODOLOGÍA

4.1. Descripción de la solución, metodologías y herramientas empleadas

Para analizar la dinámica cuántica del sistema se usa la teoría de Floquet como herramienta fundamental. Esta permite estudiar sistemas periódicamente modulados de forma estroboscópica, sin necesidad de resolver toda la evolución numérica. Esta técnica reduce significativamente la carga computacional, es especialmente útil en sistemas modulados bajo una perturbación lenta o al escalar el análisis a modelos multinivel.

De forma general se seguirá una metodología, dividida en varios pasos fundamentales, que permitirá comprender las características de cualquier sistema y así poder emplear la solución y herramientas desarrolladas en este trabajo. En primer lugar, se obtienen las energías y autoestados del sistema a estudiar. Este paso es esencial para identificar los parámetros clave que definen su comportamiento, como los acoplamientos entre niveles, el *detuning* o los efectos de simetría. Entender estas características facilita el análisis posterior frente a perturbaciones externas, ya sea un campo eléctrico, magnético u otro tipo de modulación.

A continuación, se estudia la respuesta del sistema ante una modulación lineal y oscilatoria. Esto permite caracterizar los cruces evitados e identificar transiciones no adiabáticas. En particular, se presta atención a cómo estas perturbaciones afectan la probabilidad de transición entre niveles, un aspecto central en la caracterización de qubits.

Una parte importante del enfoque consiste en buscar condiciones que simplifiquen el análisis del sistema, normalmente mediante aproximaciones analíticas. Se trata de encontrar puntos de resonancia o simetrías que permitan entender su dinámica sin necesidad de recurrir a tratamientos analíticos complejos o simulaciones computacionalmente costosas.

Si es posible aplicarlo, un recurso útil será el AIM, que permite describir la evolución del sistema de forma analítica. Este enfoque resulta especialmente útil cuando el sistema puede aproximarse a un modelo efectivo de dos niveles, ya que en ese caso la dinámica se vuelve más tratable analíticamente. El AIM permite así estudiar cómo responde el sistema a variaciones de los parámetros externos y entender la interferencia cuántica de manera más intuitiva, sin recurrir a simulaciones completas.

Tras hacer todo el análisis analítico posible, se llevarán a cabo simulaciones numéricas para generar diagramas de interferencia LZSM, representando la probabilidad de transición promedio en función de los parámetros de control. Es importante diferenciar en este paso entre dos regímenes, cada uno fundamentalmente diferente y con características propias.

- Modulación rápida: donde las condiciones de resonancia obtenidas analíticamente pueden reflejarse en el patrón de interferencia, validando las predicciones del modelo.

- Modulación lenta: donde el sistema se comporta de forma más compleja y las estructuras del diagrama pueden revelar características internas del sistema, como acoplamientos ocultos o zonas de operación óptima.

Finalmente, se realizará una interpretación de los datos obtenidos, conectando los resultados con la física del sistema real. Es importante tener en cuenta al aplicar este modelo que el uso de la base apropiada al régimen utilizado durante las simulaciones LZSM es primordial. Descuidar este aspecto puede llevar a obtener resultados con asimetrías o rasgos artificiales, que son un artefacto de no haber realizado el previo análisis establecido. Esta interpretación incluye analizar el impacto de los parámetros, identificar comportamientos relevantes desde el punto de vista experimental y buscar condiciones características.

4.2. Recursos requeridos

I. Código y entorno de simulación: Para implementar los modelos teóricos y realizar las simulaciones numéricas se han desarrollado varios códigos en Python, para el estudio de la dinámica cuántica de estos sistemas. Estos permiten calcular propagadores, probabilidades de transición estroboscópica y generar diagramas de interferencia LZSM. Para su implementación se han utilizado las siguientes librerías:

- NumPy: para manejar vectores, matrices y operaciones algebraicas fundamentales.
- SciPy: para integración numérica y resolución de ecuaciones diferenciales.
- Matplotlib: para generar las figuras y diagramas de interferencia LZSM.
- QuTiP: para representar y evolucionar sistemas cuánticos de forma eficiente.
- GitHub: Como repositorio para los códigos [11].

II. Referencias bibliográficas: El desarrollo del marco teórico y del modelo AIM ha requerido una revisión detallada de la literatura científica actual en el campo de la interferometría LZSM y la dinámica cuántica en puntos cuánticos semiconductores. Se ha hecho uso tanto de artículos especializados como de libros de texto avanzados sobre mecánica cuántica, teoría de Floquet y qubits semiconductores.

III. Herramientas de Inteligencia Artificial: Durante la elaboración de este trabajo se emplearon herramientas de inteligencia artificial como apoyo complementario en tareas específicas, manteniendo en todo momento la autoría y la integridad académica del contenido. En particular, se utilizó ChatGPT-4o para:

- Mejorar la redacción técnica y el estilo académico, solicitando reformulaciones más claras de ciertos párrafos, por ejemplo:

“Reformula este párrafo con un tono más académico y fluido: [...]”

- Revisar y optimizar fragmentos de código, pidiendo sugerencias como:

“¿Hay alguna forma de simplificar o mejorar este código que [...]?”

Además, se empleó la herramienta de corrección automática integrada en Overleaf para la detección de errores gramaticales y tipográficos durante la redacción del documento.

Estas herramientas se utilizaron exclusivamente como recurso de apoyo, sin sustituir en ningún caso el trabajo intelectual, analítico ni técnico realizado por el autor.

5. RESULTADOS

5.1. Estados y energías en un DQD en Si/SiGe

Una vez caracterizada la dinámica en un modelo de dos niveles, y haber definido una metodología para estudiar el comportamiento de estos sistemas frente a modulaciones externas, es natural aplicar esta metodología en un sistema más complejo y realista, para así validar su utilidad y escalabilidad.

En particular, se considera un sistema formado por un electrón confinado en un DQD implementado en una heteroestructura Si/SiGe. Este qubit se puede modelar como un sistema de cuatro niveles energéticos, resultantes del entrelazamiento entre los estados de carga y los estados de valle en cada punto [4]. A continuación, se estudiará este modelo descrito en [19].

Para describir su dinámica se usa una base que combina las bases orbital y de valle. En la base orbital, el estado del electrón en el punto izquierdo se denota $|l\rangle$ y en el derecho $|r\rangle$. Se introducen los operadores de Pauli σ_z y σ_x que actúan en el espacio orbital de modo que el Hamiltoniano H_d que describe la parte independiente del valle (orbital) del DQD es entonces el mismo que en un sistema de dos niveles dado por [Ec. 3.14], donde ε es el *detuning* y t_c es el elemento de túnel inter-dot (entre puntos).

El grado de libertad de valle en cada QD se modela mediante un Hamiltoniano de dos niveles en el espacio de valle propio. Para cada punto $i = l, r$ (izquierdo y derecho), este Hamiltoniano se expresa como:

$$H_{v,i} = \frac{1}{2} \vec{\delta}_i \cdot \vec{\tau}^0, \quad (5.1)$$

donde $\vec{\delta}_i$ es un vector tridimensional que determina la dirección y magnitud del *splitting* (desdoblamiento energético) de valle en el punto i , y $\vec{\tau}^0 = (\tau_x^0, \tau_y^0, \tau_z^0)$ son los operadores de Pauli definidos en una base común de valle $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$. Su módulo $|\vec{\delta}_i|$ representa la separación energética entre los estados de valle en el punto cuántico correspondiente.

Para describir el sistema completo, se combinan ambos puntos cuánticos en un único Hamiltoniano. Es útil definir las combinaciones simétrica y antisimétrica de los vectores de valle $\vec{\delta}_\pm = \frac{1}{2}(\vec{\delta}_l \pm \vec{\delta}_r)$. Usando esta notación, el Hamiltoniano total de valle se escribe:

$$H_v^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=l,r} |i\rangle\langle i| \vec{\delta}_i \cdot \vec{\tau}^0 = \frac{1}{2} (\vec{\delta}_+ + \sigma_z \vec{\delta}_-) \cdot \vec{\tau}^0, \quad (5.2)$$

donde σ_z actúa sobre el espacio orbital. El término proporcional a $\vec{\delta}_-$ introduce un acoplamiento diferente para cada punto cuántico.

Para simplificar esta expresión, se rota la base de valle de forma que el nuevo eje τ_z se alinee con $\vec{\delta}_+$, y el nuevo eje τ_x se defina como la proyección de $\vec{\delta}_-$ sobre el plano perpendicular

a $\vec{\delta}_+$. Tras esta rotación, el Hamiltoniano adopta la forma:

$$H_v^0 = \frac{\delta}{2} \tau_z + \frac{1}{2} (\delta_z \tau_z + \delta_x \tau_x) \sigma_z, \quad (5.3)$$

El Hamiltoniano total del DQD, que incluye los términos orbitales y de valle, se escribe entonces como:

$$H'_0 = H_d + H_v^0 = \begin{pmatrix} H_L & t_c \mathbb{I} \\ t_c \mathbb{I} & H_R \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

Este actúa en el espacio $\mathcal{H}_{\text{orbital}} \otimes \mathcal{H}_{\text{valle}}$. Donde H_L y H_R son los sub-Hamiltonianos asociados al punto cuántico izquierdo y derecho, respectivamente. Entonces, usando $\Delta_L = \delta + \delta_z$ y $\Delta_R = \delta - \delta_z$ definimos las diferencias energéticas del valle y los ángulos como:

$$E_{L,R} = \sqrt{\Delta_{L,R}^2 + \delta_x^2}, \quad \tan \theta_{L,R} = \frac{\delta_x}{\Delta_{L,R}}. \quad (5.5)$$

Los sub-Hamiltonianos resultan ser:

$$\begin{aligned} H_L &= \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{I} + \frac{E_L}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta_L & \sin \theta_L \\ \sin \theta_L & -\cos \theta_L \end{pmatrix}, \\ H_R &= -\frac{\varepsilon}{2} \mathbb{I} + \frac{E_R}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta_R & \sin \theta_R \\ \sin \theta_R & -\cos \theta_R \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para expresar el Hamiltoniano en la base de autovalores locales de valle, se aplica la transformación unitaria:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_L}{2} & \sin \frac{\theta_L}{2} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{\theta_L}{2} & \cos \frac{\theta_L}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\theta_R}{2} & \sin \frac{\theta_R}{2} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{\theta_R}{2} & \cos \frac{\theta_R}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

y se obtiene el Hamiltoniano final:

$$\tilde{H}_0 = U H'_0 U^\dagger = \begin{pmatrix} \varepsilon/2 + E_L & 0 & t & t' \\ 0 & \varepsilon/2 & -t' & t \\ t & -t' & -\varepsilon/2 + E_R & 0 \\ t' & t & 0 & -\varepsilon/2 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

siendo:

$$t = t_c \cos \left(\frac{\theta_L + \theta_R}{2} \right), \quad t' = t_c \sin \left(\frac{\theta_L + \theta_R}{2} \right). \quad (5.9)$$

en este caso t el elemento de túnel intra-valle, que conserva el estado de valle, con cambio de orbital y t' es el elemento de túnel inter-valle, que implica un cambio de estado de valle y orbital.

De modo que los estados en la nueva base local de valle toman la forma:

$$\begin{aligned}
 |L'\rangle &= |l\rangle \left(\cos \frac{\theta_L}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta_L}{2} |-\rangle \right), \\
 |L\rangle &= |l\rangle \left(-\sin \frac{\theta_L}{2} |+\rangle + \cos \frac{\theta_L}{2} |-\rangle \right), \\
 |R'\rangle &= |r\rangle \left(\cos \frac{\theta_R}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta_R}{2} |-\rangle \right), \\
 |R\rangle &= |r\rangle \left(-\sin \frac{\theta_R}{2} |+\rangle + \cos \frac{\theta_R}{2} |-\rangle \right).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

De esta manera, el Hamiltoniano \tilde{H}_0 describe la interacción entre los dos puntos cuánticos en función del *detuning* ε , la diferencia de energía de valle en cada QD (E_L y E_R), y los elementos de túnel intra-valle t e inter-valle t' .

Ahora se aplicarán los pasos de la sección anterior para poder caracterizar este sistema. En primer lugar, estudiaremos el comportamiento de los niveles diabáticos y adiabáticos en el hamiltoniano de este sistema bajo un desajuste lineal, para comprender la dinámica de transferencia del sistema y bajo un desajuste oscilatorio para analizar cómo afectará a los futuros diagramas.

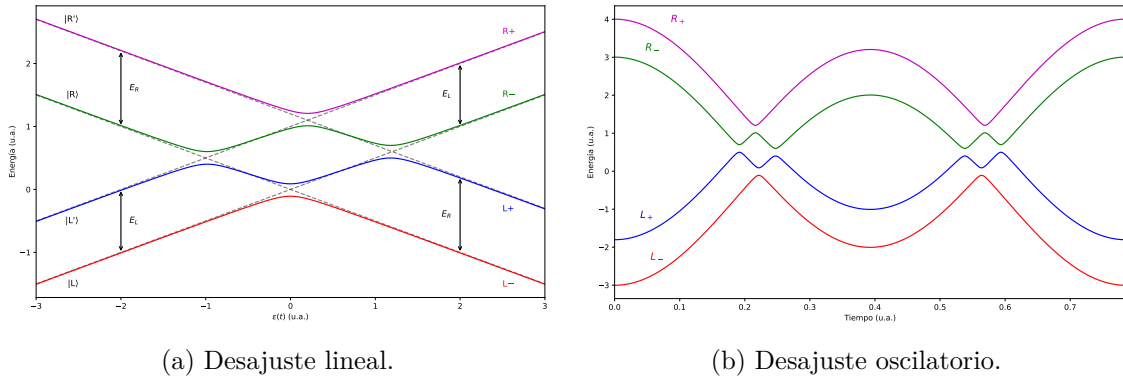


Figura 9: Energías en una heteroestructura Si/SiGe, representado como un sistema de cuatro niveles, sometidos a un desajuste energético.

Al extender el análisis al caso de un sistema con cuatro niveles, podemos observar cómo la dinámica se vuelve considerablemente más compleja. A diferencia del modelo más simple de dos niveles, ahora encontramos cuatro cruces evitados. Cada vez que el sistema atraviesa uno de estos cruces, ocurre un cambio en la referencia de las bases diabáticas y adiabáticas, fenómeno que ya vimos en el caso de dos niveles. Esto se manifiesta claramente en la inversión de los estados energéticos locales E_L y E_R en la primera figura.

Es especialmente relevante señalar que, en un periodo completo de oscilación, pasamos a tener un total de ocho cruces evitados. Esto incrementa la complejidad del problema, no so-

lo desde un punto de vista numérico y analítico, sino también desde una perspectiva física. El comportamiento resultante presenta patrones de interferencia considerablemente más elaborados, producto de las múltiples transiciones no adiabáticas y las fases acumuladas a lo largo de cada trayecto entre cruces.

5.2. Interferometría LZSM aplicada al modelo de 4 niveles

Ahora aplicaremos los conocimientos adquiridos en el caso de dos niveles para caracterizar este sistema, pudiendo obtener su comportamiento frente a diferentes condiciones y analizar cómo afectan los diferentes parámetros al qubit.

Comenzaremos analizando la situación en la que el sistema se encuentra en el régimen diabático. En este régimen para un sistema de dos niveles, se observó que las franjas de interferencia LZSM corresponden a transiciones multifotónicas. Esto permite identificar las condiciones de resonancia mediante la relación $\Delta E = k\omega$, entre los niveles del hamiltoniano [Ec. 5.8]. En este contexto, se encuentran las siguientes condiciones de resonancia para transiciones entre puntos cuánticos (con y sin cambio de valle):

$$\epsilon_0 - (E_R - E_L) = k_1\omega, \quad |L\rangle \rightarrow |R\rangle \quad (5.11)$$

$$\epsilon_0 + E_L = k_2\omega, \quad |L\rangle \rightarrow |R'\rangle \quad (5.12)$$

Para transiciones dentro de un mismo QD, la condición es:

$$E_L = k_3\omega, \quad |L\rangle \rightarrow |L'\rangle \quad (5.13)$$

Y ambos están relacionados mediante $k_2 = k_1 + k_3$, lo que significa que el proceso de túnel entre puntos con flip solo puede darse cuando el sistema absorbe simultáneamente la energía necesaria para realizar el túnel, y la energía necesaria para provocar la transición interna.

En los diagramas de interferencia [Fig. 10] se puede comprobar fácilmente cómo se cumplen estas condiciones de resonancia obtenidas analíticamente.

Además, se observa que las franjas de interferencias entre puntos cuánticos tienen una probabilidad promedio más alta que las de un mismo punto. Por otro lado, al observar la figura 10b, se aprecia que la probabilidad tiene su máximo para la primera transición multifotónica, decayendo notablemente en posteriores transiciones.

Con esto se ha comprobado el efecto de las energías locales en los diagramas de interferencia. Entonces ahora resta obtener cómo los parámetros de túnel varían el patrón, para ello analizando la ecuación 5.9, se puede ver que es posible estudiar la relación entre ambos en función del ángulo, tal que $\frac{t'}{t} = \tan(\phi)$, siendo $\phi = \frac{\theta_L + \theta_R}{2}$, obteniendo los patrones de

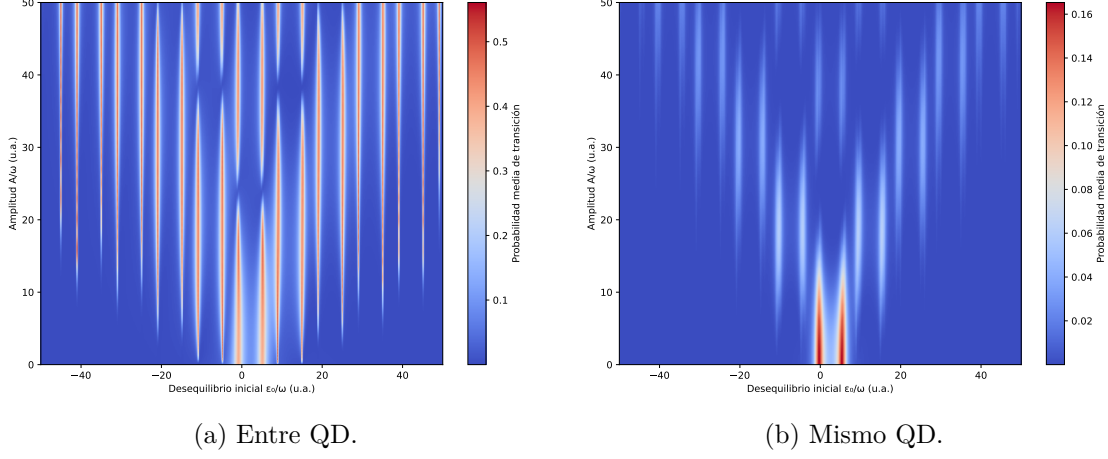


Figura 10: Diagrama de interferencia LZSM en el régimen diabático, calculando la probabilidad de transición entre puntos y en el mismo punto, con una asimetría energética entre los niveles locales de $E_L = 1$ y $E_R = 6$.

la figura 11, en los cuales se puede comprobar que la relación entre ambos afecta tanto a la probabilidad media como a la altura relativa entre las franjas de interferencia. En concreto, para ángulos pequeños, domina t , y por lo tanto la transición entre valles [Ec. 5.11]. Mientras que para ángulos grandes, con t' más alto, domina la transición entre valles con cambio de espín [Ec. 5.12].

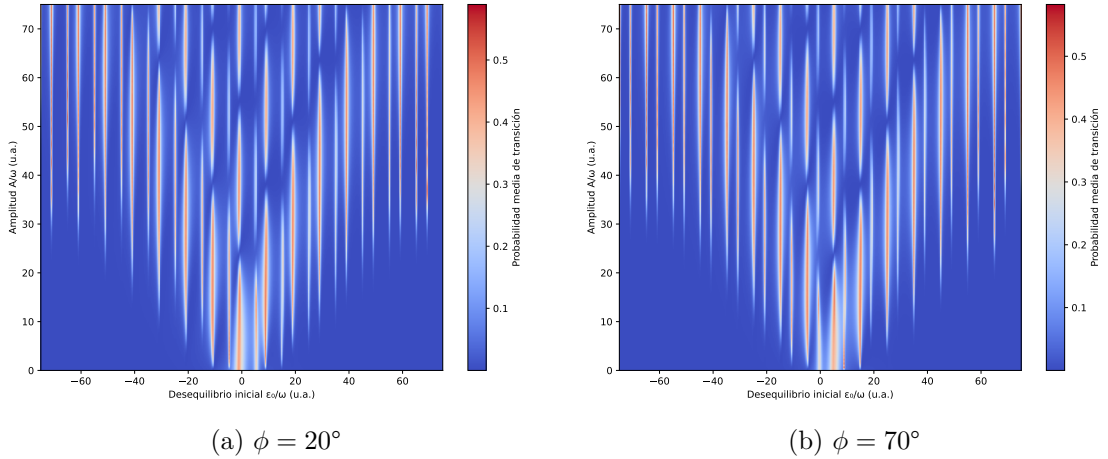


Figura 11: Diagrama de interferencia LZSM en el régimen diabático, calculando la probabilidad de transición entre puntos para parámetros extremos del ángulo entre los tunelamientos t y t' .

Ahora, pasando al estudio del qubit en un régimen adiabático, estudiando la probabilidad de que el sistema se mantenga en el estado fundamental, se obtiene el siguiente diagrama de interferencia [Fig. 12].

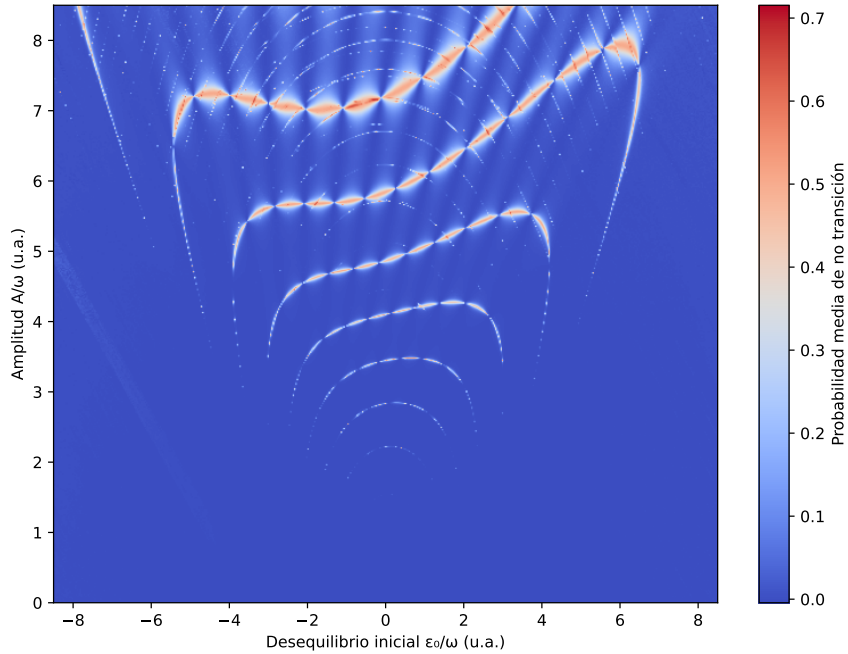


Figura 12: Diagrama de interferencia LZSM en un modelo de 4 niveles en el régimen adiabático, se puede observar la asimetría debido a la diferencia entre los niveles locales de cada punto E_L y E_R .

Para este régimen se pueden ver las franjas características similares al modelo de dos dimensiones con frecuencia baja. Principalmente, centrandó la atención en valores pequeños de amplitud, el patrón se asemeja al de dos niveles con curvas cóncavas. Sin embargo, en este caso, al aumentar la amplitud se produce una asimetría entre ambos lados del patrón en forma arqueada, se observa además cómo esta asimetría incrementa junto con la amplitud y el desajuste inicial.

6. DISCUSIÓN

A continuación, se procede a la discusión de los resultados presentados en el capítulo anterior. En primer lugar, al considerar el régimen diabático y analizar las condiciones analíticas calculadas en el capítulo anterior [Ec. 5.11] [Ec. 5.12] [Ec. 5.13], resulta relevante señalar que dichas condiciones presentan una notable semejanza con las de un modelo de cuatro niveles con desdoblamiento energético tipo Zeeman, inducido por un campo magnético externo [20]. No obstante, esta analogía debe establecerse con precaución, ya que el desdoblamiento observado en el modelo con grados de libertad de valle se origina en parámetros intrínsecos del qubit, determinados por el proceso de fabricación y la estructura del material, mientras que el desdoblamiento Zeeman responde a una interacción con un campo magnético aplicado externamente.

Centrando la atención en los resultados obtenidos, el análisis de los diagramas de interferencia permite identificar efectos característicos de la dinámica multinivel. En comparación con el modelo de dos niveles, se observa que la presencia del grado de libertad del valle induce un desdoblamiento en las franjas de interferencia, dentro de la misma transición multifotónica ($k_1 = k_2 = 0, 1, \dots, n$). Este resultado pone de manifiesto la relevancia de la interferometría LZSM como herramienta de diagnóstico en sistemas cuánticos complejos. En particular, en escenarios experimentales orientados al control coherente de transiciones entre estados cuánticos, la descripción basada en un modelo de dos niveles resultaría insuficiente. La presencia de múltiples niveles energéticos ocultos implica la necesidad de ajustar los parámetros de control en función de si se busca una transición entre puntos cuánticos con o sin cambio de nivel energético.

Además, el análisis de los parámetros de tunelamiento en función del ángulo aporta información esencial sobre la utilidad de estos canales. Se observa que el control del ángulo de tunelamiento permite modular la intensidad de las franjas de interferencia, incrementándolas o suprimiéndolas según el valor elegido. Este resultado pone de manifiesto que es posible manipular selectivamente los canales de transición mediante ajustes experimentales, lo que convierte a este parámetro en una herramienta útil para el control coherente del sistema. Las transiciones únicamente entre valle son las que permiten implementar y controlar de forma estándar un qubit de carga. Al hacerse relevante t' , se activan transiciones que combinan cambio de posición con cambio de valle, cuya utilidad práctica reside en revelar la hibridación entre estados, proporcionando más líneas de resonancia en el diagrama LZSM, lo que puede aprovecharse para ajustar o calibrar el sistema experimentalmente. Por ello, es necesario un control preciso de estos canales. Por su parte, las transiciones internas de valle, asociadas a E_L y E_R , son esenciales para determinar la estructura energética del sistema. Su valor define las energías locales, las cuales condicionan la activación de otros canales.

Ahora, pasando al análisis del diagrama obtenido para el régimen adiabático [Fig. 12], resulta fundamental destacar la relevancia de haber podido obtener este resultado, ya que se ha observado un patrón cualitativamente similar en experimentos reportados en la literatura, como en [8]. En dicho trabajo, no obstante, se incluía un efecto de *dressing*, es decir, una modulación rápida de baja amplitud superpuesta a la conducción principal. Esto refuerza la validez de nuestra simulación numérica basada en el modelo de cuatro niveles, al mostrar una concordancia directa con resultados experimentales.

En particular, al analizar el patrón de interferencia a valores bajos de amplitud y desajuste inicial, se observa que el sistema reproduce características propias de un modelo de dos niveles. Esto abre la posibilidad de aplicar modelos analíticos efectivos, como el AIM, así como considerar la inclusión del *dressing*, lo cual ha sido tratado en profundidad en trabajos teóricos como [21]. Por otro lado, al aumentar la amplitud de modulación, aparecen franjas curvadas asimétricas, cuya forma se debe a las diferencias energéticas locales entre los dos puntos cuánticos.

Este comportamiento pone de manifiesto la necesidad de considerar parámetros que suelen quedar ocultos en modelos de dos niveles simplificados, como el grado de libertad de valle. Su inclusión permite capturar efectos de hibridación entre estados que pueden ser aprovechados para el diseño de qubits en dispositivos semiconductores, abriendo nuevas vías para la manipulación y el control cuántico en arquitecturas reales de computación cuántica.

En este contexto, la utilidad de la interferometría LZSM se presenta en dos ámbitos diferenciados. Mediante la implementación experimental para búsqueda de parámetros desconocidos en un sistema y validación de modelos. Por otro lado, mediante un análisis teórico como el presentado en este trabajo. Cuyo punto fuerte es la capacidad de analizar de forma simple estos sistemas para poder caracterizarlos, obteniendo sus parámetros relevantes. También se usa para encontrar puntos de operación eficaz, *sweet spots*, donde el qubit presenta una protección eficaz frente al ruido, analizar pérdidas de coherencia en diferentes regímenes y comprender cómo afecta la implementación de puertas lógicas en estos sistemas.

7. CONCLUSIONES

7.1. Conclusiones del trabajo

En este trabajo se ha llevado a cabo un estudio de qubits semiconductores, analizando su dinámica en distintos regímenes de operación y variando los parámetros de control. Para ello, se han empleado herramientas teóricas como la teoría de Floquet, modelos analíticos como el AIM, y simulaciones numéricas para describir la evolución temporal del sistema. Este enfoque ha permitido entender cómo se producen y modulan las transiciones cuánticas en presencia de cruces evitados periódicos, revelando el papel central de la interferometría LZSM como técnica eficaz para analizar procesos de resonancia, acumulación de fase, y análisis de coherencia. La comparación entre resultados analíticos y simulaciones ha validado el uso del AIM como modelo efectivo para sistemas modulados periódicamente.

Posteriormente, todo el marco teórico y numérico desarrollado se ha implementado en un modelo más complejo y realista de cuatro niveles, correspondiente a un sistema de doble punto cuántico en silicio tipo Si/SiGe. En este modelo se incorpora explícitamente el grado de libertad del valle energético, cuya presencia introduce nuevos fenómenos como la hibridación entre estados de valle y órbita, el desdoblamiento de las resonancias en el diagrama y la aparición de estructuras curvas atípicas.

En su conjunto, este trabajo proporciona una metodología de cómo aplicar la interferometría LZSM al estudio de qubits semiconductores, no solo en modelos ideales, sino también en arquitecturas con mayor complejidad. Además, esta metodología es aplicable a otros modelos y plataformas de qubits, de modo que es una herramienta muy versátil para el diseño, caracterización y optimización de qubits.

7.2. Conclusiones personales

Personalmente, me gustaría destacar que el tema abordado en este trabajo, la computación cuántica, es un área por el cual tengo gran interés. A lo largo del desarrollo he tenido la oportunidad de profundizar en esta tecnología emergente, lo que ha reforzado mi convicción de que quiero orientar tanto mi carrera académica como profesional hacia este campo. En concreto, este trabajo me ha resultado especialmente valioso para ampliar mis conocimientos en física cuántica, consolidando conceptos y aprendiendo sobre nuevas herramientas. Además, ha consolidado habilidades transversales, como la búsqueda de información especializada y la capacidad de trasladar ideas complejas de forma clara y rigurosa. Finalmente, me ha permitido ampliar mis habilidades de programación aplicadas a la simulación de sistemas cuánticos.

En resumen, este trabajo ha reafirmado mi interés por orientar mi carrera en el estudio de las tecnologías cuánticas.

8. FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

Este trabajo abre diversas líneas de investigación futuras, tanto en lo que respecta a la mejora del modelo como a la validación experimental y la generalización metodológica.

En primer lugar, desde el punto de vista teórico, sería interesante extender el modelo presentado incorporando canales de decoherencia asociados al entorno, como fluctuaciones de carga, lo que permitiría estudiar cómo estos procesos afectan a la visibilidad de las franjas de interferencia y a la estabilidad del qubit. Además, se podrían explorar implementaciones físicas concretas de interferometría LZSM, como su realización en cavidades resonantes, guías de onda o dispositivos con acoplamientos eléctricos o magnéticos, los cuales permitirían diseñar configuraciones experimentales específicas para cada instrumento.

A nivel metodológico, una posible línea de avance consistiría en aplicar el enfoque de interferometría LZSM desarrollado en este trabajo a otros tipos de qubits, como los puntos cuánticos triples, qubits superconductores, o incluso qubits topológicos. Esto permitiría comprobar la generalidad del modelo AIM y sus extensiones, así como identificar parámetros relevantes para distintas plataformas tecnológicas. La comparación entre diferentes arquitecturas también podría ayudar a caracterizar sus respectivas ventajas en términos de robustez frente al ruido, accesibilidad de parámetros de control o eficiencia de las operaciones cuánticas.

Por último, en relación con los resultados obtenidos, una línea particularmente prometedora sería colaborar con un grupo experimental. Esto permitiría contrastar directamente los diagramas numéricos obtenidos, especialmente aquellos que presentan un desdoblamiento característico en el régimen diabático, aún poco explorado experimentalmente, con los resultados de una realización física concreta. Para ello, sería necesario adaptar el modelo presentado a los parámetros específicos del sistema experimental, teniendo en cuenta que las conclusiones cualitativas obtenidas en este trabajo deberían mantenerse estables. Esta validación cruzada no solo reforzaría la relevancia de los resultados, sino que también podría aportar información útil para el diseño experimental y la interpretación de nuevos datos.

Referencias

- [1] P. Benioff, “The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical hamiltonian model of computers as represented by turing machines,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 22, pp. 563–591, May 1980.
- [2] D. P. DiVincenzo, “The physical implementation of quantum computation,” *Fortschritte der Physik*, vol. 48, pp. 771–783, Sept. 2000.
- [3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 10th anniversary ed., 2010.
- [4] G. Burkard, T. D. Ladd, A. Pan, J. M. Nichol, and J. R. Petta, “Semiconductor spin qubits,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 95, p. 025003, Jun 2023.
- [5] O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and F. Nori, “Nonadiabatic Landau–Zener–Stückelberg–Majorana transitions, dynamics, and interference,” *Physics Reports*, vol. 995, pp. 1–89, 2023.
- [6] A. L. Gramajo, D. Domínguez, and M. J. Sánchez, “Revealing the system-bath coupling via landau-zener-stückelberg interferometry in superconducting qubits,” *Phys. Rev. B*, vol. 100, p. 075410, Aug 2019.
- [7] M. B. Kenmoe and L. C. Fai, “Periodically driven three-level systems,” *Phys. Rev. B*, vol. 94, p. 125101, Sep 2016.
- [8] X. Mi, S. Kohler, and J. R. Petta, “Landau–Zener interferometry of valley-orbit states in Si/SiGe double quantum dots,” *Phys. Rev. B*, vol. 98, p. 161404, Oct 2018.
- [9] F. Forster, G. Petersen, S. Manus, P. Hänggi, D. Schuh, W. Wegscheider, S. Kohler, and S. Ludwig, “Characterization of qubit dephasing by Landau–Zener–Stückelberg–Majorana interferometry,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, p. 116803, Mar 2014.
- [10] J. J. Cáceres, D. Domínguez, and M. J. Sánchez, “Fast quantum gates based on Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions,” *Phys. Rev. A*, vol. 108, p. 052619, Nov 2023.
- [11] J. B. Rodríguez, “LZSM interferometry.” <https://github.com/JorgeBonillaR/LZSM-interferometry>, 2025. Accessed: 2025-06-03.
- [12] K. Viebahn, “Introduction to Floquet theory.” Institute for Quantum Electronics, ETH Zurich, 8093 Zurich, Switzerland, Nov. 2020.
- [13] A. Eckardt and E. Anisimovas, “High-frequency approximation for periodically driven quantum systems from a Floquet-space perspective,” *New Journal of Physics*, vol. 17, p. 093039, Sept 2015.

- [14] T. Dittrich, P. Hänggi, G.-L. Ingold, B. Kramer, G. Schön, and W. Zwerger, *Quantum Transport and Dissipation*. Weinheim, Germany: Wiley-VCH, 1998.
- [15] D. Loss and D. P. DiVincenzo, “Quantum computation with quantum dots,” *Physical Review A*, vol. 57, no. 1, pp. 120–126, 1998.
- [16] J. Gorman, D. G. Hasko, and D. A. Williams, “Charge-qubit operation of an isolated double quantum dot,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 090502, Aug 2005.
- [17] L. D. Landau, “On the theory of transfer of energy at collisions II,” *Phys. Z. Sowjetunion*, vol. 2, pp. 46–51, 1932.
- [18] G. Platero and R. Aguado, “Photon-assisted transport in semiconductor nanostructures,” *Physics Reports*, vol. 395, no. 1, pp. 1–157, 2004.
- [19] G. Burkard and J. R. Petta, “Dispersive readout of valley splittings in cavity-coupled silicon quantum dots,” *Phys. Rev. B*, vol. 94, p. 195305, Nov 2016.
- [20] D. V. Khomitsky and S. A. Studenikin, “Single-spin Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry of Zeeman-split states with strong spin-orbit interaction in a double quantum dot,” *Phys. Rev. B*, vol. 106, p. 195414, Nov 2022.
- [21] S. N. Shevchenko, A. I. Ryzhov, and F. Nori, “Low-frequency spectroscopy for quantum multilevel systems,” *Phys. Rev. B*, vol. 98, p. 195434, Nov 2018.

[PÁGINA INTENCIONADAMENTE EN BLANCO]