



**Universidad  
Europea**

## **TRABAJO FIN DE MÁSTER**

# **Análisis retrospectivo de parámetros geotécnicos basado en mediciones de asientos y presiones de contacto en cimentaciones directas**

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Eduardo Sendín Moreno

Dirigido por:

Dr. Don Carlos Barba Ávila

Dra. Dña. María Dolores Esteban Pérez

Dr. Don Raúl R. Rodríguez Escribano

Madrid, 2025

## AGRADECIMIENTOS

Este Trabajo de Final de Máster comenzó como una simple idea anotada al dorso de un plano en la oficina. Con el paso del tiempo, aquella anotación empezó a cobrar sentido, viendo su potencial aplicación en trabajos que realizaba casi a diario, motivándome a investigar y explorar su puesta en práctica. Finalmente, he podido transformar esa anotación en este trabajo, siendo el broche final de este Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos, aunando la vocación que tengo por esta profesión y mi deseo de seguir explorando en el campo de la ingeniería geotécnica y estructural. Nada de esto habría sido posible sin la ayuda, la inspiración y la confianza de quienes me han acompañado en el camino.

A mis tutores, Carlos, Lola y Raúl, mi gratitud por haber sido mis guías a lo largo de estos dos años. Vuestra paciencia para revisar cada versión, vuestra mirada crítica para señalar mejoras y vuestra vocación docente han marcado la diferencia. Vuestros comentarios han sido de gran ayuda y, definitivamente, han mejorado y elevado la calidad de este trabajo.

Extiendo mis agradecimientos al equipo docente de la Universidad Europea, por convertir vuestras clases en una oportunidad de aprendizaje, se valora enormemente vuestra vocación y conocimiento transmitido.

A mis compañeros de clase, muy especialmente a José y Salva, con quienes compartí largas sesiones, charlas y risas, gracias por convertir cada fin de semana en una oportunidad de aprender de vosotros, sois un referente para mí. Gracias por vuestro apoyo los días difíciles, ánimos y ayudas cuando flaqueaban las fuerzas.

Al equipo de ES Calculations, agradezco el acceso a recursos técnicos, licencias de software y asesoramiento que facilitaron la verificación de numerosos modelos realizados en este trabajo. Las conversaciones en la hora del café y vuestros consejos han afianzado y ayudado a plasmar muchas de las ideas en que se sustenta este trabajo.

Finalmente, a quien sin duda más sacrificio han puesto en este trabajo, a mi familia, mis padres, mi esposa Alicia y nuestros hijos Alejandro y Julia, gracias por ser el cimiento más firme sobre el que se alza todo lo demás. Sé que este Máster nos ha robado horas de juegos y de conversación, pero vuestra comprensión, vuestras palabras de ánimo y la paciencia con la que habéis compartido mis ausencias me han impulsado hasta la meta. Gran parte de este trabajo es gracias a vosotros y la motivación que me transmitís.

A todos, gracias por sostener este proyecto con vuestra confianza, vuestro tiempo y vuestra energía.

## INDICE DE CONTENIDOS

<b>Agradecimientos</b>	<b>1</b>
<b>Índice de contenidos</b>	<b>2</b>
<b>Listado de figuras</b>	<b>4</b>
<b>Listado de tablas</b>	<b>20</b>
<b>Resumen</b>	<b>21</b>
<b>Abstract</b>	<b>22</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>23</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>26</b>
<b>3. Estado del arte</b>	<b>29</b>
3.1 Introducción	29
3.2 Modelo constitutivo del suelo	31
3.3 Módulo de elasticidad	43
3.4 Distribución de tensiones bajo cimentaciones superficiales	49
3.5 Asientos en cimentaciones superficiales	70
3.6 Módulo de balasto	97
3.7 Análisis retrospectivo	115
3.8 Funciones objetivo	116
3.9 Algoritmos de optimización	124
3.10 Síntesis del estado del arte	146
<b>4. Definición de la necesidad</b>	<b>150</b>
<b>5. Metodología</b>	<b>155</b>
5.1 Metodología de análisis retrospectivo	156
5.2 Algoritmos empleados en el análisis comparativo	161
<b>6. Caso de estudio</b>	<b>163</b>
6.1 Caso de estudio sintético	163
6.2 Caso de estudio real	168
<b>7. Resultados</b>	<b>172</b>
7.1 Métricas empleadas	172

7.2	Resultados numéricos de los algoritmos de optimización	175
7.3	Interpretación del modelo mediante SHAP en el caso de estudio sintético	180
7.4	Análisis detallado de los resultados del caso de estudio sintético	187
7.5	Análisis detallado de los resultados del caso de estudio real	228
<b>8.</b>	<b>Discusión de los resultados</b>	<b>244</b>
8.1	Precisión en la estimación de parámetros geotécnicos	244
8.2	Comportamiento computacional y número de iteraciones	245
8.3	Robustez frente al ruido y estabilidad de los algoritmos	246
8.4	Interpretabilidad y validez geotécnica mediante SHAP	247
8.5	Relevancia práctica y ventajas del modelo propuesto	247
8.6	Síntesis comparativa y limitaciones observadas	248
<b>9.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>249</b>
<b>10.</b>	<b>Recomendaciones y estudios futuros</b>	<b>252</b>
<b>11.</b>	<b>Referencias</b>	<b>256</b>
<b>12.</b>	<b>ANEJO A</b>	<b>260</b>
12.1	Anejo A1. Métodos basados en gradientes	261
12.2	Anejo A2. Métodos heurísticos y metaheurísticos - Evolutivos	275
12.3	Anejo A3. Métodos de Búsqueda Directa	314
12.4	Anejo A4. Métodos surrogados	318
12.5	Anejo A5. Métodos basados en programación matemática	328
12.6	Anejo A5. Otros métodos	334
12.7	Anejo A6. Métodos híbridos	338



## LISTADO DE FIGURAS

Figura 2-1 – Diagrama del enfoque observacional .....	28
Figura 3-2 – Relación lineal entre tensión-deformación .....	31
Figura 3-3 – Fluencia y relajación en modelos viscoelásticos .....	33
Figura 3-4 – Principio de superposición de viscoelasticidad lineal .....	34
Figura 3-5 – Comportamiento plástico .....	35
Figura 3-6 – Criterios de fallo de Tresca y Mohr-Coulomb .....	36
Figura 3-7 – Comparación de los resultados de una simulación de un ensayo triaxial drenado utilizando distintos modelos constitutivos. Extraído de <i>The Hardening Soil Model - A Practical Guidebook</i> , 2018. ....	42
Figura 3-8 – Módulos de deformación. Extraído de <i>Geotechnical engineering: unsaturated and saturated soils</i> , 2023 .....	44
Figura 3-9 – Tensión vertical por carga puntual en espacio infinito .....	49
Figura 3-10 – Tensión vertical por carga puntual en semiespacio elástico .....	50
Figura 3-11 – Tensión vertical por carga lineal uniformemente distribuida en semiespacio elástico .....	51
Figura 3-12 – Tensión vertical por carga en faja lineal uniformemente distribuida en semiespacio elástico .....	51
Figura 3-13 – Tensión vertical por carga circular uniformemente distribuida en semiespacio elástico .....	52
Figura 3-14 – Esquema de aplicación de cargas según Fadum (1948) .....	53
Figura 3-15 – Ábaco de Newmark, tomado de <i>NEWMARK, Nathan Mortimore. Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois. Engineering Experiment Station. Bulletin; no. 338, 1942.</i> .....	54
Figura 3-16 – Esquema de cargas del método de las influencias, adaptación de <i>JIMÉNEZ SALAS, Jose Antonio.; JUSTO, JL de; SERRANO, A. Geotecnia y cimientos II. 1981; página 231, figura 3.59.</i> .....	55
Figura 3-17 – Tensión vertical por carga puntual en espacio infinito .....	59
Figura 3-18 – Semiespacio de Fröhlich. Adaptación de <i>JIMÉNEZ SALAS, Jose Antonio.; JUSTO, JL de; SERRANO, A. Geotecnia y cimientos II. 1981; página 280, figura 3.107.</i> .....	60
Figura 3-19 – Parámetros fórmula de Mayne & Poulos (1999) .....	61
Figura 3-20 – Variación de $I_G$ en función de $\beta'$ . Tomado de <i>DAS, Braja M. Advanced soil mechanics. CRC press, 2019, p. 621</i> .....	62
Figura 3-21 – Variación de $I_F$ en función de $K_F$ . Tomado de <i>DAS, Braja M. Advanced soil mechanics. CRC press, 2019, p. 622</i> .....	62
Figura 3-22 – Variación de $I_E$ en función de $D_f/B_e$ . Tomado de <i>DAS, Braja M. Advanced soil mechanics. CRC press, 2019, p. 623</i> .....	63
Figura 3-23 – Curvas de influencia según Burmister. Extraído de <i>JIMÉNEZ SALAS, José Antonio.; JUSTO, JL de; SERRANO, A. Geotecnia y cimientos II. 1981; página 284, figura 3.112.</i> .....	64

Figura 3-24 – Curvas de influencia según Burmister. Extraído de JIMÉNEZ SALAS, José Antonio.; JUSTO, JL de; SERRANO, A. <i>Geotecnia y cimientos II</i> . 1981; página 284, figura 3.113. ....	65
Figura 3-25 – Continuidad de desplazamientos y tensiones. Extraído de YUE, Zhong Qi. <i>On generalized Kelvin solutions in a multilayered elastic medium. Journal of Elasticity</i> , 1995, vol. 40, no 1, p. 1-43. ....	66
Figura 3-26 – Tensión-Asiento en cimentación flexible en suelo cohesivo .....	70
Figura 3-27 – Tensión-Asiento en cimentación rígida en suelo cohesivo .....	70
Figura 3-28 – Tensión-Asiento en cimentación flexible en suelo granular .....	70
Figura 3-29 – Tensión-Asiento en cimentación rígida en suelo granular .....	70
Figura 3-30 – Módulo de deformación .....	74
Figura 3-31 – Factor de influencia de la deformación propuesto por Schmertmann et al. (1978) .....	84
Figura 3-32 – Método L1-L2, Akbas & Kulhawy (2009). <i>Tomado de DAS, Braja M. Advanced soil mechanics. CRC press, 2019, p. 605</i> .....	88
Figura 3-33 – Factor de influencia $I_f$ . <i>Tomado de DAS, Braja M. Advanced soil mechanics. CRC press, 2019, p. 616</i> .....	93
Figura 3-34 – Parámetros fórmula de Mayne & Poulos (1999) .....	94
Figura 3-35 – Variación de $I_G$ en función de $\beta'$ . <i>Tomado de DAS, Braja M. Advanced soil mechanics. CRC press, 2019, p. 621</i> .....	95
Figura 3-36 – Variación de $I_F$ en función de $K_F$ . <i>Tomado de DAS, Braja M. Advanced soil mechanics. CRC press, 2019, p. 622</i> .....	96
Figura 3-37 – Variación de $I_E$ en función de $D_f/B_e$ . <i>Tomado de DAS, Braja M. Advanced soil mechanics. CRC press, 2019, p. 623</i> .....	96
Figura 3-38 – Representación del módulo de balasto .....	97
Figura 3-39 – Representación del modelo de Winkler .....	97
Figura 3-40 – Relación tensión-asiento en función de la rigidez del cimiento. Distribución de tensiones en sobreado y sin sombrear el asiento .....	98
Figura 3-41 – Relación presión-rigidez en arenas densas. Extraído de LESHCHINSKY, Dov; MARCOZZI, Guy F. <i>Bearing capacity of shallow foundations: rigid versus flexible models. Journal of geotechnical engineering</i> , 1990, vol. 116, no 11, p. 1750-1756. ....	100
Figura 3-42 – Representación del modelo de Winkler optimizado .....	101
Figura 3-43 – Relación presión-asiento en función del tamaño de la cimentación .....	107
Figura 3-44 – Relación del bulbo de presiones en función del tamaño de la cimentación ....	107
Figura 3-45 – Subdivisión de acuerdo con ACI 336.2R-88 .....	111
Figura 3-46 – Subdivisión de acuerdo con Frank et al. (2004). <i>Designers' Guide to EN 1997-1 Eurocode 7: Geotechnical Design - General Rules</i> .....	112
Figura 3-47 – Subdivisión de acuerdo con recopilación de Alipour, M. (2011) .....	112
Figura 3-48 – Algoritmo aplicado a método de áreas discretas. Adaptación de Estephan R. et al. (2021) .....	113
Figura 3-49 – Ejemplo gráfico del gradiente descendiente dado el punto inicial $p_0$ y $p_{min}$ .....	129

Figura 3-50 – Influencia del factor de amortiguación. Adaptación de De Santos (2015), Figure 3.2.....	132
Figura 3-51 – Algoritmo de optimización del factor de amortiguación propuesto por Marquardt (1963). Adaptación de De Santos (2015), Figure 3.3.....	132
Figura 3-52 – Estructura de algoritmo genético simple. Adaptación de De Santos (2015), Figure 3.5.....	135
Figura 3-53 – Estructura de algoritmo genético adaptativo. Adaptación de De Santos (2015), Figure 3.13.....	140
Figura 3-54 – Estructura de algoritmo de optimización por enjambre de partículas PSO .....	141
Figura 3-55 – Actualización de posición en enjambre de partículas PSO. Fuente: SANCHO CAPARRINI, Fernando. Diagrama del algoritmo PSO. En: PSO: Optimización por Enjambres de Partículas. Universidad de Sevilla, 2025. Disponible en: <a href="https://www.cs.us.es/~fsancho/Blog/posts/PSO.md">https://www.cs.us.es/~fsancho/Blog/posts/PSO.md</a> [Consulta: 14/03/2025]. .....	143
Figura 3-56 – Ejemplo de trayectoria de las partículas en PSO para resolver la función de Mishra Bird para diferentes valores de $x_1$ y $x_2$ en la función sobre mapa de soluciones. ....	143
Figura 5-57 – Estructura de algoritmo de análisis retrospectivo .....	155
Figura 6-58 – Caso de estudio sintético.....	163
Figura 6-59 – Asiento teórico con y sin ruido .....	166
Figura 6-60 – Resultados ensayo SPT de campo y corregidos ( $N_{1,60}$ ) .....	167
Figura 6-61 – Caso de estudio real. Losa de cimentación de edificio de gran altura. Vista 3D .....	168
Figura 6-62 – Caso de estudio real. Losa de cimentación de edificio de gran altura. Planta..	169
Figura 6-63 – Caso de estudio real. Evolución asiento en función de la tensión media de contacto .....	169
Figura 6-64 – Caso de estudio real. Evolución asiento en función de la tensión media de contacto adoptados en el análisis retrospectivo .....	170
Figura 6-65 – Módulo elasticidad obtenido de ensayos presiométricos .....	171
Figura 7-66 – SHAP Beeswarm para $E_1$ .....	182
Figura 7-67 – SHAP value para $E_1$ .....	182
Figura 7-68 – SHAP Beeswarm para $E_2$ .....	183
Figura 7-69 – SHAP value para $E_2$ .....	183
Figura 7-70 – SHAP Beeswarm para $E_3$ .....	184
Figura 7-71 – SHAP value para $E_3$ .....	184
Figura 7-72 – SHAP Beeswarm para $E_4$ .....	185
Figura 7-73 – SHAP value para $E_4$ .....	185
Figura 7-74 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido) .....	187
Figura 7-75 – No. Iteraciones para convergencia según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido) .....	188

Figura 7-76 – Mapa trayectoria $E_1$ y $E_2$ para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	189
Figura 7-77 – Mapa trayectoria $E_1$ y $E_2$ para cada iteración según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido).....	189
Figura 7-78 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	190
Figura 7-79 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido).....	190
Figura 7-80 – Reemplazo generacional en algoritmo genético simple (sin ruido – con ruido) .....	192
Figura 7-81 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según algoritmo genético simple (sin ruido – con ruido).....	192
Figura 7-82 – Evolución población en algoritmo genético simple (sin ruido).....	193
Figura 7-83 – Evolución población en algoritmo genético simple (con ruido).....	194
Figura 7-84 – Reemplazo generacional en algoritmo genético adaptativo (sin ruido – con ruido) .....	196
Figura 7-85 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según algoritmo genético adaptativo (sin ruido – con ruido).....	196
Figura 7-86 – Evolución población en algoritmo genético adaptativo (sin ruido).....	197
Figura 7-87 – Evolución población en algoritmo genético adaptativo (con ruido).....	198
Figura 7-88 – Evolución partículas en enjambre de partículas (sin ruido).....	200
Figura 7-89 – Evolución partículas en enjambre de partículas (con ruido).....	201
Figura 7-90 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según enjambre de partículas (sin ruido – con ruido) .....	202
Figura 7-91 – Reemplazo generacional en algoritmo genético simple (sin ruido – con ruido) .....	203
Figura 7-92 – Evolución población en algoritmo genético simple (sin ruido).....	204
Figura 7-93 – Evolución población en algoritmo genético simple (con ruido).....	205
Figura 7-94 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido) .....	206
Figura 7-95 – Mapa trayectoria $E_1$ y $E_2$ para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	206
Figura 7-96 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según Genético Simple y Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	207
Figura 7-97 – Reemplazo generacional en algoritmo genético adaptativo (sin ruido – con ruido) .....	208
Figura 7-98 – Evolución población en algoritmo genético adaptativo (sin ruido).....	209
Figura 7-99 – Evolución población en algoritmo genético adaptativo (con ruido).....	210
Figura 7-100 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido) .....	211

Figura 7-101 – Mapa trayectoria $E_1$ y $E_2$ para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	211
Figura 7-102 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según Genético Simple y Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	212
Figura 7-103 – Evolución partículas en enjambre de partículas (sin ruido) .....	213
Figura 7-104 – Evolución partículas en enjambre de partículas (con ruido).....	214
Figura 7-105 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido) .....	215
Figura 7-106 – Mapa trayectoria $E_1$ y $E_2$ para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	216
Figura 7-107 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según enjambre de partículas y Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	216
Figura 7-108 – Curva de aprendizaje red neuronal.....	218
Figura 7-109 – Histograma del error de predicción de la red neuronal.....	219
Figura 7-110 – Curvas de gradiente, parámetro de ajuste y fallos de validación .....	220
Figura 7-111 – Comparación valores reales y estimados por red neuronal .....	220
Figura 7-112 – Representación de correlación por subconjuntos .....	221
Figura 7-113 – Sensibilidad modelo red neuronal respecto a $N_{1,60}$ .....	222
Figura 7-114 – Resultados ensayo SPT de campo y corregidos ( $N_{1,60}$ ) .....	223
Figura 7-115 – Resultados módulos elasticidad obtenidos del modelo de <i>Machine Learning</i> .....	224
Figura 7-116 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido) .....	225
Figura 7-117 – No. Iteraciones para convergencia según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido) .....	225
Figura 7-118 – Mapa trayectoria $E_1$ y $E_2$ para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	226
Figura 7-119 – Mapa trayectoria $E_1$ y $E_2$ para cada iteración según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido).....	226
Figura 7-120 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según red neuronal y Gauss-Newton (sin ruido – con ruido).....	227
Figura 7-121 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según red neuronal y Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido) .....	227
Figura 7-122 – Evolución población en algoritmo genético simple.....	230
Figura 7-123 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente.....	231
Figura 7-124 – Mapa trayectoria $A$ y $B$ para cada iteración según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente.....	231
Figura 7-125 – Asiento teórico con valores de $E_1$ y $E_2$ retrocalculados según Genético Simple y Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt.....	232

Figura 7-126 – Evolución población en Algoritmo Genético Adaptativo .....	234
Figura 7-127 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente.....	235
Figura 7-128 – Mapa trayectoria <i>A</i> y <i>B</i> para cada iteración según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente.....	235
Figura 7-129 – Asiento teórico con valores de <i>A</i> y <i>B</i> retrocalculados según Genético Adaptativo y Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente .....	236
Figura 7-130 – Evolución partículas en enjambre de partículas .....	238
Figura 7-131 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente.....	239
Figura 7-132 – Mapa trayectoria <i>A</i> y <i>B</i> para cada iteración según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente.....	239
Figura 7-133 – Asiento teórico con valores de <i>A</i> y <i>B</i> retrocalculados según enjambre de partículas y Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt.....	240
Figura 7-134 – Representación de correlación del módulo presiométrico vs profundidad ..	241
Figura 7-135 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton & Levenberg-Marquardt.....	242
Figura 7-136 – Mapa trayectoria <i>A</i> y <i>B</i> para cada iteración según Gauss-Newton & Levenberg-Marquardt.....	243
Figura 7-137 – Asiento teórico con valores de <i>A</i> y <i>B</i> retrocalculados según ML y GN o LM...	243
Figura A-138 – Error cuadrático vs Iteración. Gauss-Newton sin ruido.....	261
Figura A-139 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido	261
Figura A-140 – Perfil asiento retrocalculado. Gauss-Newton sin ruido.....	262
Figura A-141 – Error cuadrático vs Iteración. Gauss-Newton con ruido .....	262
Figura A-142 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido .....	263
Figura A-143 – Perfil asiento retrocalculado. Gauss-Newton con ruido.....	263
Figura A-144 – Error cuadrático vs Iteración. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido.....	264
Figura A-145 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido .....	264
Figura A-146 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido.....	265
Figura A-147 – Error cuadrático vs Iteración. Mutistart Levenberg-Marquardt con ruido ...	265
Figura A-148 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido .....	266
Figura A-149 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Levenberg-Marquardt con ruido.....	266
Figura A-150 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido .....	267
Figura A-151 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido.....	267

Figura A-152 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Levenberg-Marquardt con ruido .....	268
Figura A-153 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Levenberg-Marquardt con ruido.....	268
Figura A-154 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Gauss-Newton sin ruido.....	269
Figura A-155 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Gauss-Newton sin ruido.....	269
Figura A-156 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Gauss-Newton sin ruido .....	270
Figura A-157 – Error cuadrático vs Iteración. Mutistart Gauss-Newton con ruido .....	270
Figura A-158 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Gauss-Newton con ruido.....	271
Figura A-159 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Gauss-Newton con ruido .....	271
Figura A-160 – Error cuadrático vs Iteración. Cuasi-Newton BFGS sin ruido.....	272
Figura A-161 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Cuasi-Newton BFGS sin ruido .....	272
Figura A-162 – Perfil asiento retrocalculado. Cuasi-Newton BFGS sin ruido.....	273
Figura A-163 – Error cuadrático vs Iteración. Cuasi-Newton BFGS con ruido .....	273
Figura A-164 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Cuasi-Newton BFGS con ruido.....	274
Figura A-165 – Perfil asiento retrocalculado. Cuasi-Newton BFGS con ruido.....	274
Figura A-166 – Reemplazo generacional. Algoritmo genético simple sin ruido.....	275
Figura A-167 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 1.....	275
Figura A-168 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 5.....	276
Figura A-169 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 10.....	276
Figura A-170 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 20.....	277
Figura A-171 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 30.....	277
Figura A-172 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 40.....	278
Figura A-173 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 50.....	278
Figura A-174 – Evolución E1-E4. Algoritmo genético simple sin ruido.....	279
Figura A-175 – Perfil asiento retrocalculado. Algoritmo genético simple sin ruido.....	279
Figura A-176 – Reemplazo generacional. Algoritmo genético simple con ruido .....	280
Figura A-177 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 1 .....	280

Figura A-178 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 5 .....	281
Figura A-179 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 10.....	281
Figura A-180 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 20.....	282
Figura A-181 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 30.....	282
Figura A-182 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 40.....	283
Figura A-183 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 50.....	283
Figura A-184 – Evolución E1-E4. Algoritmo genético simple con ruido.....	284
Figura A-185 – Perfil asiento retrocalculado. Algoritmo genético simple con ruido .....	284
Figura A-186 – Reemplazo generacional. Algoritmo genético adaptativo sin ruido .....	285
Figura A-187 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 1.....	285
Figura A-188 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 5.....	286
Figura A-189 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 10.....	286
Figura A-190 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 20.....	287
Figura A-191 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 30.....	287
Figura A-192 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 40.....	288
Figura A-193 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 50.....	288
Figura A-194 – Evolución E1-E4. Algoritmo genético adaptativo sin ruido.....	289
Figura A-195 – Perfil asiento retrocalculado. Algoritmo genético adaptativo sin ruido .....	289
Figura A-196 – Reemplazo generacional. Algoritmo genético adaptativo con ruido .....	290
Figura A-197 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 1 .....	290
Figura A-198 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 5 .....	291
Figura A-199 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 10.....	291
Figura A-200 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 20.....	292



Figura A-201 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 30.....	292
Figura A-202 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 40.....	293
Figura A-203 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 50.....	293
Figura A-204 – Evolución E1-E4. Algoritmo genético adaptativo con ruido .....	294
Figura A-205 – Perfil asiento retrocalculado. Algoritmo genético adaptativo con ruido .....	294
Figura A-206 – Evolución de la actualización de posición. Enjambre de partículas sin ruido .....	295
Figura A-207 – Evolución E1-E4. Enjambre de partículas sin ruido .....	295
Figura A-208 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido. Iteración 1.....	296
Figura A-209 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido. Iteración 5.....	296
Figura A-210 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido. Iteración 10 .....	297
Figura A-211 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido. Iteración 20 .....	297
Figura A-212 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido. Iteración 30 .....	298
Figura A-213 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido. Iteración 40.....	298
Figura A-214 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido. Iteración 50 .....	299
Figura A-215 – Perfil asiento retrocalculado. Enjambre de partículas sin ruido .....	299
Figura A-216 – Evolución de la actualización de posición. Enjambre de partículas con ruido .....	300
Figura A-217 – Evolución E1-E4. Enjambre de partículas con ruido .....	300
Figura A-218 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido. Iteración 1.....	301
Figura A-219 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido. Iteración 5.....	301
Figura A-220 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido. Iteración 10 .....	302
Figura A-221 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido. Iteración 20 .....	302
Figura A-222 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido. Iteración 30 .....	303
Figura A-223 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido. Iteración 40 .....	303

Figura A-224 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido. Iteración 50 .....	304
Figura A-225 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido. Iteración 50 .....	304
Figura A-226 – Perfil asiento retrocalculado. Enjambre de partículas con ruido.....	305
Figura A-227 – Evolución del mejor valor. Evolución diferencial sin ruido.....	306
Figura A-228 – Evolución E1-E2. Evolución diferencial sin ruido.....	306
Figura A-229 – Mapa de soluciones. Evolución diferencial sin ruido .....	307
Figura A-230 – Perfil asiento retrocalculado. Evolución diferencial sin ruido .....	307
Figura A-231 – Evolución del mejor valor. Evolución diferencial con ruido .....	308
Figura A-232 – Evolución E1-E2. Evolución diferencial con ruido .....	308
Figura A-233 – Mapa de soluciones. Evolución diferencial con ruido .....	309
Figura A-234 – Perfil asiento retrocalculado. Evolución diferencial con ruido .....	309
Figura A-235 – Evolución del mejor valor. Recocido simulado sin ruido .....	310
Figura A-236 – Evolución E1-E2. Recocido simulado sin ruido .....	310
Figura A-237 – Mapa de soluciones. Recocido simulado sin ruido .....	311
Figura A-238 – Perfil asiento retrocalculado. Recocido simulado sin ruido .....	311
Figura A-239 – Evolución del mejor valor. Recocido simulado con ruido .....	312
Figura A-240 – Evolución E1-E2. Recocido simulado con ruido .....	312
Figura A-241 – Mapa de soluciones. Recocido simulado con ruido.....	313
Figura A-242 – Perfil asiento retrocalculado. Recocido simulado con ruido.....	313
Figura A-243 – Evolución E1-E2. Nelder-Mead sin ruido .....	314
Figura A-244 – Evolución del mejor valor. Nelder-Mead sin ruido .....	314
Figura A-245 – Mapa de soluciones. Nelder-Mead sin ruido .....	315
Figura A-246 – Perfil asiento retrocalculado. Nelder-Mead sin ruido .....	315
Figura A-247 – Evolución mejor valor. Nelder-Mead con ruido .....	316
Figura A-248 – Evolución E1-E2. Nelder-Mead con ruido.....	316
Figura A-249 – Mapa de soluciones. Nelder-Mead con ruido.....	317
Figura A-250 – Perfil asiento retrocalculado. Nelder-Mead con ruido.....	317
Figura A-251 – Número de evaluaciones por iteración. Optimización Bayesiana sin ruido ..	318
Figura A-252 – Evolución E1-E4. Optimización Bayesiana sin ruido.....	318
Figura A-253 – Mapa de soluciones. Optimización Bayesiana sin ruido.....	319
Figura A-254 – Número de evaluaciones por iteración. Optimización Bayesiana con ruido .	319
Figura A-255 – Evolución E1-E4. Optimización Bayesiana con ruido .....	320
Figura A-256 – Mapa de soluciones. Optimización Bayesiana con ruido .....	320
Figura A-257 – Evolución E1-E4. Proceso Gaussiano sin ruido.....	321

Figura A-258 – Mapa de soluciones. Proceso Gaussiano sin ruido .....	321
Figura A-259 – Perfil asiento retrocalculado. Proceso Gaussiano sin ruido .....	322
Figura A-260 – Evolución E1-E4. Proceso Gaussiano con ruido .....	322
Figura A-261 – Mapa de soluciones. Proceso Gaussiano con ruido .....	323
Figura A-262 – Perfil asiento retrocalculado. Proceso Gaussiano con ruido .....	323
Figura A-263 – Evolución mejor resultado. Kriging sin ruido.....	324
Figura A-264 – Evolución E1-E4. Kriging sin ruido.....	324
Figura A-265 – Mapa de soluciones. Kriging sin ruido.....	325
Figura A-266 – Perfil asiento retrocalculado. Kriging sin ruido.....	325
Figura A-267 – Evolución mejor resultado. Kriging con ruido .....	326
Figura A-268 – Evolución E1-E4. Kriging con ruido.....	326
Figura A-269 – Mapa de soluciones. Kriging con ruido .....	327
Figura A-270 – Perfil asiento retrocalculado. Kriging con ruido .....	327
Figura A-271 – Evolución mejor resultado. Programación matemática sin ruido .....	328
Figura A-272 – Mapa de soluciones. Programación matemática sin ruido.....	328
Figura A-273 – Perfil asiento retrocalculado. Programación matemática sin ruido .....	329
Figura A-274 – Evolución mejor resultado. Programación matemática con ruido .....	329
Figura A-275 – Mapa de soluciones. Programación matemática con ruido .....	330
Figura A-276 – Perfil asiento retrocalculado. Programación matemática con ruido .....	330
Figura A-277 – Evolución mejor resultado. Programación no lineal sin ruido .....	331
Figura A-278 – Mapa de soluciones. Programación no lineal sin ruido .....	331
Figura A-279 – Perfil asiento retrocalculado. Programación no lineal sin ruido .....	332
Figura A-280 – Evolución mejor resultado. Programación no lineal con ruido.....	332
Figura A-281 – Mapa de soluciones. Programación no lineal con ruido.....	333
Figura A-282 – Perfil asiento retrocalculado. Programación no lineal con ruido.....	333
Figura A-283 – Perfil asiento retrocalculado. Optimización robusta sin ruido .....	334
Figura A-284 – Perfil asiento retrocalculado. Optimización robusta con ruido .....	335
Figura A-285 – Perfil asiento retrocalculado. Optimización distribuidamente robusta sin ruido .....	336
Figura A-286 – Perfil asiento retrocalculado. Optimización distribuidamente robusta con ruido .....	337
Figura A-287 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 1.....	338
Figura A-288 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 2.....	338
Figura A-289 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 3.....	339

Figura A-290 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 4.....	339
Figura A-291 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 5.....	340
Figura A-292 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 6.....	340
Figura A-293 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 7.....	341
Figura A-294 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 8.....	341
Figura A-295 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 9.....	342
Figura A-296 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 10.....	342
Figura A-297 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido. ....	343
Figura A-298 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido GS+GN sin ruido. ....	343
Figura A-299 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 1 .....	344
Figura A-300 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 2 .....	344
Figura A-301 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 3 .....	345
Figura A-302 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 4 .....	345
Figura A-303 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 5 .....	346
Figura A-304 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 6 .....	346
Figura A-305 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 7 .....	347
Figura A-306 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 8 .....	347
Figura A-307 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 9 .....	348
Figura A-308 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido. Generación 10.....	348
Figura A-309 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido. ....	349
Figura A-310 – Perfil de asiento retrocalculado. Híbrido GS+GN con ruido. ....	349
Figura A-311 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 1.....	350

Figura A-312 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 2.....	350
Figura A-313 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 3.....	351
Figura A-314 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 4.....	351
Figura A-315 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 5.....	352
Figura A-316 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 6.....	352
Figura A-317 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 7.....	353
Figura A-318 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 8.....	353
Figura A-319 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 9.....	354
Figura A-320 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 10.....	354
Figura A-321 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido. ....	355
Figura A-322 – Perfil de asiento retrocalculado. Híbrido GS + LM sin ruido. ....	355
Figura A-323 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 1.....	356
Figura A-324 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 5.....	356
Figura A-325 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 10.....	357
Figura A-326 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. GN sin ruido. ....	357
Figura A-327 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido. ....	358
Figura A-328 – Perfil de asiento retrocalculado. Híbrido GA + GN sin ruido.....	358
Figura A-329 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 1 .....	359
Figura A-330 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 5 .....	359
Figura A-331 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 10.....	360
Figura A-332 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. GN con ruido. ....	360
Figura A-333 – Perfil de asiento retrocalculado. Híbrido GA + GN con ruido. ....	361
Figura A-334 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. PSO sin ruido. Generación 10 .....	362
Figura A-335 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido. ....	362

Figura A-336 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido. ....	363
Figura A-337 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido PSO+GN sin ruido. ....	363
Figura A-338 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. PSO con ruido. Generación 10.....	364
Figura A-339 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido. ....	364
Figura A-340 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido PSO+GN con ruido. ....	365
Figura A-341 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. DE sin ruido. Generación 10 .....	366
Figura A-342 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido. ....	366
Figura A-343 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido. ....	367
Figura A-344 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido DE+GN sin ruido.....	367
Figura A-345 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. DE con ruido. Generación 10 .....	368
Figura A-346 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido. ....	368
Figura A-347 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido DE+GN con ruido. ....	369
Figura A-348 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. SA sin ruido. Iteración 10 .....	370
Figura A-349 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido. ....	370
Figura A-350 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido. ....	371
Figura A-351 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SA+GN sin ruido. ....	371
Figura A-352 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. SA con ruido. Iteración 10 .....	372
Figura A-353 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido. ....	372
Figura A-354 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SA+GN con ruido. ....	373
Figura A-355 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. BO sin ruido. Iteración 10 .....	374
Figura A-356 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido. ....	374
Figura A-357 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido BO+GN sin ruido.....	375
Figura A-358 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. BO con ruido. Iteración 10 .....	375
Figura A-359 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido. ....	376
Figura A-360 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido BO+GN con ruido. ....	376

Figura A-361 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. GP sin ruido. Iteración 10 .....	377
Figura A-362 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido. ....	377
Figura A-363 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido GP+GN sin ruido. ....	378
Figura A-364 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. GP con ruido. Iteración 10 .....	378
Figura A-365 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido. ....	379
Figura A-366 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido GP+GN con ruido. ....	379
Figura A-367 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Kriging sin ruido. Iteración 20 .....	380
Figura A-368 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido. ....	380
Figura A-369 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido. ....	381
Figura A-370 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Kriging+GN sin ruido. ..	381
Figura A-371 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Kriging con ruido. Iteración 20 .....	382
Figura A-372 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido. ....	382
Figura A-373 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Kriging+GN con ruido. .	383
Figura A-374 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido. ....	384
Figura A-375 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido CMA-ES+GN sin ruido. .	384
Figura A-376 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido. ....	385
Figura A-377 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido CMA-ES+GN con ruido. ....	385
Figura A-378 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Cuckoo Search sin ruido. Iteración 10 .....	386
Figura A-379 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido. ....	386
Figura A-380 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Cuckoo+GN sin ruido....	387
Figura A-381 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Cuckoo Search con ruido. Iteración 10 .....	387
Figura A-382 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido. ....	388
Figura A-383 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Cuckoo+GN con ruido. .	388
Figura A-384 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Grey Wolf sin ruido. Iteración 10 .....	389

Figura A-385 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.	389
Figura A-386 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Grey Wolf+GN sin ruido.	390
Figura A-387 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Grey Wolf con ruido. Iteración 10	390
Figura A-388 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.	391
Figura A-389 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Grey Wolf+GN con ruido.	391
Figura A-390 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.	392
Figura A-391 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SCE+GN sin ruido.	392
Figura A-392 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.	393
Figura A-393 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SCE+GN con ruido.	393
Figura A-394 – Mapa de soluciones NSGA-II sin ruido.	394
Figura A-395 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.	394
Figura A-396 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido NSGA-II +GN sin ruido.	395
Figura A-397 – Mapa de soluciones NSGA-II con ruido.	395
Figura A-398 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.	396
Figura A-399 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido NSGA-II +GN con ruido.	396
Figura A-400 – Mapa de soluciones SPEA2 sin ruido.	397
Figura A-401 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.	397
Figura A-402 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SPEA2+GN sin ruido.	398
Figura A-403 – Mapa de soluciones SPEA2 con ruido.	398
Figura A-404 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.	399
Figura A-405 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SPEA2+GN con ruido.	399



## LISTADO DE TABLAS

Tabla 3-1 – Factor de corrección de la profundidad .....	87
Tabla 3-2 – Relación entre factor de influencia.....	91
Tabla 3-3 – Coeficiente de Forma F.....	106
Tabla 6-4 – Valores base adoptados en el caso de estudio .....	164
Tabla 6-5 – Asientos teóricos con y sin ruido .....	165
Tabla 6-6 – Asientos en función de la tensión de contacto.....	170
Tabla 7-7 – Número de iteraciones y error de predicción del módulo de elasticidad $E_1$ & $E_2$ derivados de mediciones sin ruido.....	176
Tabla 7-8 – Número de iteraciones y error de predicción del módulo de elasticidad $E_1$ & $E_2$ derivados de mediciones con ruido .....	177
Tabla 7-9 – Error de predicción del asiento mediante $E_1$ & $E_2$ retrocalculados .....	178
Tabla 7-10 – Error de predicción del asiento mediante parámetros retrocalculados.....	179
Tabla 7-11 – Resumen influencia SHAP por módulo elástico .....	186
Tabla 8-12 – Síntesis comparativa de los resultados.....	248

## RESUMEN

Este Trabajo de Fin de Máster propone una metodología innovadora de análisis retrospectivo de parámetros geotécnicos aplicada al diseño de cimentaciones superficiales, más concretamente, en la estimación del módulo de elasticidad en suelos granulares. Frente a las limitaciones de los enfoques tradicionales, dependientes de un elevado número de ensayos in situ, hipótesis simplificadas y análisis iterativos costosos, se plantea un esquema híbrido que combina el potencial exploratorio del aprendizaje automático con la precisión de métodos deterministas. El objetivo es ofrecer una herramienta robusta, eficiente y adaptable a contextos reales de obra civil y edificación.

En primer lugar, se implementa un módulo de búsqueda global que, gracias a técnicas de *Machine Learning*, ofrece estimaciones preliminares del módulo de elasticidad y otros parámetros esenciales. A continuación, estas estimaciones se refinan mediante un algoritmo de optimización que integra los métodos de Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt, garantizando una convergencia rápida y estable. Este enfoque asegura no solo la precisión en la predicción de respuestas tensionales y deformacionales, sino también una drástica reducción en el número de iteraciones necesarias.

La metodología se valida exhaustivamente en dos escenarios: un caso sintético (con y sin introducción de ruido estadístico) y un proyecto real de cimentación en un edificio de gran altura. En el primer caso, se alcanzó un error medio cuadrático (RMSE) de apenas 2.3 kPa ( $R^2=1.00$ ) en condiciones ideales y 1,623.0 kPa ( $R^2=0.898$ ) con ruido; en el segundo, la correlación con los datos reales obtuvo un  $R^2=0.998$ . Estos resultados se han contrastado con treinta y dos métodos clásicos de análisis inverso, ofreciendo el método propuesto no solo una eficiencia computacional notablemente inferior, sino que también demuestran una elevada precisión en los parámetros retrocalculados.

Además, la arquitectura modular de la propuesta facilita su integración con sistemas de monitorización en tiempo real (IoT) y herramientas de inteligencia artificial, adaptándose a los nuevos Eurocódigos (EN 1997-1:2024, EN 1997-3:2025) y contribuyendo al cumplimiento de los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la Agenda 2030. En definitiva, este estudio ofrece una herramienta robusta y escalable, capaz de transformar la práctica profesional en diseño y control de cimentaciones, reduciendo costes y tiempos sin sacrificar fiabilidad ni seguridad.

## ABSTRACT

This Master's Thesis proposes an innovative backanalysis methodology for the calibration of geotechnical parameters applied to the design of shallow foundations, specifically focusing on the estimation of the elastic modulus in granular soils. In contrast to the limitations of traditional approaches, typically reliant on a large number of in situ tests, simplified assumptions, and computationally expensive iterative analyses, this work introduces a hybrid framework that combines the exploratory power of machine learning with the precision of deterministic methods. The aim is to deliver a robust, efficient, and adaptable tool for real-world civil engineering and building projects.

First, a global search module is implemented using machine learning techniques to provide preliminary estimates of the elastic modulus and other key soil parameters. These estimates are then refined through an optimization algorithm that incorporates either the Gauss-Newton or Levenberg-Marquardt methods, ensuring rapid and stable convergence. This dual-stage approach guarantees not only accurate predictions of stress and deformation responses, but also a significant reduction in the number of iterations required.

The proposed methodology is thoroughly validated in two scenarios: a synthetic case (both with and without added statistical noise) and a real-world foundation project for a high-rise building. In the synthetic case, a root mean square error (RMSE) of just 2.3 kPa ( $R^2 = 1.00$ ) was achieved under ideal conditions, and 1,623.0 kPa ( $R^2 = 0.898$ ) with noise. In the real project, the correlation with monitored data reached  $R^2 = 0.998$ . These results were benchmarked against thirty-two conventional inverse analysis methods, with the proposed approach demonstrating not only superior computational efficiency but also high accuracy in the back-calculated parameters.

Moreover, the modular architecture of the methodology facilitates integration with real-time monitoring systems (IoT) and artificial intelligence tools. It aligns with the requirements of the new Eurocodes (EN 1997-1:2024, EN 1997-3:2025) and contributes to the achievement of the Sustainable Development Goals of the 2030 Agenda. In summary, this study presents a robust and scalable solution with the potential to transform professional practice in the design and monitoring of foundations, reducing both costs and execution time without compromising reliability or safety.

## 1. INTRODUCCIÓN

Mucho antes del desarrollo formal de la mecánica de suelos, civilizaciones antiguas como los egipcios, griegos o romanos ya conocían la importancia del terreno y la necesidad de proporcionar una cimentación adecuada para prolongar la vida útil de sus estructuras. Estas culturas empleaban métodos empíricos basados en la observación directa del comportamiento del suelo: realizaban pruebas de carga rudimentarias para estimar la capacidad portante y los asientos potenciales, estudiaban la vegetación para evaluar la humedad y naturaleza del terreno, o realizaban catas para detectar la presencia de agua subterránea.

Durante la Edad Media, estas prácticas empíricas se complementaron con técnicas como las pruebas de absorción de agua en el terreno natural, que permitían identificar materiales cohesivos y anticipar posibles riesgos o incertidumbres para la cimentación. A lo largo de la historia, la observación del comportamiento del suelo y los ensayos de campo han sido la base para el diseño de cimentaciones y siguen siendo, hasta hoy, herramientas esenciales para la caracterización del medio geotécnico.

Los trabajos realizados por el ingeniero francés Jean-Rodolphe Perronet en el siglo XVIII, destacándose la construcción de puentes como el Pont de Neuilly en París (1772-1774), aplicaban metodologías observacionales pioneras para la evaluación y monitorización del comportamiento del terreno durante la construcción. En sus registros detallados, Perronet documentaba cuidadosamente el asentamiento de las cimentaciones y adaptaba el diseño conforme a las observaciones obtenidas durante la ejecución, ejemplificando tempranamente el enfoque que actualmente conocemos como análisis observacional (Peck, 1969).

Esta metodología de monitoreo sistemático y adaptación constructiva ante comportamientos inesperados del suelo sería posteriormente formalizada por Ralph B. Peck en su influyente trabajo "*Advantages and Limitations of the Observational Method in Applied Soil Mechanics*" (1969), consolidando el análisis observacional como una estrategia fundamental en la práctica geotécnica moderna.

Estas referencias históricas demuestran cómo el análisis observacional ha estado implícitamente presente en la ingeniería geotécnica desde hace siglos, evolucionando significativamente hasta convertirse en una metodología clave respaldada por normativas internacionales contemporáneas como los Eurocódigos, especialmente en la última generación.

El desarrollo de la mecánica de suelos como disciplina científica ha permitido establecer modelos más rigurosos para describir la interacción entre cimentación y terreno. Sin embargo, incluso con la consolidación de estos modelos, el enfoque observacional sigue siendo fundamental, no solo para validar teorías y modelos numéricos, sino también para ajustar las predicciones de comportamiento a las condiciones reales de cada obra.

En este contexto, la irrupción de la Inteligencia Artificial (IA) y la sensorización avanzada (IoT) ha impulsado la evolución de los métodos de análisis observacional, permitiendo aprovechar grandes volúmenes de datos en tiempo real. Estas herramientas ofrecen un enorme potencial para optimizar la toma de decisiones, calibrar modelos numéricos con datos reales y reducir la incertidumbre asociada a la modelización del terreno. La combinación de sistemas de monitoreo mediante sensores de última generación y algoritmos de IA facilita una evaluación más precisa del comportamiento del suelo durante la fase de construcción, permitiendo identificar desviaciones respecto al diseño previsto, minimizar riesgos y optimizar las soluciones de cimentación.

La caracterización y modelización del comportamiento del suelo, junto con los métodos utilizados para evaluar los asientos, son elementos clave para comprender la interacción entre la cimentación y el terreno. Para mejorar la precisión de los modelos empleados por el diseñador, es necesario implementar enfoques híbridos que combinen modelos físicos clásicos con técnicas de análisis de datos, permitiendo ajustar los parámetros geotécnicos a las condiciones reales del suelo mediante sistemas de monitoreo continuo.

En cualquier caso, un análisis riguroso debe contemplar tres etapas esenciales:

- La observación del medio, que proporciona la información básica sobre las condiciones reales del terreno;
- La creación del problema, que implica la formulación de un modelo teórico o numérico basado en los principios de la mecánica de suelos y los datos observados;
- El contraste del modelo con la realidad, mediante la comparación de las predicciones del modelo con los datos obtenidos in situ, ajustando así los parámetros o planteando nuevas hipótesis si es necesario.

Este enfoque cíclico, donde la observación, la modelización y la validación se retroalimentan, es la base para avanzar hacia soluciones más eficaces y adaptativas, especialmente en un

contexto donde las tecnologías de monitoreo y las herramientas de inteligencia artificial están redefiniendo la forma en que se entiende y gestiona la construcción.

El objetivo del presente trabajo es integrar estos enfoques clásicos y modernos para desarrollar una metodología de análisis retrospectivo que permita, a partir de mediciones reales de asientos y presiones de contacto, calibrar parámetros geotécnicos clave y optimizar el diseño de cimentaciones superficiales en función de las condiciones específicas del terreno.

La metodología propuesta en este Trabajo de Final de Máster no solo responde a la necesidad técnica de mejorar la precisión y eficiencia en la estimación de parámetros geotécnicos, sino que también se alinea con los principios de sostenibilidad que rigen la ingeniería del siglo XXI. En concreto, se articula con varios de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) establecidos por la Agenda 2030 de Naciones Unidas, especialmente en lo relativo a la innovación, la eficiencia en el uso de recursos, la resiliencia de las infraestructuras y la mitigación del impacto ambiental de los proyectos de ingeniería civil.

## 2. OBJETIVOS

El presente Trabajo de Final de Máster tiene como objetivo el desarrollo de una metodología de análisis retrospectivo de parámetros geotécnicos, específicamente enfocado en el módulo de elasticidad, con la finalidad de optimizar el diseño estructural y geotécnico de cimentaciones superficiales en suelos granulares. Esta metodología pretende ayudar a reducir las incertidumbres inherentes a las predicciones realizadas mediante modelos numéricos tradicionales y análisis convencionales frente al comportamiento real observado del terreno y la estructura durante su fase operativa.

Para alcanzar este objetivo, se llevará a cabo en primer lugar una revisión exhaustiva del estado del arte, abordando en detalle las bases teóricas relacionadas con el cálculo de asentos en cimentaciones superficiales sobre terrenos granulares. Este análisis incluirá un estudio profundo sobre la teoría de elasticidad aplicada a suelos, los modelos constitutivos más relevantes y utilizados en la práctica actual, y los principales métodos para la determinación de la distribución de tensiones bajo cimentaciones superficiales. Asimismo, se profundizará en las funciones objetivo más utilizadas y en los algoritmos de optimización existentes con el fin de identificar las metodologías más prometedoras. Posteriormente, se realizará una evaluación sistemática y comparativa entre estas técnicas y el método propuesto en este trabajo, aplicándolas a un caso de estudio sintético específicamente diseñado para tal propósito.

El algoritmo de optimización propuesto consistirá en una implementación híbrida, integrando métodos de búsqueda global fundamentados en técnicas de aprendizaje automático (*Machine Learning*), con algoritmos deterministas clásicos de búsqueda local, tales como Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt. Esta combinación tiene como objetivo mejorar la precisión de la estimación de parámetros geotécnicos, al mismo tiempo que reducir el coste computacional asociado a los métodos tradicionales. Además, este algoritmo híbrido se integrará dentro de un flujo de trabajo claramente estructurado, compuesto por modelos físicos fundamentados en los principios esenciales de la mecánica de suelos y del análisis estructural, buscando así equilibrar precisión y rigor físico con capacidad predictiva basada en datos empíricos.

El propósito central de este enfoque híbrido es crear un modelo flexible capaz de aprender patrones complejos directamente a partir de datos reales obtenidos en campo, incorporando simultáneamente bases estructurales y geotécnicas esenciales para una correcta interpretación física de los resultados. Se espera que este modelo mejore de forma significativa a medida que evoluciona la construcción, ofreciendo predicciones cada vez más precisas del

comportamiento real del terreno, reduciendo así las incertidumbres iniciales de diseño y permitiendo optimizar progresivamente la estructura.

Adicionalmente, se estudiará en profundidad la influencia que tiene el punto de partida elegido para realizar el análisis retrospectivo. Este análisis explorará la manera en que la selección inicial de parámetros afecta el número total de iteraciones requeridas hasta alcanzar una solución convergente. El objetivo es desarrollar una metodología clara para orientar adecuadamente el algoritmo hacia puntos iniciales óptimos, logrando así una reducción significativa en el número de iteraciones y, en consecuencia, del consumo computacional global requerido.

El análisis retrospectivo planteado se basará en mediciones realizadas en tiempo real mediante el uso de instrumentación de última generación. En este contexto, se abordará el desarrollo de un procedimiento automatizado de cálculo inverso, que permita integrar directamente los datos generados por el sistema de monitorización con el modelo numérico. El objetivo último de esta automatización es ofrecer recomendaciones de ajuste de parámetros prácticamente en tiempo real, minimizando la intervención humana y manteniendo un coste computacional razonablemente bajo.

Con la intención de validar la metodología propuesta, esta será aplicada a un caso de estudio sintético específicamente desarrollado para este trabajo. Se considerarán dos escenarios diferenciados: un primer caso ideal sin errores de medición, y un segundo caso que incorporará mediciones con ruido estadístico, simulando condiciones más realistas de campo. Adicionalmente, se aplicarán en paralelo los algoritmos clásicos más relevantes, llevando a cabo un análisis exhaustivo y sistemático de la precisión y eficiencia computacional asociada a cada uno de estos métodos, permitiendo así extraer conclusiones fundamentadas y bien documentadas sobre las ventajas comparativas del enfoque híbrido planteado.

También se aplicará el método en un contexto real, compuesto por la cimentación de un edificio de gran altura, con el objetivo de validar aún más la efectividad y robustez del enfoque metodológico propuesto.

Se analizará cuidadosamente la viabilidad y adecuación del algoritmo propuesto dentro del contexto de un enfoque observacional aplicado en proyectos reales. Para ello, se evaluará cómo esta metodología podría integrarse eficazmente dentro del esquema tradicional del enfoque observacional mostrado en la Figura 2-1, generando un diagrama detallado que explicite



claramente el lugar y rol específico del método propuesto dentro del ciclo iterativo típico del método observacional.

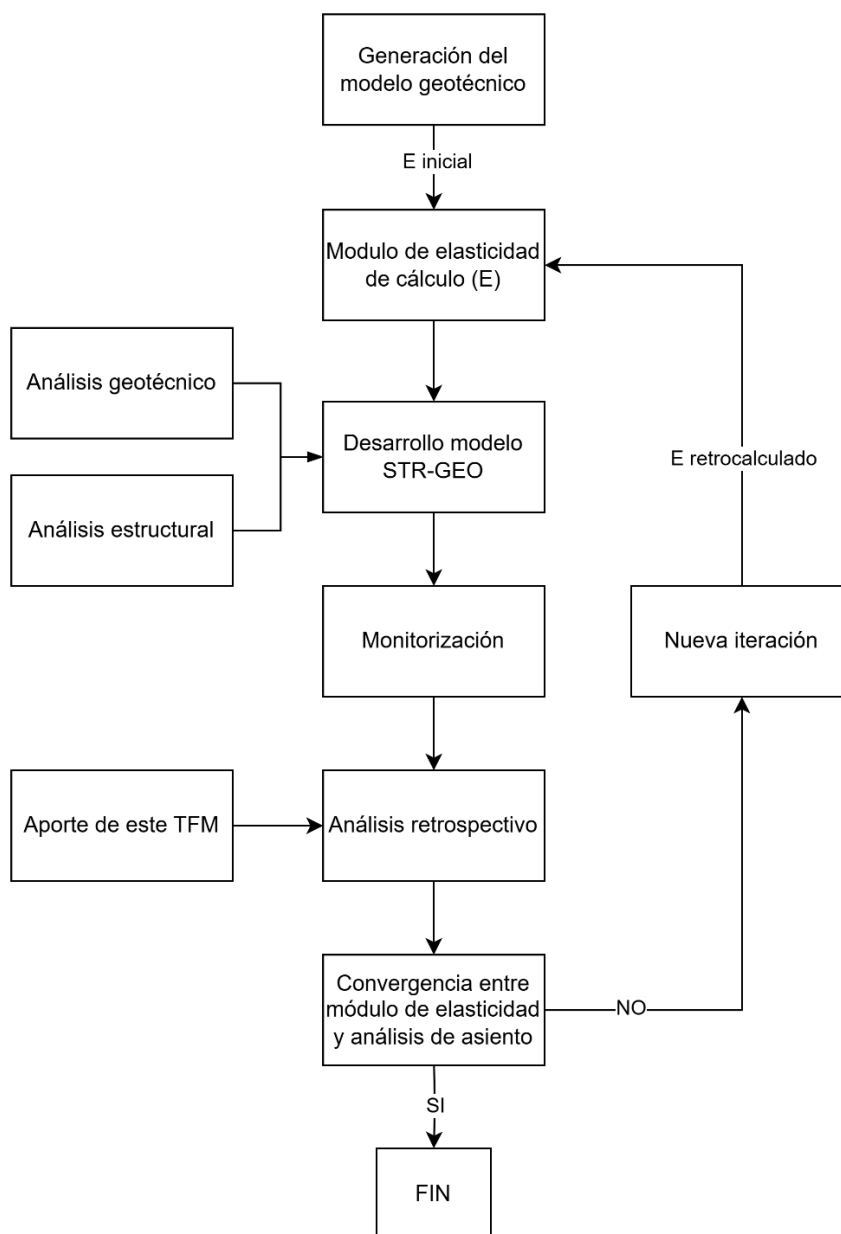


Figura 2-1 – Diagrama del enfoque observacional

Finalmente, es importante destacar que este trabajo se centrará exclusivamente en el análisis retrospectivo del módulo de elasticidad asociado al asiento instantáneo en suelos granulares, quedando explícitamente fuera del alcance del presente estudio los análisis relativos a suelos cohesivos y los procesos de consolidación.

### 3. ESTADO DEL ARTE

#### 3.1 Introducción

El presente capítulo revisa las principales referencias y avances relacionados con el análisis retrospectivo de parámetros geotécnicos a partir de mediciones de asientos y presiones de contacto en cimentaciones superficiales. Este análisis es clave para mejorar la caracterización del comportamiento del suelo y optimizar el diseño de cimentaciones mediante la retroalimentación de datos reales de obra.

El estado del arte se organiza en bloques temáticos (cada uno correspondiente a un concepto o línea de investigación clave). En lugar de seguir un relato histórico lineal de principio a fin, se agrupan los temas según su enfoque central en apartados.

Dentro de cada bloque temático, se realiza una exposición asincrónica por conceptos, no obstante, en los apartados 3.4, 3.5 y 3.6 se presentan los estudios en orden cronológico, de modo que el lector aprecie la evolución interna de ese concepto. Arrancando con el trabajo seminal que introdujo la idea, se continúa con los avances intermedios que la refinaron o diversificaron, y concluye con las publicaciones más recientes, destacando tendencias actuales y limitaciones pendientes.

Este doble criterio (primero por conceptos y luego por tiempo) combina la claridad de un mapa temático con la perspectiva histórica necesaria para entender cómo ha madurado cada línea de investigación antes de mostrar en qué punto se sitúa nuestra propia aportación.

El estado del arte aborda, en primer lugar, los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan los modelos constitutivos del suelo, los cuales son esenciales para la representación matemática y estimación del comportamiento mecánico del suelo ante la aplicación de cargas. Se analizan tanto los conceptos básicos de la elasticidad, viscoelasticidad lineal y plasticidad aplicadas al suelo, como los modelos más relevantes en la literatura: el modelo Hiperbólico de Duncan-Chang, el Modified Cam Clay (MCC), el Barcelona Basic Model (BBM) y el Hardening Soil (HS).

A continuación, se profundiza en la determinación del módulo de elasticidad y otros parámetros derivados de la curva tensión-deformación, destacando su importancia en la estimación de asientos. Se discuten también los factores que condicionan la variabilidad de este módulo en función del tipo de suelo y las condiciones de carga.

Los modelos constitutivos del suelo relacionan las tensiones aplicadas con las deformaciones que obtendría el suelo como resultado. A pesar de que la relación entre la deformación y

tensión de un suelo no es lineal y que los suelos no presentan un comportamiento puramente elástico, ya que experimentan deformaciones irreversibles (plásticas), se pueden estimar diferentes módulos de deformación del suelo a partir de la curva tensión-deformación, siendo el módulo de elasticidad un parámetro ampliamente utilizado en la predicción de la deformación del suelo.

Posteriormente, se revisa la distribución de tensiones bajo cimentaciones superficiales, haciendo énfasis en las soluciones clásicas de la teoría de la elasticidad, como la formulación de Boussinesq, así como en las adaptaciones y extensiones a suelos estratificados. Esta sección es clave para comprender cómo las cargas transmitidas desde la cimentación afectan la magnitud y distribución de los asientos.

El capítulo también desarrolla las formulaciones más relevantes para el cálculo de asientos elásticos o instantáneos en cimentaciones superficiales, incluyendo tanto metodologías basadas en la teoría de la elasticidad como enfoques empíricos y semiempíricos.

Seguidamente, se analiza el concepto de módulo de balasto, el cual mide la relación de los elementos anteriores, la tensión bajo una superficie y el asiento experimentado por dicha área. Este parámetro es ampliamente utilizado en la modelización de losas y vigas de cimentación, pero presenta algunas limitaciones. A lo largo del apartado 3.6 se desarrolla la evolución de las teorías del módulo de balasto, principales técnicas para determinarlo y metodologías de uso en modelos.

Finalmente, se presentan los fundamentos del análisis retrospectivo aplicado a problemas geotécnicos, describiendo las principales funciones objetivo utilizadas para cuantificar la discrepancia entre datos reales y modelos numéricos, y los algoritmos de optimización más empleados para resolver problemas inversos, incluyendo métodos tradicionales y enfoques basados en inteligencia artificial.

Con esta revisión, se establece una base sólida para contextualizar y justificar el enfoque metodológico desarrollado en el presente trabajo, identificando las principales contribuciones de la literatura y las brechas existentes que motivan la investigación.

### 3.2 Modelo constitutivo del suelo

Los modelos constitutivos del suelo son una representación matemática para estimar su comportamiento. Generalmente, los modelos relacionan las tensiones aplicadas con las deformaciones que obtendría el suelo como resultado.

Se desarrollan los conceptos básicos de las teorías de elasticidad, viscoelasticidad lineal y plasticidad.

#### 3.2.1 Elasticidad

De acuerdo con la teoría de la elasticidad, las deformaciones y tensiones están linealmente relacionadas.

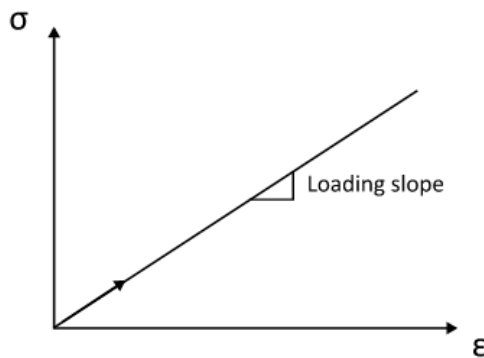


Figura 3-2 – Relación lineal entre tensión-deformación

De acuerdo con las ecuaciones de Hook, hay 6 tensiones y 6 deformaciones, la matriz que relaciona las tensiones con las deformaciones está compuesta por 36 constantes. Considerando un estado de deformación plano en un medio isótropo y simétrico, estas 36 constantes se reducen a solo 2: el módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . Las ecuaciones son:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \quad (1)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \quad (2)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \quad (3)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{2} \quad (6)$$

Donde;

$\sigma_{ii}$ : Tensión normal al plano perpendicular a la dirección i

$\tau_{ij}$ : Tensión tangencial en el plano perpendicular a la dirección i

$\varepsilon_{ii}$ : Deformación normal al plano perpendicular a la dirección i

$\varepsilon_{ij}$ : Deformación tangencial asociada a la tensión tangencial  $\tau_{ij}$

$\gamma_{ij}$ : Deformación angular

E: Módulo de deformación

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

Del módulo de deformación E y coeficiente de Poisson  $\nu$  se obtienen otros módulos de elasticidad como el módulo de corte (7), módulo volumétrico (8) o módulo confinado o de compresibilidad unidireccional (9).

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (7)$$

$$K = \frac{\sigma}{\Delta V/V} = \frac{\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (8)$$

$$M = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (9)$$

### 3.2.2 Viscoelasticidad lineal

Cuando se aplica una carga a un material elástico lineal, las tensiones, deformaciones y desplazamientos ocurren instantáneamente y permanecen constantes con el tiempo. La viscoelasticidad introduce la influencia del tiempo en el proceso de deformación (Figura 3-3).

La viscoelasticidad lineal simplifica aún más este fenómeno al permitir la superposición de la deformación elástica y la deformación dependiente del tiempo.

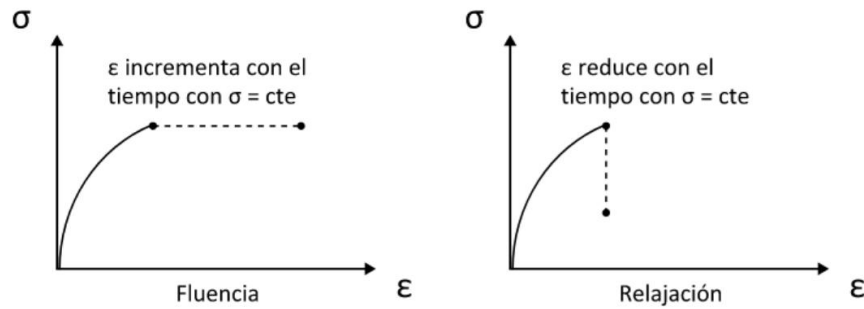


Figura 3-3 – Fluencia y relajación en modelos viscoelásticos

El comportamiento de la tensión a lo largo del tiempo está relacionado con la deformación mediante una función conocida como módulo de relajación  $G(t)$ , ecuación (10). De manera similar, el comportamiento de la deformación a lo largo del tiempo en un material viscoelástico se relaciona con la tensión mediante una función denominada función de cumplimiento de la fluencia  $J(t)$ , ecuación (11).

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = k e^{-\frac{t}{n/k}} \quad (10)$$

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{k} \left( 1 - e^{-\frac{t}{n/k}} \right) \quad (11)$$

De acuerdo con los estudios de Ludwig Boltzmann, en el momento  $t'_1 = 0$ , una tensión constante  $\sigma_1$  es aplicada produciendo una deformación de:

$$\varepsilon_1(t) = J(t)\sigma_1 \quad (12)$$

Tras un incremento de tiempo hasta  $t'_2$ , se aplica un incremento en la tensión de  $(\sigma_2 - \sigma_1)$ , incrementando la deformación a:

$$\varepsilon_2(t) = J(t - t'_2)(\sigma_2 - \sigma_1) \quad (13)$$

Aplicando sucesivos incrementos en la tensión, la deformación total sería de:

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) = \sum_{i=1}^n J(t - t'_i)(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \quad (14)$$

La expresión anterior correspondería a la deformación viscosa, la cual tiene que sumarse a la deformación elástica, quedando finalmente:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(\text{elástico}) + \sum_{i=1}^n J(t - t'_i)(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \quad (15)$$

De manera similar, para el caso de relajación, la ecuación es:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(\text{elástico}) + \sum_{i=1}^n G(t - t'_i)(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \quad (16)$$

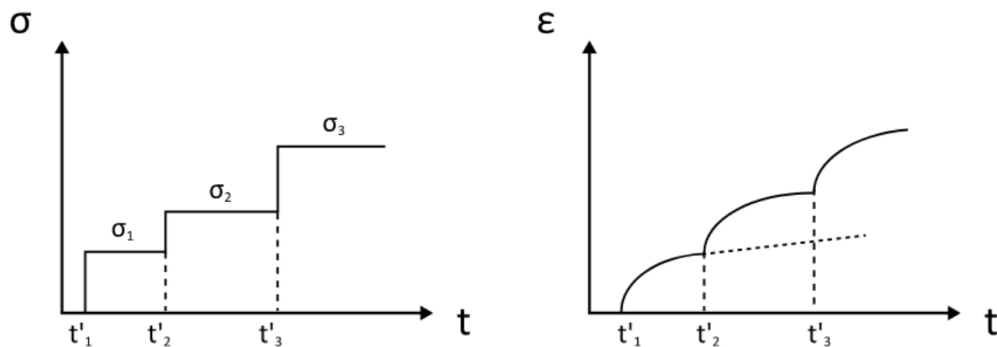


Figura 3-4 – Principio de superposición de viscoelasticidad lineal

### 3.2.3 Plasticidad

La deformación se puede descomponer en una componente elástica y otra plástica. El modelo tendría inicialmente un comportamiento elástico, tras retirar la carga, se recuperan las deformaciones, pero alcanzado el límite elástico, el suelo seguiría deformándose plásticamente, es decir, al desaparecer la carga no se recuperan las deformaciones, hasta alcanzar el fallo.

Una vez alcanzado el límite elástico, el suelo puede endurecerse, ablandarse o comportarse como un material perfectamente plástico (Figura 3-5).

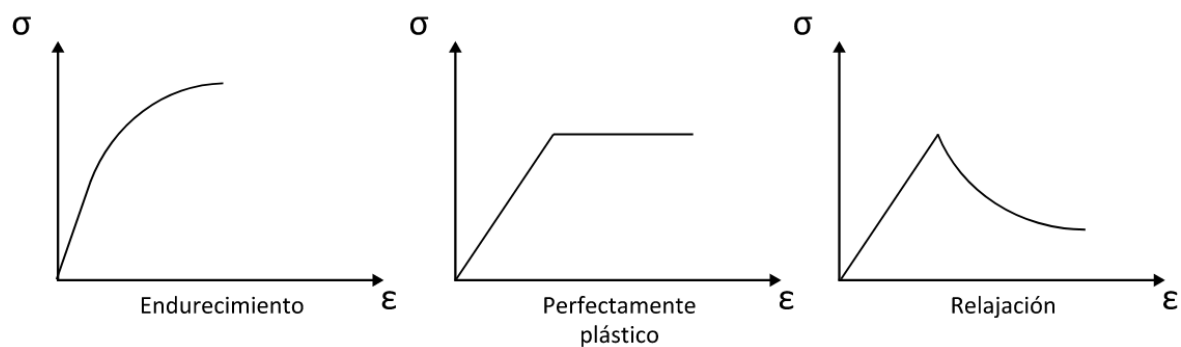


Figura 3-5 – Comportamiento plástico

La plasticidad es principalmente una teoría no lineal, por lo que se deben considerar los incrementos de deformación en el cálculo de la deformación.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e(\text{elástico}) + d\epsilon_{ij}^p(\text{plástico}) \quad (17)$$

#### 3.2.3.1 Criterio de fallo

En mecánica de suelos, los dos criterios de fallo más comunes son el criterio de Tresca y el criterio de Mohr-Coulomb.

El criterio de Tresca se aplica frecuentemente a suelos finos bajo condiciones no drenadas. Este criterio establece que el fallo ocurre cuando la diferencia entre el esfuerzo principal mayor y el esfuerzo principal menor alcanza un valor igual a dos veces la resistencia al corte no drenada ( $s_u$ ):



$$\sigma_1 - \sigma_3 - 2s_u = 0 \quad (18)$$

El criterio de Mohr-Coulomb establece que el fallo ocurre cuando el círculo de Mohr toca la línea que corresponde a la ecuación de resistencia al corte:

$$\tau_f - c' - \sigma' \tan \varphi' = 0 \quad (19)$$

Donde;

$\tau$ : Esfuerzo cortante

$\sigma$ : Esfuerzo normal

$c'$ : Cohesión. Intersección de la línea de fallo con el eje  $\tau$ .

$\varphi'$ : Ángulo de rozamiento interno. Pendiente de la envolvente de fallo.

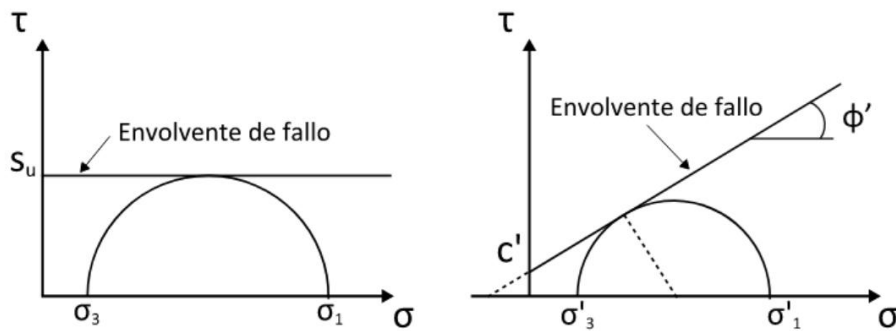


Figura 3-6 – Criterios de fallo de Tresca y Mohr-Coulomb

En el criterio de Mohr-Coulomb, si  $\varphi' = 0$ , se deduce el criterio de Tresca.

La ecuación (19) se puede expresar en función de las tensiones principales máxima y mínima:

$$\text{seno } \varphi' = \frac{\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}}{\frac{c'}{\tan \varphi'} + \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}} \quad (20)$$

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 - 2c' \cos \varphi' - (\sigma'_1 + \sigma'_3) \text{seno } \varphi' = 0 \quad (21)$$

El círculo de Mohr comienza en un estado de esfuerzos que corresponde al equilibrio in situ del suelo. A medida que el suelo es cargado, primero se deforma de manera elástica, hasta que el círculo alcanza el criterio de fallo (la ecuación de resistencia al corte). En ese punto, el círculo no puede superar la línea de la envolvente de fallo, pero puede crecer a lo largo del mismo (endurecimiento por deformación) o disminuir su tamaño a lo largo de la envolvente de fallo (ablandamiento por deformación). En el caso de las arenas ( $c'=0$ ), el criterio de fallo de Mohr-Coulomb se simplifica a:

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} - \frac{1 + \text{seno } \varphi'}{1 - \text{seno } \varphi'} = 0 \quad (22)$$

Donde  $\sigma'$  es la tensión efectiva que, de acuerdo con el principio de tensiones de Terzaghi, es la diferencia entre la tensión total  $\sigma$  y la presión de poro  $u$ .

### 3.2.4 Principales modelos constitutivos

A continuación, se presentan algunos de los modelos más relevantes.

#### 3.2.4.1 Modelo Hiperbólico de Duncan-Chang

Características:

- Es un modelo elasto-plástico no lineal basado en la relación hiperbólica entre el esfuerzo y la deformación axial observada en ensayos triaxiales de suelos granulares.
- Introduce el concepto de un módulo tangente ( $E_t$ ) y un módulo de confinamiento ( $K$ ), ambos dependientes del nivel de esfuerzo.
- Representa el comportamiento de suelos en el rango elástico y hasta cerca del punto de fallo.

Ecuación:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{a + b(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (23)$$

Donde  $a$  y  $b$  son parámetros dependientes de las condiciones del suelo.

Singularidades:

- No considera el endurecimiento o ablandamiento por deformación.
- Se centra en materiales granulares y no cohesivos.

Aplicaciones:

- Modelado de deformaciones en suelos granulares bajo estructuras como pavimentos y terraplenes.
- Análisis de asientos y estabilidad en cimentaciones superficiales.

### 3.2.4.2 Modified Cam Clay (MCC)

Características:

- Es un modelo elasto-plástico desarrollado para describir el comportamiento de suelos cohesivos (arcillas), basado en el modelo original de Cam Clay.
- Utiliza un criterio de cedencia elíptico en el plano  $q$ - $p'$  (esfuerzo desviador y presión media efectiva), ajustando la compresibilidad y la dilatancia del suelo.
- Introduce parámetros como el índice de rigidez ( $\lambda$ ) y el parámetro de estado crítico ( $M$ ).

Ecuación:

$$q^2 = M^2 p' (p' - p'_c) \quad (24)$$

Donde  $p'_c$  es la presión de preconsolidación.

Singularidades:

- Describe bien el comportamiento de suelos cohesivos bajo esfuerzos triaxiales.
- Es ideal para condiciones drenadas y no drenadas.
- Considera la historia tensional del suelo (normalmente consolidado o sobreconsolidado).

Aplicaciones:

- Predicción de la resistencia al corte y deformaciones en arcillas.
- Estimación de consolidación y comportamiento a largo plazo en suelos cohesivos.

### 3.2.4.3 Barcelona Basic Model (BBM)

Características:

- Diseñado específicamente para suelos no saturados.
- Amplía el Modified Cam Clay al incluir un término que considera la succión ( $s = u_a - u_w$ ), donde  $u_a$  es la presión del aire y  $u_w$  la presión del agua.
- Describe el comportamiento dependiente del contenido de agua y las interacciones entre fases sólida, líquida y gaseosa.

Ecuación:

$$F = q^2 - M^2 p' (p' - p'_c(s)) \quad (25)$$

Donde  $p'_c(s)$  es la presión de preconsolidación ajustada a la succión.

Singularidades:

- Introduce variables específicas para suelos no saturados.
- Permite modelar fenómenos como colapso estructural y expansión debido a cambios en la succión.

Aplicaciones:

- Diseño de infraestructuras en suelos con variaciones de humedad (terraplenes, presas de tierra).
- Modelado de suelos expansivos y colapsables.

### 3.2.4.4 Modelo Hardening Soil (HS)

Características:

- Modelo avanzado que considera endurecimiento por deformación y dependencias del módulo elástico con el nivel de esfuerzo.
- Ideal para describir el comportamiento no lineal de suelos cohesivos y no cohesivos.

Ecuación:

$$\epsilon_1 = \frac{q}{E_{50}} \left( 1 + \frac{q}{q_f} \right) \quad (26)$$

Donde;

$E_{50}$ : Módulo secante dependiente del confinamiento

$q_f$ : Esfuerzo desviador en el fallo

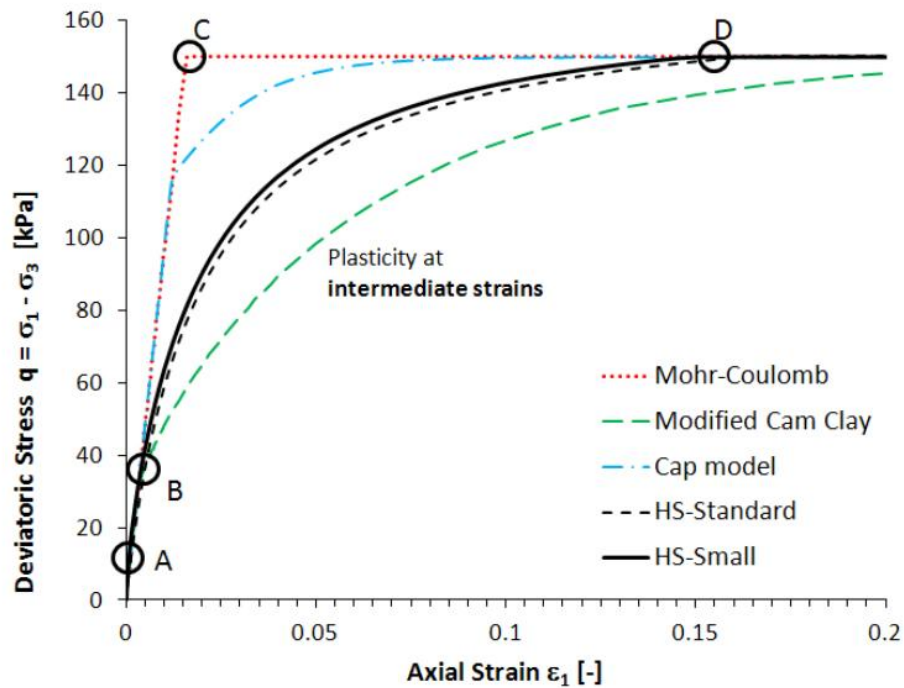
Singularidades:

- Considera la dependencia del módulo con el nivel de confinamiento.
- Introduce el concepto de endurecimiento por deformación

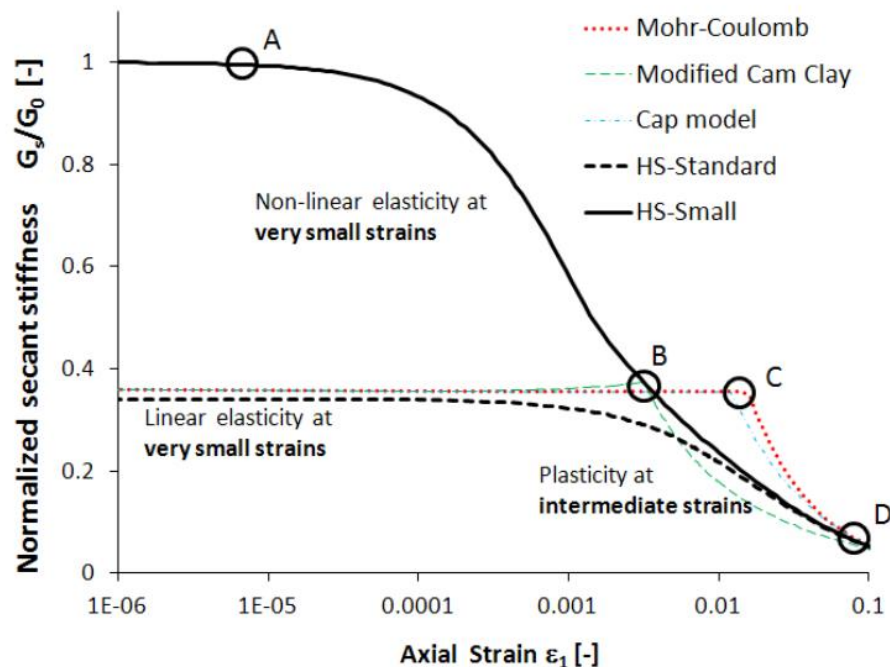
Aplicaciones:

- Análisis detallados de cimentaciones profundas y estructuras de contención.
- Modelado de suelos sometidos a presión de confinamiento variable alrededor de túneles o excavaciones profundas.
- Evaluación de deformaciones bajo cargas repetitivas en terraplenes y carreteras.

La siguiente figura muestra un ejemplo de la respuesta obtenida mediante varios modelos matemáticos al simular un ensayo triaxial.



(a) Stress-strain curves



(b) Normalized secant stiffness curves

Figura 3-7 – Comparación de los resultados de una simulación de un ensayo triaxial drenado utilizando distintos modelos constitutivos. Extraído de *The Hardening Soil Model - A Practical Guidebook*, 2018.

### 3.3 Módulo de elasticidad

La curva que representa la relación entre deformación y tensión de un suelo es no lineal, no obstante, la parte inicial es aproximadamente una recta, en la que se puede aplicar la teoría de la elasticidad para estimar el comportamiento del suelo. La pendiente de esta línea depende del módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ .

Los suelos no presentan un comportamiento puramente elástico, ya que experimentan deformaciones irreversibles (plásticas), incluso ante bajos niveles de esfuerzos. La teoría de la elasticidad lineal implica que la relación tensión-deformación es lineal, pero esto no representa la realidad en suelos, ya que el comportamiento es no lineal desde etapas tempranas en la curva tensión-deformación.

No obstante, se pueden estimar diferentes módulos de deformación del suelo a partir de la curva tensión-deformación, por ejemplo, utilizando líneas secantes desde el origen hasta un punto determinado de la curva (módulo secante o inicial) o la pendiente en ciclos de descarga y recarga (módulo de recarga), entre otros.

Es importante señalar que la pendiente de la línea calculada como el incremento de tensión dividido por el incremento de deformación no siempre corresponde al módulo de elasticidad. Esto solo es cierto si la carga se aplica sin confinamiento, como en un ensayo de compresión no confinada. En el caso de un ensayo triaxial, por ejemplo, el módulo se determina mediante la siguiente expresión:

$$E = \frac{\sigma_1 - 2\nu\sigma_3}{\varepsilon_1} \quad (27)$$

Donde;

$\sigma_1$  &  $\sigma_3$ : Tensión normal al plano perpendicular a la dirección 1 y 3.

$\varepsilon_1$ : Deformación normal al plano perpendicular a la dirección 1

$E$ : Módulo de deformación

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

En la ecuación (27), el módulo de deformación solo es igual a la pendiente de la relación tensión-deformación ( $\sigma_1/\varepsilon_1$ ) cuando  $\sigma_3$  es igual a cero.



### 3.3.1 Tipos de módulos de elasticidad

Como se ha indicado anteriormente, la curva tensión-deformación no es lineal, por lo que existen diferentes relaciones o módulos de elasticidad para diferentes fases de carga. En la Figura 3-8 se ilustran los principales módulos de elasticidad y, a continuación, se explican los usos que tienen cada uno de ellos.

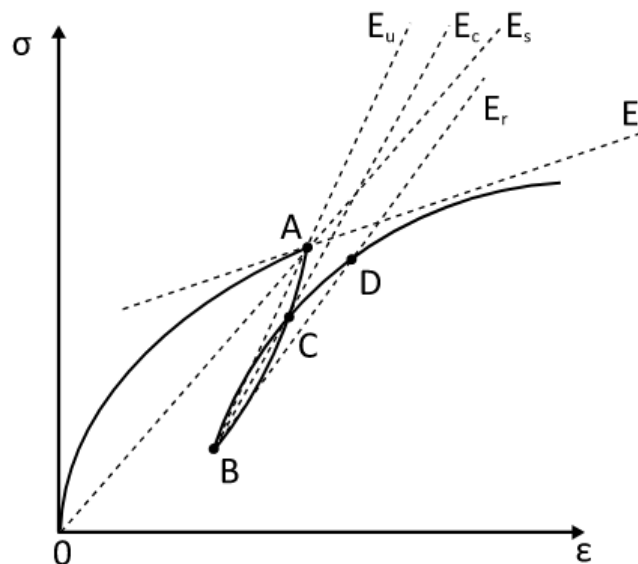


Figura 3-8 – Módulos de deformación. Extraído de Geotechnical engineering: unsaturated and saturated soils, 2023

Módulo secante  $E_s$ , se obtiene de la pendiente que relaciona los puntos 0-A y se emplearía para predecir las deformaciones en una fase inicial de carga.

Módulo tangente  $E_t$ , se obtiene como la tangente a la curva en el punto A. Se emplea para predecir deformaciones a partir de un estado de tensión-deformación dado, por ejemplo, un incremento de carga.

Módulo de descarga  $E_u$ , se obtiene a partir de la pendiente que relaciona los puntos A-B. Se emplea para estimar la descompresión de un suelo, por ejemplo, tras realizar una excavación.

Módulo de recarga  $E_r$ , se obtiene a partir de la pendiente que relaciona los puntos B-D. Se emplea para estimar la deformación del suelo tras una fase de descarga, como la indicada en el módulo de descarga.

Módulo cíclico  $E_c$ , se obtiene a partir de la pendiente que relaciona los puntos B-C. Se emplea para determinar la deformación del suelo ante ciclos de carga.

### 3.3.2 Factores que influyen en el módulo de elasticidad

A continuación, se enumeran los principales factores que influyen en el módulo de elasticidad:

- Compactación. El módulo de elasticidad tiende a ser mayor en suelos de mayor compacidad, es decir, con mayor densidad.
- Organización de las partículas o estructura del suelo.
- Contenido de agua. El contenido de agua tiene un gran impacto en el módulo de elasticidad del suelo. A bajos contenidos de agua, el agua une las partículas (especialmente en suelos finos) y aumenta la tensión efectiva entre ellas debido al fenómeno de succión, lo que incrementa el módulo del suelo. Sin embargo, en suelos granulares, un contenido de agua demasiado bajo dificulta su compactación debido a la falta de lubricación proporcionada por el agua. En este caso, un contenido de agua muy bajo puede llevar a valores reducidos del módulo de elasticidad. A medida que el contenido de agua aumenta, la lubricación mejora la compactación y el módulo del suelo aumenta. Sin embargo, si el contenido de agua supera un valor óptimo, el agua comienza a separar las partículas, lo que incrementa la compresibilidad y reduce el módulo.
- Historial de esfuerzos previos. Si el suelo ha estado sometido a esfuerzos previos significativos, se dice que está sobreconsolidado. Si el suelo nunca ha experimentado esfuerzos mayores a los actuales y se encuentra en equilibrio bajo la carga presente, se dice que está normalmente consolidado. Generalmente, un suelo sobreconsolidado (OC) tendrá un módulo más alto que un suelo normalmente consolidado (NC), ya que el suelo OC se encuentra en la parte de recarga de la curva tensión-deformación, mientras que el NC está en su primera fase de carga. Algunos suelos aún están en proceso de consolidación bajo su propio peso.
- Cementación debida a agentes naturales como la succión capilar o deposición química de minerales, como el calcio. Puede generar un efecto de adhesión significativo entre las partículas, simulando una especie de "pegamento temporal". Sin embargo, este efecto puede desaparecer si el contenido de agua aumenta o ante un incremento de carga.
- Confinamiento. Cuanto mayor es el confinamiento, mayor es la rigidez del suelo.

- Velocidad de deformación. El suelo puede presentar un comportamiento viscoso, por lo que, al aplicarse una carga rápidamente, muestra una mayor rigidez y, en consecuencia, un incremento en su módulo. No obstante, este comportamiento no siempre se manifiesta de forma consistente, dependiendo del tipo de suelo y de las condiciones del ensayo.
- Drenaje del suelo. El coeficiente de Poisson es sensible a la condición de drenaje. Si no hay drenaje, en una arcilla es común asumir un coeficiente de Poisson de 0.5 (sin cambio de volumen). En contraste, si el drenaje es completo, un valor de 0.35 podría ser más apropiado. La diferencia entre los módulos calculados en ambas condiciones (drenada y no drenada) representa la diferencia entre el módulo no drenado y el módulo drenado.

### 3.3.3 Relación entre el módulo de elasticidad, rigidez y módulo de balasto

Mientras que el módulo de elasticidad  $E$  mide la relación entre tensión y deformación, expresándose en unidades de fuerza por unidades de área ( $\text{KN/m}^2$ ), la rigidez  $K$  mide la relación entre una fuerza  $Q$  aplicada a un área y la deformación  $s$  experimentada por dicha área, expresándose en unidades de fuerza por unidades de longitud ( $\text{KN/m}$ ).

En el caso de una superficie circular de diámetro  $B$ , el asiento elástico  $s$  se obtiene de la siguiente expresión:

$$s = I_1 \frac{Q}{EB} \quad (28)$$

Donde  $I_1$  es una constante.

Teniendo en cuenta que  $K = Q/s$ , sustituyendo en la ecuación (28), obtenemos que la relación entre el módulo de elasticidad  $E$  y la rigidez  $K$  es la siguiente:

$$K = \frac{EB}{I_1} \quad (29)$$

De la ecuación (29) se deduce que, mientras el módulo de elasticidad es una propiedad del suelo, la rigidez no solo depende del suelo, también del tamaño del área cargada.

El módulo de balasto  $k$  mide la relación entre la presión  $p$  aplicada a un área y la deformación  $s$  experimentada por dicha área, expresándose en unidades de fuerza por unidades de volumen ( $\text{KN/m}^3$ ). Se emplea tanto el módulo de balasto vertical (cimentaciones superficiales) como horizontal (pantallas o cimentaciones profundas).

Como en el caso anterior, el asiento elástico  $s$  en una superficie circular de diámetro  $B$  se obtiene de la siguiente expresión:

$$s = I_2 \frac{pB}{E} \quad (30)$$

La relación entre el módulo de elasticidad  $E$  y el módulo de balasto es:

$$k = \frac{E}{l_2 B} \quad (31)$$

De la ecuación (31) se deduce que, como en el caso de la rigidez, el módulo de balasto no solo depende del suelo, también del tamaño del área cargada.

### 3.4 Distribución de tensiones bajo cimentaciones superficiales

La distribución de esfuerzos bajo una cimentación se resuelve mediante la teoría del sólido elástico. Esta teoría se basa en los principios de la mecánica de medios continuos y la teoría de la elasticidad (véase sección 3.2.1) y permite calcular como las tensiones se distribuyen en el suelo debido a la carga aplicada por la cimentación.

William Thomson (Lord Kelvin) desarrolló en 1948 las primeras ecuaciones que resolvían la distribución de una carga puntual  $Q$  actuando en un espacio isótropo, elástico e infinito con módulo de elasticidad  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ .

$$\sigma_z = \frac{Q}{8\pi(1-\nu)} \left[ \frac{3z^3}{R^5} + \frac{(1-2\nu)z}{R^3} \right] \quad (32)$$

$$\sigma_r = \frac{Q}{8\pi(1-\nu)} \frac{z}{R^3} \left[ \frac{3z^3}{R^2} - (1-2\nu) \right] \quad (33)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{Q(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \frac{z}{R^3} \quad (34)$$

$$\theta = -\frac{Q}{8\pi(1-\nu)} \frac{2(1+\nu)z}{R^3} \quad (35)$$

$$\tau_{rz} = \frac{Q}{8\pi(1-\nu)} \frac{z}{R^3} \left[ \frac{3z^3}{R^2} + (1-2\nu) \right] \quad (36)$$

$$s_z = \frac{Q(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)ER} \left[ 3 - 4\nu + \frac{z^2}{R^2} \right] \quad (37)$$

$$s_r = -\frac{Q(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)E} \frac{zr}{R^3} \quad (38)$$

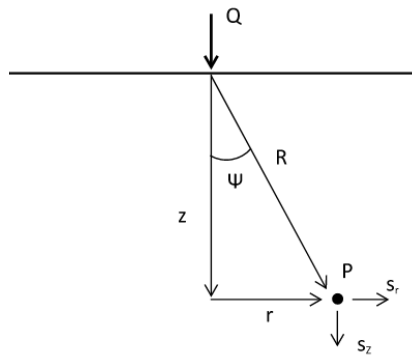


Figura 3-9 – Tensión vertical por carga puntual en espacio infinito

Joseph Valentin Boussinesq (1885) resolvió el problema de la distribución de esfuerzos en un medio elástico, homogéneo e isótropo, asumiendo un semiespacio elástico donde se cumple la teoría lineal de la elasticidad (Ley de Hooke).

Esta simplificación permitió estimar los esfuerzos verticales  $\sigma_z$  a una profundidad  $z$  para diferentes situaciones de carga.

A continuación, se describen las formulaciones obtenidas por J. Boussinesq y posteriores aportaciones de otros autores para casos singulares y multicapas.

### 3.4.1 Carga puntual Q

La tensión vertical ejercida por una carga puntual en un semiespacio elástico se obtiene de la siguiente ecuación.

$$\sigma_z = \frac{Q}{z^2} \frac{3}{2\pi} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2} \right)^{\frac{5}{2}} \quad (39)$$

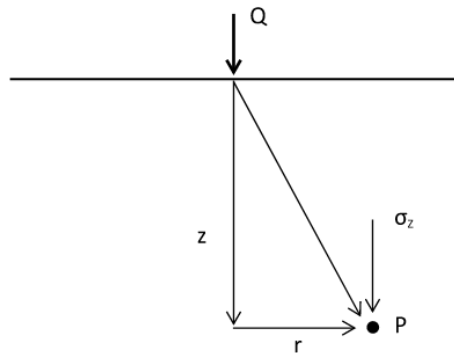


Figura 3-10 – Tensión vertical por carga puntual en semiespacio elástico

### 3.4.2 Carga lineal uniformemente repartida

La tensión vertical ejercida por una carga lineal uniformemente repartida en un semiespacio elástico se obtiene de la siguiente ecuación.

$$\sigma_z = \frac{q}{z} \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2} \right)^2 \quad (40)$$

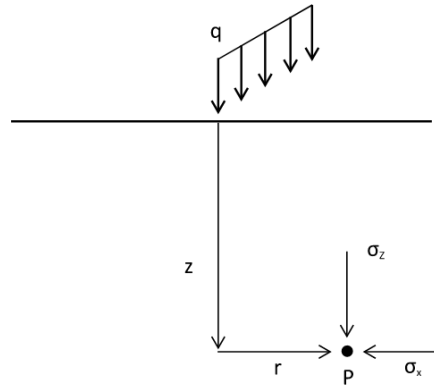


Figura 3-11 – Tensión vertical por carga lineal uniformemente distribuida en semiespacio elástico

### 3.4.3 Carga en faja lineal uniformemente repartida

La tensión vertical ejercida por una carga n faja lineal uniformemente repartida en un semiespacio elástico se obtiene de la siguiente ecuación.

$$\sigma_z = \frac{q}{\pi} (\beta + \text{sen}(\beta) \cdot \cos(2\alpha + \beta)) \quad (41)$$

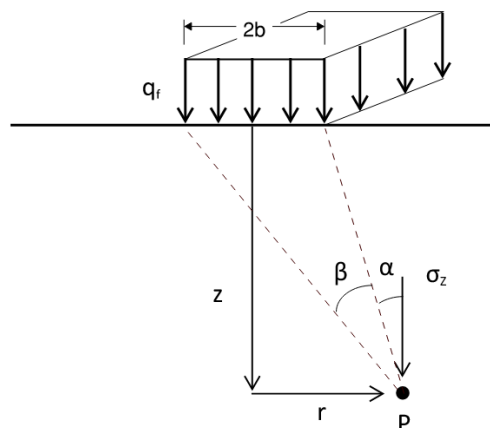


Figura 3-12 – Tensión vertical por carga en faja lineal uniformemente distribuida en semiespacio elástico



### 3.4.4 Carga bajo centro de carga circular uniformemente repartida

La tensión vertical ejercida por una carga circular uniformemente repartida en un semiespacio elástico se obtiene de la siguiente ecuación.

$$\sigma_z = q \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{r}{z} \right)^2} \right)^{3/2} \right) = q \cdot (1 - \cos^3 \alpha) \quad (42)$$

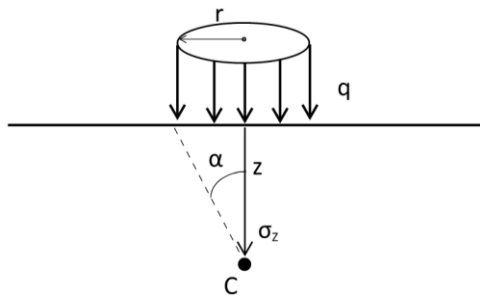


Figura 3-13 – Tensión vertical por carga circular uniformemente distribuida en semiespacio elástico

Egorov (1958) desarrolló posteriormente la fórmula para obtener las tensiones verticales  $\sigma_z$  en cualquier punto del semiespacio bajo una carga circular uniformemente repartida:

$$\sigma_z = q \left\{ A - \frac{n}{\pi \sqrt{n^2 + (1+t)^2}} \left[ \frac{n^2 - 1 + t^2}{n^2 + (1-t)^2} E(k) + \frac{1-t}{1+t} \Pi_0(k, p) \right] \right\} \quad (43)$$

Donde,

$E(k)$  y  $\Pi_0(k, p)$  son las integrales elípticas completas de segunda y tercera especie de módulos  $k$  y parámetro  $p$ .

$$t = r/\alpha$$

$$n = z/\alpha$$

$$k^2 = \frac{4t}{n^2 + (1+t)^2}$$

$$p = -\frac{4t}{(1+t)^2}$$

$$A = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

### 3.4.5 Carga rectangular uniformemente repartida

#### 3.4.5.1 Steinbrenner (1936) & Fadum (1948)

Steinbrenner (1936) desarrollo la formulación para calcular las tensiones bajo un vértice del rectángulo cargado. Posteriormente, Fadum (1948) desarrolló los métodos propuestos por Steinbrenner (1936) mediante la incorporación de factores de influencia más detallados para tensiones y asientos, además de representar la ecuación en forma de ábacos.

$$\sigma_z = qI_r \quad (44)$$

$$I_r = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1} \cdot \frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1} \right] \quad (45)$$

Donde;

$$n = L/z$$

$$m = B/z$$

Se destaca que en la formulación anterior se usa la carga  $q/4$ , esto es debido a que se considera que el elemento infinitesimal bajo el vértice tiene sólo un cuadrante cargado. De esta forma, aplicando el principio de superposición, se puede calcular la presión en un punto cualquiera, aunque no esté situado justamente bajo el vértice.

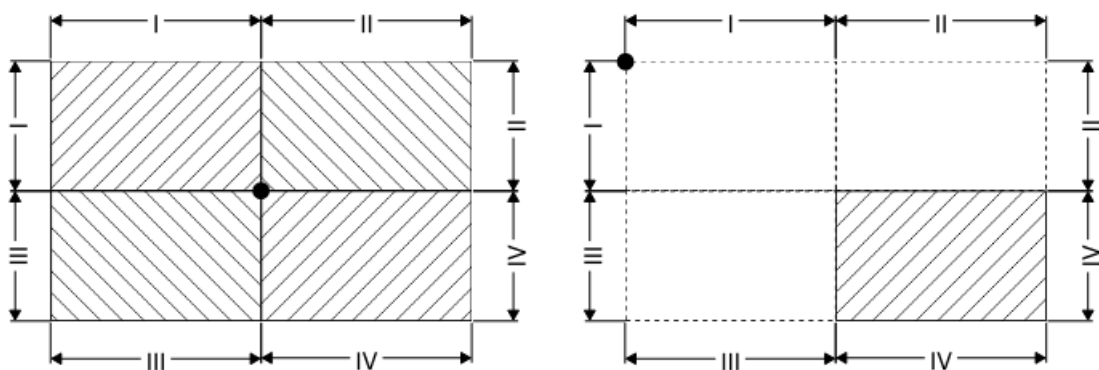


Figura 3-14 – Esquema de aplicación de cargas según Fadum (1948)

### 3.4.6 Métodos basados en ábacos para cargas de forma irregular

#### 3.4.6.1 Ábacos de Newmark (1942)

Nathan M. Newmark publicó en 1942 los ábacos para calcular la tensión vertical  $\sigma_z$  en un punto a una profundidad dada originada por una carga distribuida sobre la superficie. Estos ábacos, basados en la solución de Boussinesq (1885), permiten determinar el coeficiente de influencia para formas complejas sin necesidad de cálculos analíticos complejos.

Para ello, se debe calcular la relación entre la profundidad y las dimensiones de la cimentación ( $z/B$ ), dibujando a escala la cimentación sobre el ábaco correspondiente, como se puede ver en la Figura 3-15. El coeficiente de influencia  $I$  se obtiene de la relación entre el número de celdas del ábaco que quedan dentro del área de la cimentación ( $n$ ) respecto al número total de celdas ( $N$ ).

$$\sigma_z = qI_r = q \frac{n}{N} \quad (46)$$

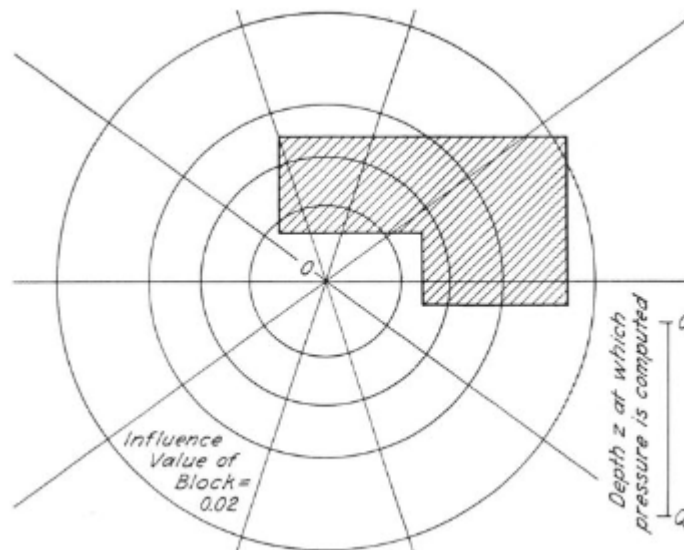


Figura 3-15 – Ábaco de Newmark, tomado de *NEWMARK, Nathan Mortimore. Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois. Engineering Experiment Station. Bulletin; no. 338, 1942.*

### 3.4.6.2 Método de las influencias, Jiménez Salas (1948)

Este método, desarrollado por Jiménez Salas en 1948 es una generalización del método propuesto por Newmark, con la ventaja de poder obtener la tensión  $\sigma_z$  en varios puntos.

Para un círculo de radio  $R$  cargado uniformemente produce una tensión vertical a una profundidad  $z$  igual al coeficiente de influencia  $I_{R,z}$ , de magnitud aproximada a los valores propuestos por Fadum (1948).

Dado un círculo de radio  $R+1$ , ejercerá una influencia  $I_{R+1,z}$ , por lo que una corona circular limitada por los radios  $R$  y  $R+1$  ejercerá una influencia a la profundidad  $z$  igual a:

$$I_{R+1,z}^z - I_R^z = \cos^3 \psi_R - \cos^3 \psi_{R+1} = I_{R+1,R}^z \quad (47)$$

En el caso particular de no encontrarse toda la corona cargada, se considera solo una fracción de dicha corona ( $A\%$ ) para la estimación de la tensión vertical producida a la profundidad  $z$ .

Jiménez Salas proporciona en su libro *Geotecnia y cimientos II* una serie de tablas con las influencias para las diferentes coronas con radios comprendidos entre  $R$  y  $R+2$  con el fin de agilizar la aplicación del método.

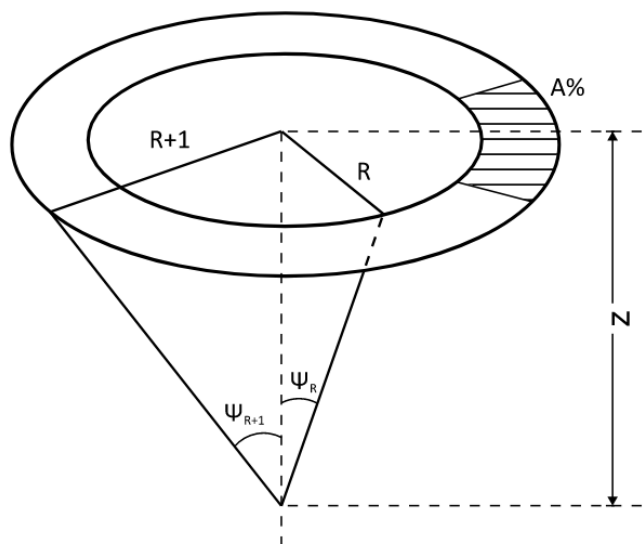


Figura 3-16 – Esquema de cargas del método de las influencias, adaptación de JIMÉNEZ SALAS, Jose Antonio.; JUSTO, JL de; SERRANO, A. *Geotecnia y cimientos II*. 1981; página 231, figura 3.59.

### 3.4.7 Semiespacio con anisotropía transversal

Dado un suelo que se extienden infinitamente en las direcciones horizontales (x-y), pero tiene propiedades mecánicas diferentes en la dirección vertical (z), en el sistema ejes cartesianos, con el eje z como eje de simetría de orden infinito, las ecuaciones de Hooke quedarían de la siguiente forma:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_h} (\sigma_x - v_{hh} \sigma_y) - \frac{v_{vh}}{E_h} \sigma_z \quad (48)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E_h} (\sigma_y - v_{hh} \sigma_x) - \frac{v_{vh}}{E_h} \sigma_z \quad (49)$$

$$\epsilon_z = -\frac{v_{vh}}{E_v} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_v} \sigma_z \quad (50)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G_v} \tau_{yz} \quad (51)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G_v} \tau_{xz} \quad (52)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_v} \tau_{xy} = \frac{2(1 + v_{hh})}{E_h} \tau_{xy} \quad (53)$$

Donde;

$E_h$  y  $E_v$  son los módulos de Young para horizontal y vertical, respectivamente.

$v_{hh}$  y  $v_{vh}$  son los coeficientes de Poisson horizontal y vertical, respectivamente.

$G_h$  y  $G_v$  son los módulos de rigidez transversal horizontal y vertical, respectivamente.

A continuación, de acuerdo con la bibliografía consultada y siguiendo un orden cronológico, se desarrollan las principales teorías de tensión vertical en un semiespacio con anisotropía transversal propuestas por varios autores.

### 3.4.7.1 Westergaard (1926)

Harold M. Westergaard, entre 1926 y 1939, desarrolló un modelo teórico para calcular la tensión vertical en un punto de un medio elástico debido a la aplicación de una carga en superficie.

Para una carga puntual Q, Westergaard propone la siguiente ecuación:

$$\sigma_z = \frac{Q}{z^2} \frac{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}}}{\left[ \left( \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \right) + \left( \frac{r}{z} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (54)$$

Para el caso de una cimentación rectangular, la presión en una esquina se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \cot^{-1} \sqrt{\left( \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \right) \left( \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) + \left( \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \right)^2 \left( \frac{1}{m^2 n^2} \right)} \quad (55)$$

Donde,

Q es una carga puntual

q es una carga distribuida

$\nu$  es el módulo de Poisson

r es la distancia en planta del punto considerado

z es la profundidad del punto de estudio

$m = L/z$

$n = B/z$

L es la longitud de la carga distribuida

B es el ancho de la carga distribuida

### 3.4.7.2 Lekhnitskii (1963)

Lekhnitskii (1963) desarrolló formulaciones más generales basadas en las ecuaciones de Hook indicadas anteriormente:

$$\sigma_r = -\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{z}{(s_1-s_2)\sqrt{d}} \left[ \frac{s_1^3}{(r^2+s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{s_2^3}{(r^2+s_2^2 z^2)^{3/2}} \right] \right\} + \frac{\lambda}{s_1-s_2} \frac{p_2}{(r^2+s_1^2 z^2)^{1/2}} - \frac{s_1^3 p_1}{(r^2+s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{\mu}{r^2} \quad (56)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{p}{2\pi} \frac{\sqrt{d}}{s_2-s_1} \left[ -\frac{s_1^2 q_1}{(r^2+s_1^2 z^2)^{3/2}} + \frac{s_2^2 q_2}{(r^2+s_2^2 z^2)^{3/2}} \right] - \frac{\lambda}{s_1-s_2} \frac{p_2}{(r^2+s_1^2 z^2)^{1/2}} - \frac{s_1^3 p_1}{(r^2+s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{\mu}{r^2} \quad (57)$$

$$\sigma_z = -\frac{p}{2\pi} \frac{z}{\sqrt{d}(s_1-s_2)} \left[ \frac{s_1^3}{(r^2+s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{s_2^3}{(r^2+s_2^2 z^2)^{3/2}} \right] \quad (58)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2\pi\sqrt{d}} \frac{r}{s_1-s_2} \left[ \frac{s_1^3}{(r^2+s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{s_2^3}{(r^2+s_2^2 z^2)^{3/2}} \right] \quad (59)$$

Donde,

$$n = \frac{a_{33}}{a_{11}} = \frac{E_h}{E_v}, \quad m = \frac{a_{44}}{2(a_{11}-a_{13})} = \frac{G_h}{G_v} \quad (60)$$

$$a = \frac{a_{13}(a_{11}+a_{12})-v_{hh}(1+v_{hh})}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2} = \frac{-v_{hv}}{n-v_{hv}} \quad (61)$$

$$c = \frac{a_{13}(a_{11}-a_{12})+a_{11}a_{44}}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2} = \frac{(p_1+p_2)}{n-v_{hv}} \quad (62)$$

$$d = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2} = \frac{1-v_{hh}^2}{n-v_{hv}} \quad (63)$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{a+c+\sqrt{(a+c)^2-4d}}{2d}}, \quad s_2 = \sqrt{\frac{a+c-\sqrt{(a+c)^2-4d}}{2d}} \quad (64)$$

$$p_1 = 1-s_1^2, \quad p_2 = 1-s_2^2 \quad (65)$$

$$q_1 = (b-s_1^2)(1-s_1^2), \quad q_2 = (b-s_2^2)(1-s_2^2) \quad (66)$$

$$\lambda = \frac{(b-1)\sqrt{d}}{ac-d}, \quad \mu = \frac{(b-1)(a+\sqrt{d})}{ac-d} \quad (67)$$

### 3.4.8 Sistemas de varias capas

#### 3.4.8.1 Endurecimiento del terreno

En terrenos granulares es común encontrarse con un cierto incremento del módulo de elasticidad con la profundidad. Este endurecimiento del terreno con la profundidad implica una concentración de las tensiones bajo el punto de aplicación de las cargas y una disminución de la dispersión lateral.

Fröhlich (1934) desarrolló un método aproximado que, mediante la variación de un factor de concentración, obtiene la distribución de las tensiones. Fröhlich parte de la idea de una distribución radial (Figura 3-17).

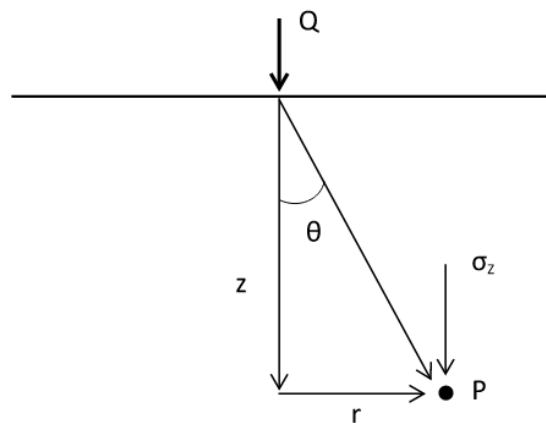


Figura 3-17 – Tensión vertical por carga puntual en espacio infinito

En el caso de distribución radial y módulo de Poisson  $\nu = 0.50$ , una carga concentrada transmite las tensiones de forma rectilínea; no obstante, cuando  $\nu$  no es igual a 0.50, esta propiedad no es cierta, pero el error en la práctica no es significativo. La tensión se puede expresar con la ecuación.

$$\sigma_z = k \frac{Q}{z^2} \cos^n \theta = k \frac{Q \cdot z^{c-2}}{z^c} = \frac{cQ}{2\pi} \frac{z^{c-2}}{z^c} \quad (68)$$

Donde  $k$  y  $c$  son parámetros arbitrarios que dependen el uno del otro. Cuando  $c$  es igual a 3, la distribución coincide con la de Boussinesq. Cuando  $c$  es mayor que 3, la distribución implica un



mayor grado de concentración de presiones inmediatamente debajo del punto de aplicación de la carga.

Cuando el módulo de elasticidad  $E$  varía con la profundidad, de acuerdo con Holl (1940) se puede emplear la siguiente expresión general:

$$E = E_1 z^\lambda \quad (69)$$

Donde  $E_1$  es el módulo de elasticidad para una profundidad  $z$  igual a 1, donde se deduce que:

$$\lambda + 2 = c - 1 = 1/\nu \quad (70)$$

En la siguiente figura se pueden ver las distintas leyes de variación del módulo de elasticidad  $E$  para el semiespacio de Fröhlich en función de  $c$  y  $\lambda$ .

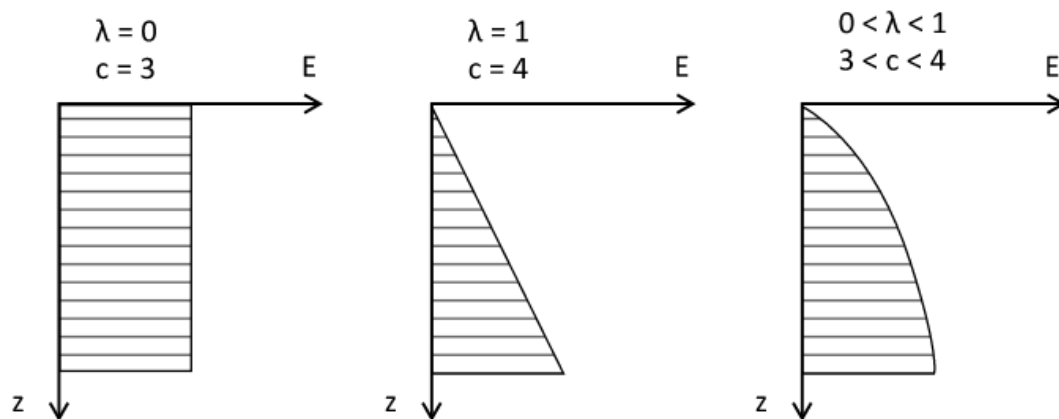


Figura 3-18 – Semiespacio de Fröhlich. Adaptación de JIMÉNEZ SALAS, Jose Antonio.; JUSTO, JL de; SERRANO, A. *Geotecnia y cimientos II*. 1981; página 280, figura 3.107.

### 3.4.8.2 Capa elástica con variación del módulo de elasticidad sobre base rígida

Alternativamente al método del semiespacio de Fröhlich, Mayne y Poulos (1999) desarrollaron un método para estimar el asiento teniendo en cuenta la rigidez de la cimentación, profundidad de empotramiento, variación del módulo de elasticidad con la profundidad y presencia de una base rígida.

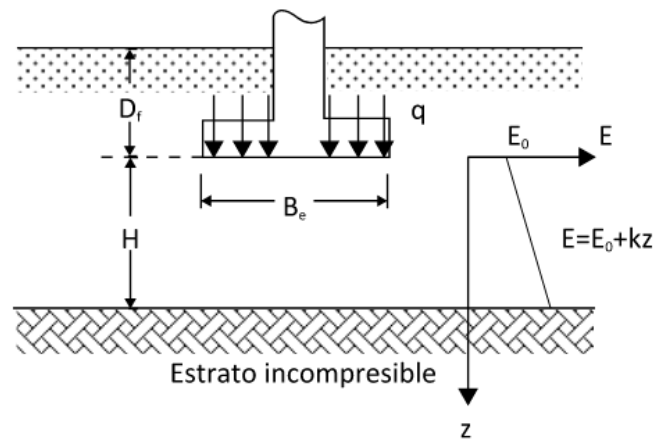


Figura 3-19 – Parámetros fórmula de Mayne & Poulos (1999)

Mayne & Poulos propusieron una serie de factores de influencia o corrección:

$I_G$ : Factor de influencia por la variación del módulo de elasticidad con la profundidad, se obtiene de la Figura 3-20.

$I_F$ : Factor de corrección de la rigidez de la cimentación, se obtiene de la ecuación (71) y

$I_E$ : Factor de corrección de la profundidad de empotramiento de la cimentación, se obtiene de la ecuación (72).

$$I_F = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4.6 + 10(E_f/[E_0 + (B_e/2)k])(2t/B_e)^3} \quad (71)$$

$$I_E = 1 - \frac{1}{3.5 \exp(1.22v - 0.4)[(B_e/D_f) + 1.6]} \quad (72)$$

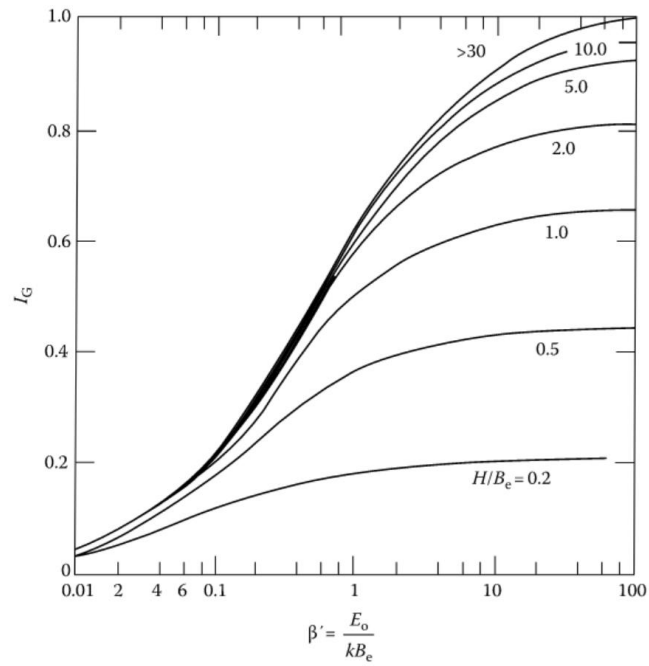


Figura 3-20 – Variación de  $I_G$  en función de  $\beta'$ . Tomado de DAS, Braja M. *Advanced soil mechanics*. CRC press, 2019, p. 621

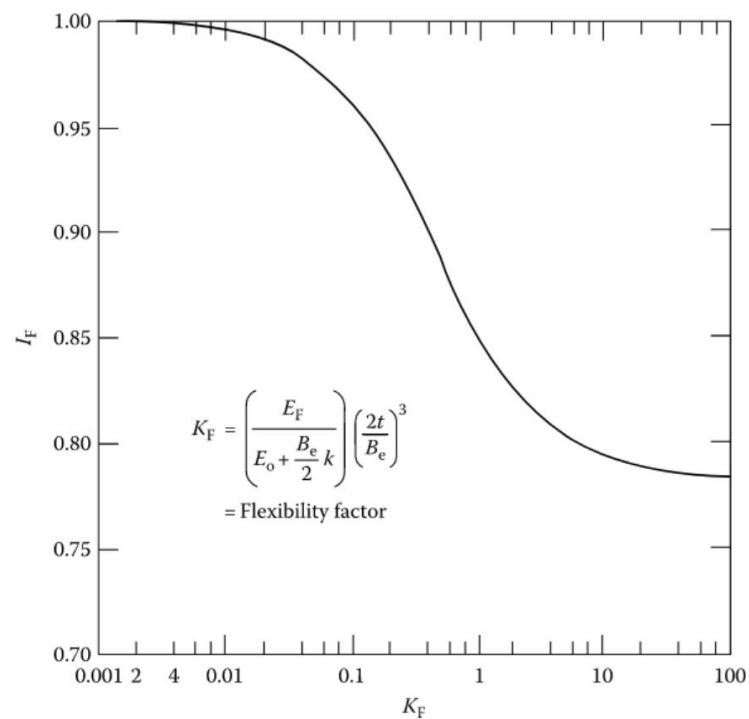


Figura 3-21 – Variación de  $I_F$  en función de  $K_F$ . Tomado de DAS, Braja M. *Advanced soil mechanics*. CRC press, 2019, p. 622

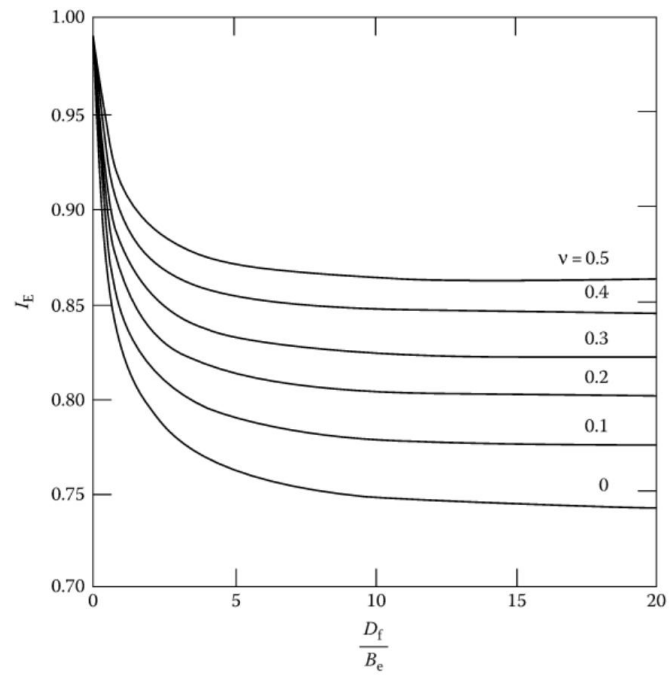


Figura 3-22 – Variación de  $I_E$  en función de  $D_f/B_e$ . Tomado de DAS, Braja M. *Advanced soil mechanics*. CRC press, 2019, p. 623

### 3.4.8.3 Sistema bicapa, $E_1 > E_2$ . Método de Burmister (1943, 1945)

Donald M. Burmister desarrolló modelos teóricos para describir el comportamiento de suelos estratificados en 1943 y 1945, mejorando la precisión en el cálculo de tensiones frente a modelos homogéneos. Este método es especialmente práctico en el diseño de pavimentos, losas de cimentación y otras estructuras sobre suelos con propiedades variables en profundidad.

Burmister adoptó un sistema de dos capas, donde la capa superior tiene un espesor dado y se apoya sobre una capa semiinfinita. El suelo se asume elástico, homogéneo e isótropo.

Para el caso de carga puntual  $Q$  aplicada a una superficie de radio  $a$ , que ejerce una tensión superficial  $q$  (carga puntual  $Q$  dividida por superficie de contacto), Burmister propuso el siguiente gráfico que relaciona las tensiones verticales en superficie frente a una profundidad  $z$  para el caso particular en que el radio de la superficie de aplicación de la carga es igual al espesor de la capa superior  $h$ :

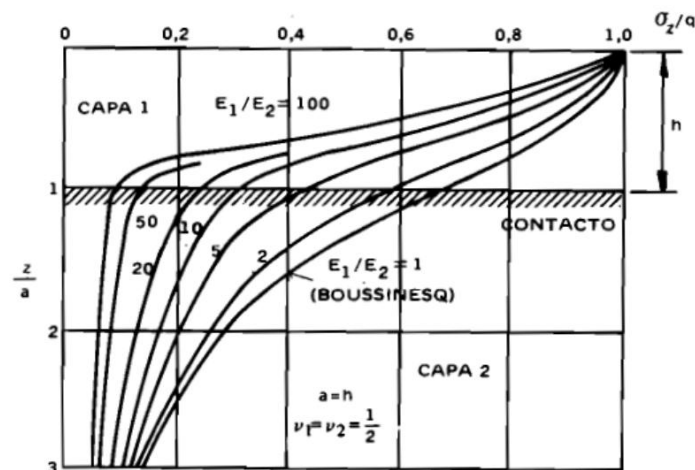


Figura 3-23 – Curvas de influencia según Burmister. Extraído de JIMÉNEZ SALAS, José Antonio.; JUSTO, JL de; SERRANO, A. *Geotecnia y cimientos II*. 1981; página 284, figura 3.112.

Donde,

$a$  es el radio de la superficie de aplicación de la carga

$E_1, E_2$  son los módulos de elasticidad de las capas 1 y 2

$\nu_1, \nu_2$  son los coeficientes de Poisson de las capas 1 y 2

Para distintos espesores de la capa superior, se emplea el siguiente gráfico.

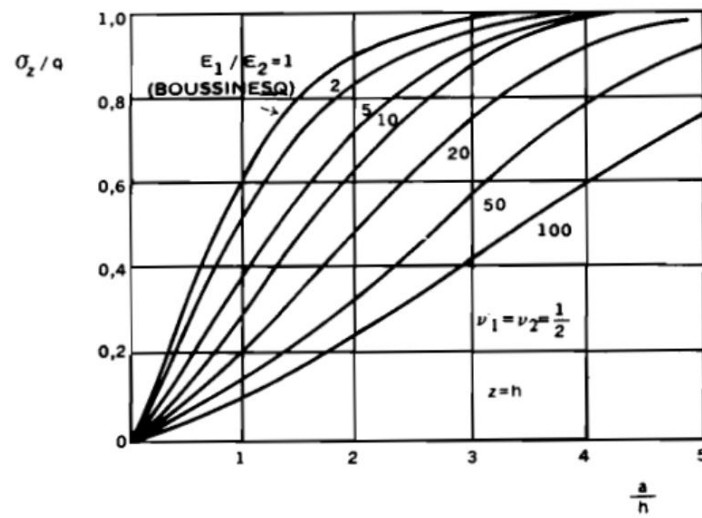


Figura 3-24 – Curvas de influencia según Burmister. Extraído de JIMÉNEZ SALAS, José Antonio.; JUSTO, JL de; SERRANO, A. *Geotecnia y cimientos II*. 1981; página 284, figura 3.113.

### 3.4.8.4 Método para sistemas de más de tres capas

Este método fue desarrollado como una extensión de los enfoques tradicionales para adaptarse a situaciones complejas con más de tres capas, donde cada capa tiene diferentes propiedades mecánicas.

El método se basa en la teoría de la elasticidad, donde cada capa presenta propiedades mecánicas diferentes. La resolución de las ecuaciones de equilibrio en cada capa relaciona las tensiones  $\sigma$  con los desplazamientos  $u$ :

$$\frac{d^2\sigma}{dz^2} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \frac{d^2u}{dz^2} \quad (73)$$

Teniendo en cuenta la condición de continuidad entre las capas, se deben cumplir dos condiciones:

- Continuidad de los desplazamientos verticales, los desplazamientos en  $u_i(z) = u_{i+1}(z)$ .
- Continuidad de las tensiones:  $\sigma_i(z) = \sigma_{i+1}(z)$ .

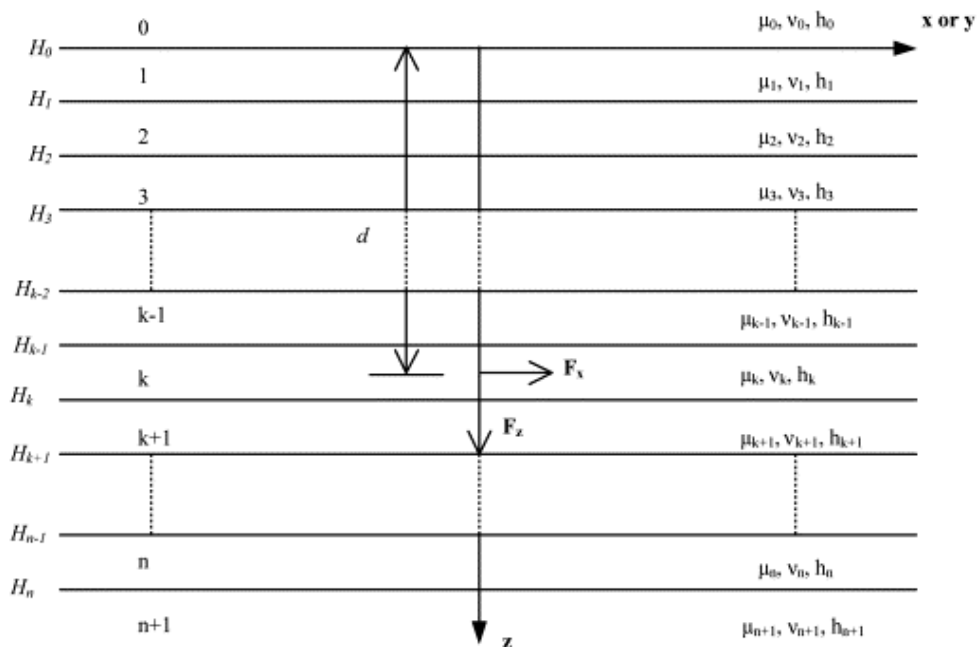


Figura 3-25 – Continuidad de desplazamientos y tensiones. Extraído de YUE, Zhong Qi. *On generalized Kelvin solutions in a multilayered elastic medium. Journal of Elasticity*, 1995, vol. 40, no 1, p. 1-43.

El investigador D. Yue (1995, 1996) propuso un enfoque computacional innovador para resolver problemas de carga puntual en medios elásticos multicapa. Este método, basado en las transformadas de Hankel, permite convertir ecuaciones diferenciales parciales en ecuaciones más manejables.

El método comienza resolviendo las ecuaciones de elasticidad para cada capa homogénea:

$$\nabla^2 \sigma + \frac{1}{E(z)} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = 0 \quad (74)$$

Donde:

- $\sigma$  es el esfuerzo.
- $E(z)$  es el módulo de elasticidad dependiente de la profundidad  $z$ .

La solución se facilita aplicando la transformada de Hankel:

$$H\{f(r)\} = \int_0^\infty f(r) J_0(kr) r \, dr \quad (75)$$

Donde:

- $H\{f(r)\}$  es la transformada de Hankel de la función  $f(r)$ .
- $J_0(kr)$  es la función de Bessel de primera especie y orden cero.
- $k$  es el número de onda radial.

Al aplicar la transformada, las ecuaciones diferenciales parciales se reducen a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2 \hat{\sigma}}{dz^2} - k^2 \hat{\sigma} = 0 \quad (76)$$



La solución general de esta ecuación es:

$$\hat{\sigma}(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz} \quad (77)$$

Donde,

$$k = \sqrt{\frac{E_i}{1-\nu_i^2}}$$

A y B son constantes determinadas por las condiciones de frontera:

- Continuidad de desplazamientos en las interfaces:  $u_i = u_{i+1}$
- Continuidad de tensiones:  $\sigma_i = \sigma_{i+1}$

Una vez resuelto el sistema, se aplica la transformada inversa de Hankel para obtener la solución en el dominio espacial:

$$\sigma(r, z) = \int_0^\infty \hat{\sigma}(k) J_0(kr) k dk \quad (78)$$

Por otro lado, Vijayakumar, Yacoub y Curran (2000) introdujeron una mejora numérica al convertir las integrales de área en integrales de contorno, permitiendo superar las dificultades relacionadas con las singularidades inherentes en las soluciones de carga puntual.

Integral de área original:

$$\sigma = \iint_A \phi(x, y) dx dy \quad (79)$$

Integral convertida en contorno:

$$\sigma = \oint_C \psi(s) ds \quad (80)$$

Donde:

- a) A es el área de integración.

- b)  $C$  es el contorno que rodea el área  $A$ .
- c)  $\psi(s)$  es la función de influencia definida en el contorno.

### 3.5 Asientos en cimentaciones superficiales

El asiento bajo una cimentación depende de la rigidez de la propia cimentación, la magnitud de la carga y las características tensodeformacionales del suelo.

En las siguientes figuras se ilustra la relación entre tensión superficial y asiento que experimenta el suelo para los casos teóricos de cimentación rígida o flexible y suelo puramente cohesivo o granular.

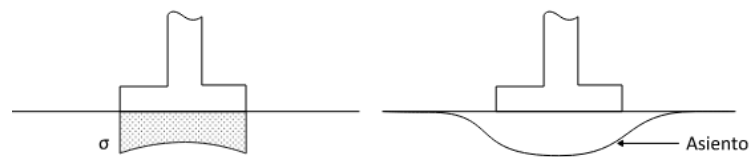


Figura 3-26 – Tensión-Asiento en cimentación flexible en suelo cohesivo

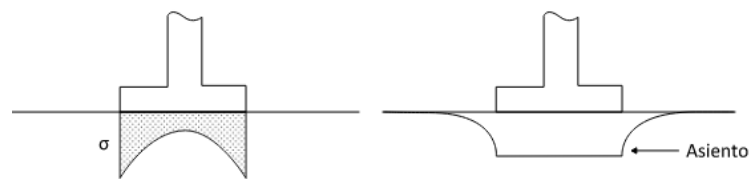


Figura 3-27 – Tensión-Asiento en cimentación rígida en suelo cohesivo



Figura 3-28 – Tensión-Asiento en cimentación flexible en suelo granular

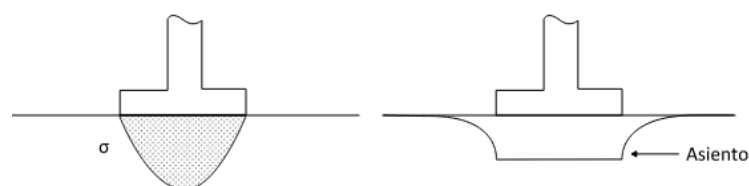


Figura 3-29 – Tensión-Asiento en cimentación rígida en suelo granular

En el análisis de asientos, la distinción entre cimentaciones rígidas y flexibles es esencial, ya que afecta tanto la distribución de tensiones como el perfil de deformaciones inducidas en el terreno. Según Terzaghi y Peck (1967), una cimentación rígida transfiere mayores esfuerzos en los bordes debido a su menor deformabilidad, mientras que una flexible se adapta al terreno y tiende a distribuir las cargas de forma más uniforme. Bowles (1988) propone un criterio cuantitativo, considerando rígida una cimentación cuando la relación entre el módulo de elasticidad del cimientto  $E_c$  es al menos diez veces mayor que el del terreno circundante  $E$ .

En la literatura moderna, diversos autores han propuesto criterios cuantitativos para clasificar una cimentación como rígida o flexible. Por ejemplo, Poulos (2001) propone el uso de relaciones de rigidez adimensionales.

$$k_r = \frac{EI}{E_s B^4} \quad (81)$$

Donde;

$E$  es el módulo de elasticidad de la cimentación

$I$  es el momento de inercia de la cimentación

$E_s$  es el módulo de elasticidad del terreno

$B$  es el ancho de la cimentación

$K_r$  valor adimensional que presenta la rigidez relativa de la cimentación donde:

$K_r \gg 1$	Cimentación rígida
$K_r \approx 1$	Comportamiento intermedio
$K_r \ll 1$	Cimentación flexible

Mientras que Salas et al. (2012) sugieren que una cimentación puede considerarse rígida si su deformación estructural representa menos del 10% de la deformación total del sistema. Asimismo, normas como el Eurocódigo 7 (EN 1997-1:2004) permiten asumir una cimentación rígida cuando su rigidez frente al terreno es suficiente para justificar una distribución de tensiones uniforme.

De la Figura 3-26 se interpreta que, en cimentaciones flexibles en suelos cohesivos, se experimentará un mayor asiento en el centro de la cimentación, lo que permitirá, dada la

reducida rigidez del cimiento, una atenuación de las presiones en el centro y las redistribuirá hacia los extremos de la cimentación. En el caso de cimentaciones rígidas, como se muestra en la Figura 3-27, el asiento será aproximadamente uniforme y de mayor entidad en los bordes comparado al asiento en zapatas flexibles, lo que se traduce en un incremento de presiones en los extremos.

En el caso de terreno granulares, la falta de confinamiento en los bordes de la zapata no permite el desarrollo de presiones elevadas, como se puede ver en la Figura 3-28 y Figura 3-29, esto implica un incremento de las presiones en el centro de la cimentación.

A lo largo de la próxima sección, se desarrollan las principales teorías de cálculo de asientos elásticos en cimentaciones superficiales y suelos granulares.

### 3.5.1 Tipos de asientos

El asiento total que se produce en una cimentación se puede subdividir en dos subgrupos: (a) elástico o inmediato y (b) asiento de consolidación.

El asiento instantáneo se produce casi al tiempo en que se aplica la carga. Tiene como origen la deformación elástica del terreno sin cambios en el contenido de humedad.

El asiento de consolidación, propio de suelos con presencia de finos y baja permeabilidad, origina un retraso en el desarrollo del asiento total. Se subdivide, a su vez, en consolidación primaria y secundaria.

- Asiento de consolidación primaria. Ante la aplicación de una carga constante, es el resultado del cambio gradual de volumen de un suelo cohesivo saturado debido a la expulsión del agua intersticial (contenida en los poros) a medida que la carga es transmitida a su esqueleto sólido.
- Asiento de consolidación secundaria. Una vez que la consolidación primaria ha drenado completamente el agua intersticial, el suelo continúa compactándose por efectos de flujo interno, deslizamiento interparticular y reacomodo lento.

El asiento total sería la suma del asiento instantáneo y de consolidación:

$$S_T = S_e + S_{c,1} + S_{c,2} \quad (82)$$

Donde;

$S_T$ : Asiento total

$S_e$ : Asiento elástico o instantáneo

$S_{c,1}$ : Asiento de consolidación primaria

$S_{c,2}$ : Asiento de consolidación secundaria

Se pueden producir asientos por otros procesos, como la presencia de karsticidades, erosiones internas, socavación, deslizamientos del terreno, variaciones en el nivel freático, etc.

### 3.5.2 Método elástico

El asiento elástico se calcula como:

$$s_e = \frac{\Delta\sigma \cdot H}{E_s} \quad (83)$$

Donde;

$S_e$ : Asiento elástico

$\Delta\sigma$ : Incremento de tensión vertical en el centro de la capa compresible

H: Espesor de la capa compresible

$E_s$ : Módulo de deformación secante o módulo edométrico

En el caso de terrenos estratificados, el asiento total (S) se obtiene sumando los asientos parciales de todas las capas n:

$$S = \sum_{i=1}^n s_e = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta\sigma_i \cdot H_i}{E_{s,i}} \quad (84)$$

El asiento se asume con un comportamiento elástico lineal. En caso de producirse una reducción en la tensión aplicada al suelo, en la ecuación (83) el módulo de deformación secante se sustituiría por el módulo de descarga/recarga ( $E_{sur}$ ) hasta que se alcanzara el nivel de tensión previo a la descarga, volviéndose a emplear  $E_s$  en la ecuación (83).

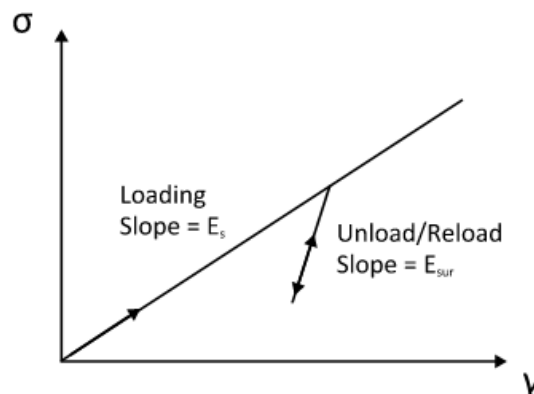


Figura 3-30 - Módulo de deformación

En caso de tenerse en cuenta el efecto tridimensional, la tensión media en cualquier punto es el promedio de los componentes volumétricos del esfuerzo:

$$\sigma_M = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (85)$$

El asiento elástico se calcula en base a la deformación de cada subcapa:

$$s_e = \frac{(1 + \nu) \cdot \Delta\sigma - 3\nu \cdot \Delta\sigma_M}{E} \cdot H \quad (86)$$

Donde;

$S_e$ : Asiento elástico

$\Delta\sigma$ : Incremento de tensión vertical en el centro de la capa compresible

$\Delta\sigma_M$ : Incremento de tensión media

$H$ : Espesor de la capa compresible

$E$ : Módulo de Young  $\rightarrow E = E_s \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}$

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

De las ecuaciones (84) y (86) se deduce la importancia de determinar el incremento de tensión vertical en los diferentes estratos. En el anterior apartado se desarrollaron los principales métodos para la estimación del incremento de tensión vertical a diferentes profundidades. A lo largo del siguiente apartado se desarrollan los principales métodos de cálculo de asiento elástico para diferentes escenarios.



### 3.5.3 Métodos para el cálculo de asiento elástico

Diferentes autores han desarrollado métodos para el cálculo del asiento elástico de cimentaciones superficiales en terreno granulares, pudiéndose agrupar los métodos en:

- Métodos basados en la observación de asientos en estructuras y ensayos a escala. Son métodos empíricos que correlacionan los resultados de pruebas de laboratorio o campo, como el ensayo de penetración estándar (SPT) o presiómetros (CPT), con el asiento. Algunos de los principales métodos son los desarrollados por Terzaghi y Peck (1948, 1967), Meyerhof (1956, 1965), Peck y Bazaraa (1969), D'Appolonia (1970) y Burland y Burbidge (1985).
- Métodos semi-empíricos, combinando observaciones de campo con estudios teóricos. Por ejemplo, los métodos desarrollados por Schmertmann (1970), Schmertmann et al. (1978) y Akbas & Kulhay (2009).
- Métodos basados en relaciones teóricas basadas en la teoría de la elasticidad.

### 3.5.4 Métodos basados en observaciones de estructuras y ensayos a escala

En el presente apartado se exponen algunos de los métodos más relevantes relativos a la estimación del asiento elástico en suelos granulares a partir de observaciones de estructuras y ensayos a escala.

#### 3.5.4.1 Terzaghi & Peck (1948)

Terzaghi y Peck (1948) desarrollaron correlaciones empíricas entre el asiento elástico ( $s_e$ ) de una cimentación de dimensiones  $B \times B$  con el asiento producido en un ensayo de placa de carga ( $s_{e(1)}$ ) con una placa de dimensiones  $B_1 \times B_1$ , que generalmente oscilan entre 0.30m y 1m.

$$\frac{s_e}{s_{e(1)}} = \frac{4}{[1 + (B_1/B)]^2} \quad (87)$$

Los autores propusieron una correlación entre la capacidad portante admisible de una cimentación cuadrada de ancho  $B$ , el asiento elástico y el número de golpes en el ensayo de penetración estándar (SPT) corrigiendo la eficiencia de la energía del martillo ( $N_{60}$ ).

$$s_e(mm) = \frac{3q}{N_{60}} \left( \frac{B}{B + 0.3} \right)^2 \quad (88)$$

Donde;

$s_e$ : Asiento elástico en mm

$q$ : Tensión en  $\text{KN/m}^2$

$B$ : Ancho de la cimentación en metros

$N_{60}$ : Número medio de golpes en el ensayo de penetración estándar (SPT) hasta una profundidad de  $3B$  a  $4B$  y corrigiendo la eficiencia de la energía del martillo

Nótese que la ecuación (88) considera que la carga está aplicada en la superficie, pudiéndose aplicar los coeficientes correctores de profundidad ( $C_D$ ) y posición del nivel freático ( $C_w$ ), quedando la ecuación (88) de la siguiente forma.

$$s_e(mm) = C_W C_D \frac{3q}{N_{60}} \left( \frac{B}{B + 0.3} \right)^2 \quad (89)$$

Donde;

$C_W$ : Es el factor de corrección por la posición del nivel freático. Es igual a 1 cuando la profundidad del nivel freático es igual o superior a  $2B$ , e igual a 2 cuando la profundidad del nivel freático es inferior a  $B$ . Para casos intermedios se debe interpolar.

$C_D$ : Es el factor de corrección por la profundidad de empotramiento  $= 1 - (D_f/4B)$

$D_f$ : Empotramiento de la cimentación

### 3.5.4.2 Meyerhof (1956 & 1965)

Meyerhof propuso en 1956 las mismas ecuaciones que las indicadas en el método propuesto por Terzaghi y Peck (1948); sin embargo, en 1965 llegó a la conclusión que, tras observar los asientos producidos en ocho estructuras, la tensión admisible para un asiento elástico dado ( $s_e$ ) puede incrementarse hasta un 50% comparado con la ecuación (88) propuesta en 1956, por lo que propuso las siguientes relaciones.

$$s_e(mm) = C_W C_D \frac{1.25q}{N_{60}} \quad \text{para } B \leq 1.22m \quad (90)$$

y

$$s_e(mm) = C_W C_D \frac{2q}{N_{60}} \left( \frac{B}{B + 0.3} \right)^2 \quad \text{para } B > 1.22m \quad (91)$$

Donde;

$C_W$ : Es el factor de corrección por la posición del nivel freático. Es igual a 1 cuando la profundidad del nivel freático es igual o superior a  $2B$ , e igual a 2 cuando la profundidad del nivel freático es inferior a  $B$ . Para casos intermedios se debe interpolar.

$C_D$ : Es el factor de corrección por la profundidad de empotramiento  $= 1 - (D_f/4B)$

$D_f$ : Empotramiento de la cimentación

$q$ : Tensión en  $\text{KN/m}^2$

$N_{60}$ : Número medio de golpes en el ensayo de penetración estándar (SPT) hasta una profundidad de 3B a 4B y corrigiendo la eficiencia de la energía del martillo

### 3.5.4.3 Peck & Bazaraa (1969)

Peck & Bazaraa (1969) estudiaron el método propuesto por Terzaghi & Peck en 1948, concluyendo que la ecuación (88) era conservadora, revisándose a la siguiente ecuación (92).

$$s_e(mm) = C_W C_D \frac{2q}{N'_{60}} \left( \frac{B}{B + 0.3} \right)^2 \quad (92)$$

Donde;

$S_e$ : Asiento elástico en mm

$q$ : Tensión en  $\text{KN/m}^2$

$B$ : Ancho de la cimentación en metros

$N'_{60}$ : Número medio de golpes en el ensayo de penetración estándar (SPT) corrigiendo la eficiencia de la energía del martillo y los efectos de confinamiento.

$$N'_{60} = \frac{4N_{60}}{1+0.04 \sigma'_{t0}} \quad \text{para } \sigma'_{t0} \leq 75 \text{ KN/m}^2$$

$$N'_{60} = \frac{4N_{60}}{3.25+0.01 \sigma'_{t0}} \quad \text{para } \sigma'_{t0} > 75 \text{ KN/m}^2$$

$\sigma_0$ : Tensión total

$\sigma'_{t0}$ : Tensión efectiva

$C_W$ : Es el factor de corrección por la posición del nivel freático

$$C_W = \frac{\sigma_0 \text{ a } 0.5B \text{ bajo zapata}}{\sigma'_{t0} \text{ a } 0.5B \text{ bajo zapata}}$$

$C_D$ : Es el factor de corrección por la profundidad de empotramiento

$$C_D = 1 - 0.4 \left( \frac{\gamma D_f}{q} \right)^{0.5}$$

$\gamma$ : Peso específico aparente del suelo

### 3.5.4.4 Burland & Burdige (1985)

Burland & Birdige (1985) propusieron un método para calcular el asiento elástico en cimentaciones superficiales en terreno granular mediante la correlación con el número de golpes obtenidos en el ensayo de penetración estándar (SPT).

Los autores proponen las siguientes correcciones al número de golpes obtenidos en campo calibrado para la eficiencia de la energía del martillo ( $N_{60}$ ).

- Gravas o gravas arenosas:

$$N_{60(a)} = 1.25 N_{60} \quad (93)$$

- Arenas y arenas limosas bajo el nivel freático y con  $N_{60} > 15$ :

$$N_{60(a)} = 15 + 0.5 (N_{60} - 15) \quad (94)$$

Tras corregir el número de golpes, se determina la profundidad de influencia ( $z'$ ) que tiene la tensión bajo la zapata. Para ello, los autores consideran tres posibles casos:

- Caso I:  $N_{60(a)}$  es aproximadamente constante:

$$\frac{z'}{B_R} = 1.4 \left( \frac{B}{B_R} \right)^{0.75} \quad (95)$$

Donde;

$B_R$ : Ancho de referencia, los autores indican que se adopte 0.30m

$B$ : Ancho de la cimentación en metros

- Caso II:  $N_{60(a)}$  incrementa con la profundidad. Para la determinación de  $z'$  se usa la ecuación (95).
- Caso III:  $N_{60(a)}$  reduce con la profundidad.  $Z'$  es el menor de  $2B$  o la profundidad a la que se encuentre la base del estrato flojo ( $z''$ ).

$$z' = \text{Min} \{2B; z''\} \quad (96)$$

Una vez determinada la profundidad de influencia, se calcula el siguiente factor de corrección:

$$\alpha = \frac{H}{z'} \left( 2 - \frac{H}{z'} \right) \leq 1 \quad (97)$$

Donde;

H: Espesor de la capa compresible

Finalmente, el asiento elástico se calcula mediante las siguientes ecuaciones en función de la relación entre la tensión aplicada  $q$  y la tensión efectiva de una precarga  $\sigma'_c$ :

a) Suelo virgen

$$\frac{s_e}{B_R} = 0.14 \alpha \left\{ \frac{1.71}{[\bar{N}_{60} \text{ o } \bar{N}_{60(a)}]^{1.4}} \right\} \left[ \frac{1.25 (L/B)}{0.25 + (L/B)} \right]^2 \left( \frac{B}{B_R} \right)^{0.7} \left( \frac{q}{p_a} \right) \quad (98)$$

b) Suelo precargado con  $q \leq \sigma'_c$

$$\frac{s_e}{B_R} = 0.047 \alpha \left\{ \frac{0.57}{[\bar{N}_{60} \text{ o } \bar{N}_{60(a)}]^{1.4}} \right\} \left[ \frac{1.25 (L/B)}{0.25 + (L/B)} \right]^2 \left( \frac{B}{B_R} \right)^{0.7} \left( \frac{q}{p_a} \right) \quad (99)$$

c) Suelo precargado con  $q > \sigma'_c$

$$\frac{s_e}{B_R} = 0.14 \alpha \left\{ \frac{0.57}{[\bar{N}_{60} \text{ o } \bar{N}_{60(a)}]^{1.4}} \right\} \left[ \frac{1.25 (L/B)}{0.25 + (L/B)} \right]^2 \left( \frac{B}{B_R} \right)^{0.7} \left( \frac{q - 0.67 \sigma'_c}{p_a} \right) \quad (100)$$

Donde;

L: Longitud de la cimentación

$p_a$ : Presión atmosférica ( $\approx 100$  KPa)

$\bar{N}_{60}$  o  $\bar{N}_{60(a)}$ : Promedio de número de golpes corregidos en la profundidad de influencia

### 3.5.5 Métodos semi-empíricos

En el presente apartado se exponen algunos de los métodos más relevantes relativos a la estimación del asiento elástico en suelos granulares a partir de la combinación de observaciones de estructuras y ensayos a escala con estudios teóricos.

#### 3.5.5.1 Schmertmann et al. (1978)

Este método, fundamentado en la teoría de la elasticidad, propone el cálculo de la deformación vertical a una profundidad  $z$  bajo el centro de una carga circular flexible de diámetro  $B$  mediante la siguiente ecuación (101).

$$\varepsilon_z = \frac{q(1 + \nu)}{E} [(1 - 2\nu)A' + B'] \quad (101)$$

Alternativamente,

$$I_z = \frac{\varepsilon_z E}{q} = (1 + \nu)[(1 - 2\nu)A' + B'] \quad (102)$$

Donde;

$A'$  &  $B' = f(z/B)$ : Longitud de la cimentación

$q$ : Presión ejercida por la carga

$E$ : Módulo de elasticidad

$\nu$ : Módulo de Poisson

$I_z$ : Factor de influencia de la deformación

En la Figura 3-31 se puede apreciar el factor de influencia de la deformación en función de la profundidad bajo la carga y ancho del cimientto.



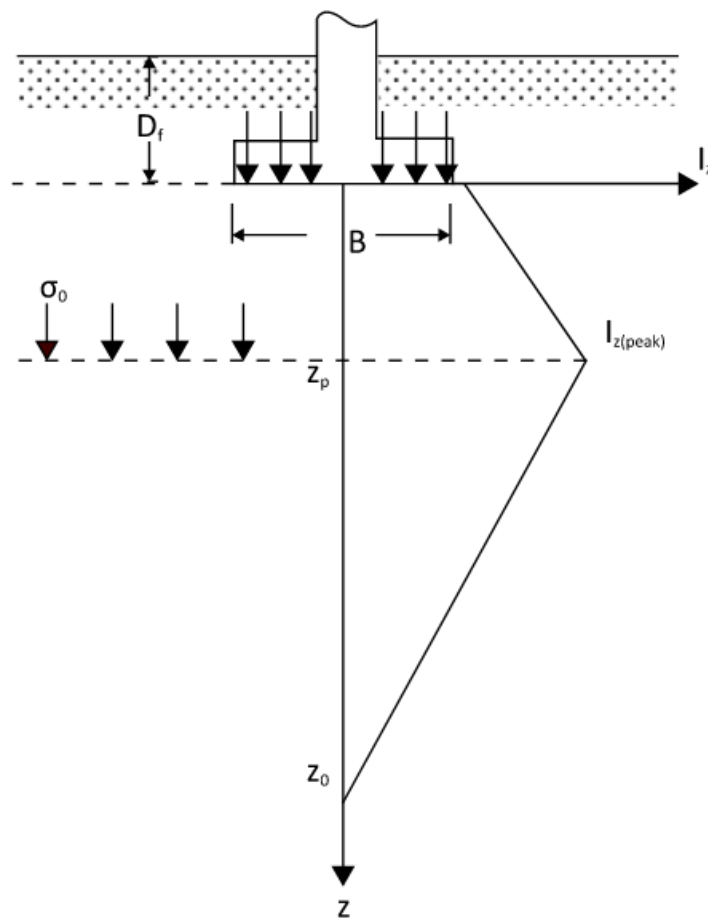


Figura 3-31 – Factor de influencia de la deformación propuesto por Schmertmann et al. (1978)

En el caso de cimentaciones cuadradas o circulares:

$$I_z = 0.1 \text{ para } z = 0\text{m}$$

$$I_z = I_{z(\text{peak})} \text{ para } z = z_p = 0.5B$$

$$I_z = 0 \text{ para } z = z_0 = 2B$$

En el caso de cimentaciones corridas donde  $L/B \geq 10$ :

$$I_z = 0.2 \text{ para } z = 0\text{m}$$

$$I_z = I_{z(\text{peak})} \text{ para } z = z_p = B$$

$$I_z = 0 \text{ para } z = z_0 = 4B$$

El factor de influencia pico (peak) se calcula mediante la ecuación (103).

$$I_{z(peak)} = 0.5 + 0.1 \left( \frac{q}{\sigma'_o} \right)^{0.5} \quad (103)$$

Donde  $\sigma'_o$  es la tensión efectiva a la profundidad en que se produce el factor de influencia pico.

En cimentaciones con  $L/B$  entre 1 y 10, se puede interpolar entre la solución para cimentación cuadrada y corrida.

Finamente, el asiento elástico se puede calcular como

$$s_e = C_1 C_2 q \sum_0^{2B} \frac{I_z}{E} \Delta z \quad (104)$$

Donde;

$C_1 = 1 - 0.5(q_0/q)$ : Factor de corrección de la profundidad de empotramiento del cimiento

$C_2 = 1 + 0.2 \log(t/0.1)$ : Factor de corrección para considerar la consolidación, donde  $t$  es el tiempo en años.

$q$ : Tensión neta efectiva aplicada en el nivel de apoyo de la cimentación

$q_0$ : Tensión vertical efectiva en el nivel de apoyo de la cimentación

Schmertmann et al. (1978), recomienda las siguientes correlaciones para obtener el módulo de deformación:

- Cimentación cuadrada o circular:

$$E = 2.5 q_c \quad (105)$$

- Cimentación corrida:

$$E = 3.5 q_c \quad (106)$$

Donde  $q_c$  es la resistencia por punta en el CPT.

Terzahi et al. (1996) propusieron la siguiente relación para cimentaciones rectangulares

$$\frac{E_{(L/B)}}{E_{\left(\frac{L}{B}=1\right)}} = 1 + 0.4 \log\left(\frac{L}{B}\right) \leq 1.4 \quad (107)$$

### 3.5.5.2 Terzaghi et al. (1996)

A diferencia del diagrama de influencia propuesto por Schmertmann et al. (1978) que se puede ver en la Figura 3-31, Terzaghi et al. (1996) propusieron:

$z = 0$	$I_z = 0.2$ para cualquier valor de $L/B$
$z = z_p = 0.5B$	$I_z = 0.6$ para cualquier valor de $L/B$
$z = z_0 = 2B$	$I_z = 0$ para $L/B = 1$
$z = z_0 = 4B$	$I_z = 0$ para $L/B \geq 10$

Para valores de  $L/B$  entre 1 y 10,

$$\frac{z}{B} = 2 \left[ 1 + \log\left(\frac{L}{B}\right) \right] \quad (108)$$

El asiento elástico se obtiene de la siguiente expresión

$$s_e = C_d(q) \sum_0^{z_0} \frac{I_z}{E} \Delta z + 0.02 \left[ \frac{0.1}{\frac{\sum q_c \Delta z}{z_0}} \right] z_0 \log\left(\frac{t \text{ day}}{1 \text{ day}}\right) \quad (109)$$

↓  
Asiento de consolidación

Donde;

$q_c$  es la resistencia por punta en el CPT en  $\text{MN/m}^2$

$E = 3.5 q_c$  en cimentaciones cuadradas o circulares

$$E_{rectangular} = \left[ 1 + 0.4 \frac{L}{B} \right] E_{cuadrada} \quad \text{en cimentaciones cuadradas o circulares}$$

$C_d$ : Factor de corrección de la profundidad en función de  $D_f/B$

Tabla 3-1 – Factor de corrección de la profundidad

$D_f/B$	$C_d$
0.1	1
0.2	0.96
0.3	0.92
0.5	0.86
0.7	0.82
1.0	0.77
2.0	0.68
2.0	0.65

Según Terzaghi et al. (1996)

### 3.5.5.3 Akbas & Kulhawy (2009)

Akbas & Kulhawy (2009) desarrollado el método L1-L2, basado en los resultados de 167 pruebas de carga a escala real, donde llegaron a la relación entre asiento y carga aplicada que se muestra en la Figura 3-32, pudiéndose dividir en tres regiones principales:

- Región lineal inicial, comportamiento elástico
- Región de transición, comportamiento no lineal
- Región lineal final, cercana al fallo

Los puntos característicos de la curva son:

$L_1$  es la franja de límite elástico donde la curva deja de ser lineal

$L_2$  es la franja del umbral de fallo, al inicio de la región lineal final

$Q_{L1}$  la carga aplicada en la base del cimiento donde se produce el asiento  $S_{e(L1)}$

$Q_T$  la carga ejercida al nivel en que se produce el asiento  $S_{e(T)}$

$Q_{L2}$  la carga ejercida al nivel en que se produce el asiento  $S_{e(L2)}$ , que equivale a la capacidad última de la cimentación.

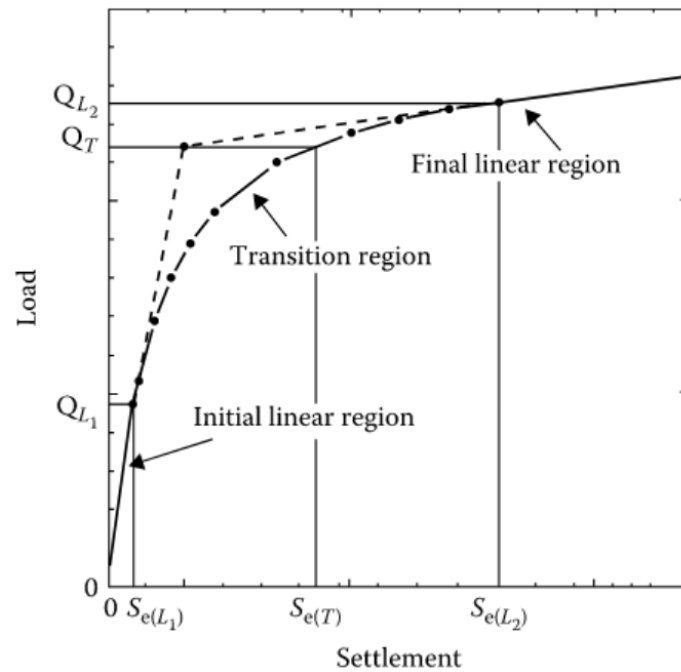


Figura 3-32 – Método L1-L2, Akbas & Kulhawy (2009). Tomado de DAS, Braja M. *Advanced soil mechanics*. CRC press, 2019, p. 605

Los autores propusieron una relación entre la carga  $Q$  y el asiento  $S_e$ , normalizada respecto a la carga  $Q_{L2}$  y el ancho de la cimentación  $B$

$$\frac{Q}{Q_{L2}} = 0.69 \left( \frac{S_e}{B} \right)^{0.68} + 1.0 \quad (110)$$

Donde;

$Q$ : Carga aplicada en KN

$Q_{L2}$ : Carga última de la cimentación

$S_e$ : Asiento en la base de la cimentación en mm

$B$ : Ancho de la cimentación en m

La ecuación (110) debe ajustarse en función del módulo de elasticidad inicial del suelo ( $E_{L1}$ ), para ello, los autores propusieron las siguientes ecuaciones:

- Cuando  $\frac{E_{L1}}{p_a} > 500$ ,

$$\frac{Q}{Q_{L2}} = \frac{S_e/B}{0.68(S_e/B) + 1.18} \quad (111)$$

- Cuando  $500 > \frac{E_{L1}}{p_a} > 250$ ,

$$\frac{Q}{Q_{L2}} = \frac{S_e/B}{0.72(S_e/B) + 1.59} \quad (112)$$

- Cuando  $\frac{E_{L1}}{p_a} < 250$ ,

$$\frac{Q}{Q_{L2}} = \frac{S_e/B}{0.75(S_e/B) + 1.95} \quad (113)$$

Donde  $p_a$  es la presión atmosférica (100 kN/m<sup>2</sup>)

### 3.5.6 Métodos basados en la teoría de la elasticidad

En el presente apartado se exponen algunos de los métodos más relevantes relativos a la estimación del asiento elástico en suelos granulares a partir de relaciones teóricas basadas en la teoría de la elasticidad.

#### 3.5.6.1 Métodos clásicos: Schleicher (1926), Steinbrenner (1934) & Fox (1948)

Para una cimentación de longitud  $L$  y ancho  $B$  ubicada a una profundidad  $D_f$  bajo la superficie y un estrato indeformable a una profundidad  $H$  bajo la superficie, se diferencian tres posibles escenarios:

- Escenario I. El asiento elástico de un punto de una cimentación flexible en un medio elástico indefinido ( $H = \infty$ ) se calcula con la siguiente ecuación.

$$S_{e(flexible)} = \frac{qB}{E} (1 - \nu^2) I \quad (114)$$

Donde;

$q$ : Presión neta ejercida por la cimentación

$E$ : Módulo de elasticidad del suelo

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

$I$ : Factor de influencia que depende del punto donde se evalúa el asiento bajo el cimient. Schleicher (1926) determinó la siguiente ecuación para determinar el factor de influencia en la esquina de una cimentación flexible:

$$I_{corner} = \frac{1}{\pi} \left[ m' \ln \left( \frac{1 + \sqrt{m'^2 + 1}}{m'} \right) + \ln \left( m' + \sqrt{m'^2 + 1} \right) \right] \quad (115)$$

Donde  $m' = L/B$ . El factor de influencia en otras posiciones de la cimentación se puede determinar subdividiendo la cimentación en 4 partes y aplicado el principio de superposición. El factor de influencia en el centro es igual a dos veces el de una esquina.

Las cimentaciones flexibles ejercen una presión uniforme sobre el terreno, pero el asiento no es uniforme bajo la cimentación. Por el contrario, las cimentaciones rígidas

no ejercen una presión uniforme sobre el terreno, pero su asiento si es uniforme. De acuerdo con Bowles (1987), el asiento en el centro de una cimentación rígida es aproximadamente el 93% del de una cimentación flexible. En la Tabla 3-2 se puede ver la relación entre el factor de influencia de una cimentación flexible y rígida

Tabla 3-2 – Relación entre factor de influencia de una cimentación rígida y flexible

$M' = L/B$	Flexible	Rígida
Circular	0.85	0.79
1	0.95	0.82
1.5	1.20	1.07
2	1.30	1.21
3	1.52	1.42
5	1.82	1.60
10	2.24	2.00
100	2.96	3.40

- Escenario II. De acuerdo con Bowles (1987), el asiento superficial teniendo en cuenta la influencia de un estrato rígido ( $H \neq \infty$ ) se obtiene a partir de la ecuación (116).

$$S_{e(flexible)} = q(\alpha B') \frac{1 - \nu^2}{E} I_s \quad (116)$$

Donde;

q: Presión neta ejercida por la cimentación

E: Valor medio del módulo de elasticidad del suelo hasta una profundidad de  $z = 4B$ .

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

$B' = B/2$  para la estimación del asiento en el centro de la cimentación o  $B' = B$  para la estimación del asiento en una esquina.

$\alpha$ : Factor que depende del punto de estudio.

Para la estimación del asiento en el centro de la cimentación:

$$\alpha = 4$$

$$m' = \frac{L}{B}$$



$$n' = \frac{H}{B/2}$$

Para la estimación del asiento en una esquina de la cimentación:

$$\alpha = 1$$

$$m' = \frac{L}{B}$$

$$n' = \frac{H}{B}$$

$I_s$ : Factor de influencia que depende del punto donde se evalúa el asiento bajo el cimienta. Steinbrenner (1934) determinó la siguiente ecuación para determinar el factor de influencia:

$$I_s = F_1 + \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} F_2 \quad (117)$$

Donde;

$$F_1 = \frac{1}{\pi} (A_0 + A_1) \quad (118)$$

$$F_2 = \frac{n'}{2\pi} \tan^{-1} A_2 \quad (119)$$

$$A_0 = m' \ln \frac{(1 + \sqrt{m'^2 + 1}) \sqrt{m'^2 + n'^2}}{m' (1 + \sqrt{m'^2 + n'^2 + 1})} \quad (120)$$

$$A_1 = \ln \frac{(m' + \sqrt{m'^2 + 1}) \sqrt{1 + n'^2}}{m' \sqrt{m'^2 + n'^2 + 1}} \quad (121)$$

$$A_2 = \frac{m'}{n' + \sqrt{m'^2 + n'^2 + 1}} \quad (122)$$

- Escenario III. El efecto que tiene disponer la cimentación a una profundidad  $D_f$  bajo la superficie implica la modificación de las ecuaciones (114) y (116) de acuerdo con las siguientes ecuaciones (123) & (124), respectivamente.

$$S_{e(flexible)} = \frac{qB}{E} (1 - \nu^2) I I_f \quad (123)$$

$$S_{e(flexible)} = q(\alpha B') \frac{1 - \nu^2}{E} I_s I_f \quad (124)$$

Donde  $I_f$  es un factor de influencia que varía con  $D_f/B$  y  $L/B$  de acuerdo con las gráficas de la siguiente figura.

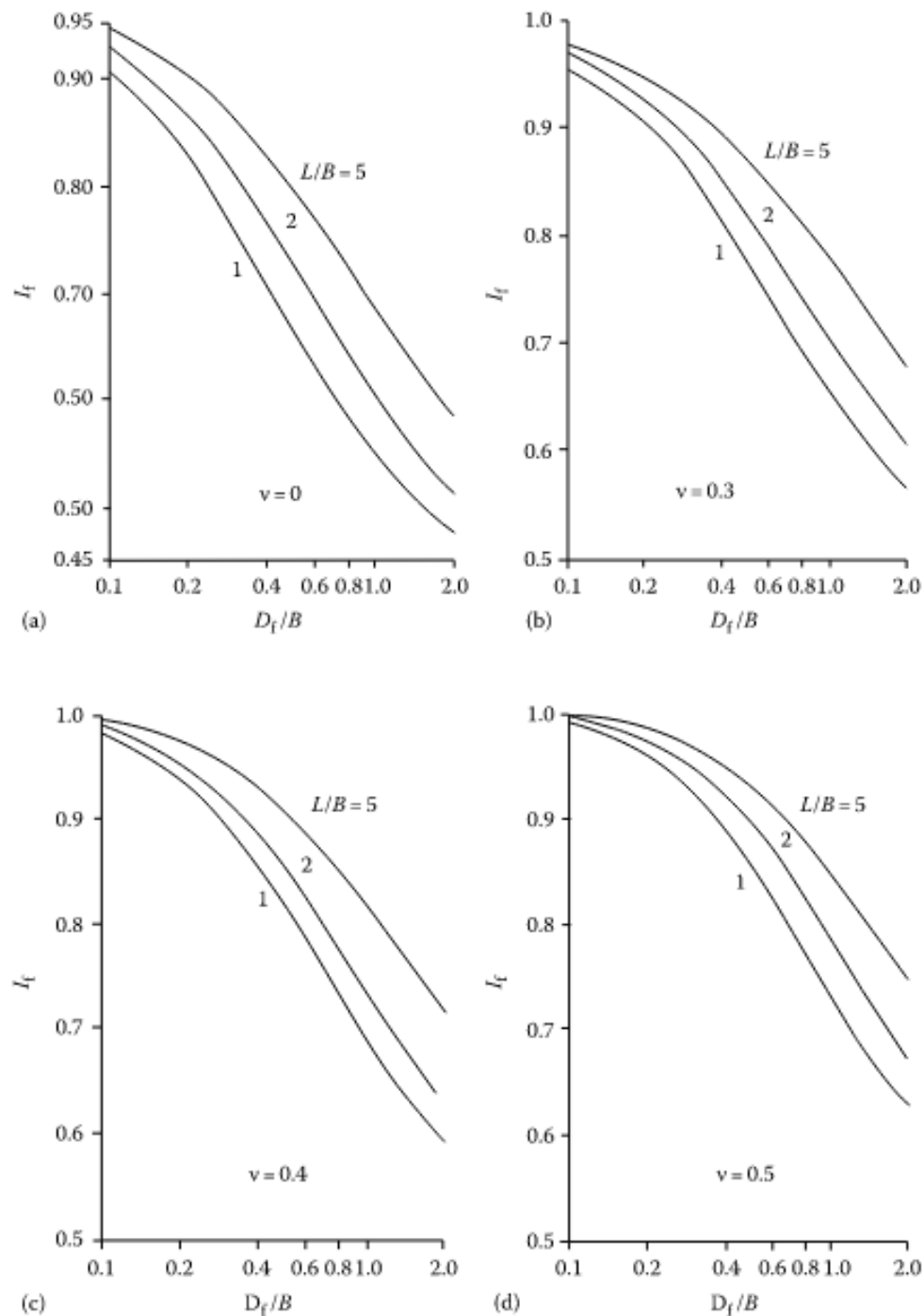


Figura 3-33 – Factor de influencia  $I_f$ . Tomado de DAS, Braja M. *Advanced soil mechanics*. CRC press, 2019, p. 616

### 3.5.6.2 Mayne & Poulos (1999)

La ecuación (125) propuesta por Mayne y Poulos (1999) tiene en cuenta la rigidez de la cimentación, profundidad de empotramiento, variación del módulo de elasticidad con la profundidad y presencia de una base rígida.

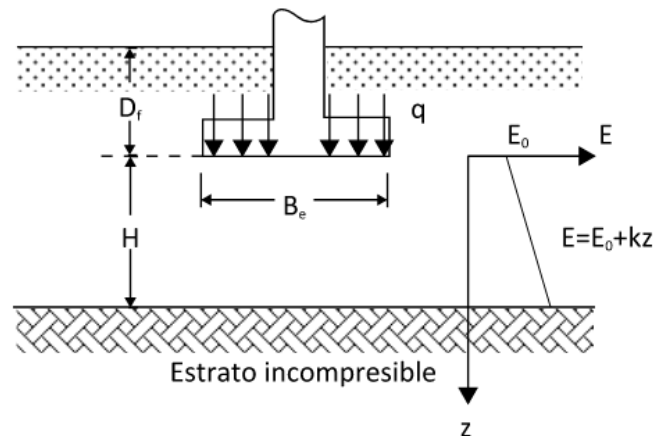


Figura 3-34 – Parámetros fórmula de Mayne & Poulos (1999)

$$S_e = \frac{q B_e I_G I_F I_E}{E_0} (1 - \nu^2) \quad (125)$$

Donde;

$q$ : Presión neta ejercida por la cimentación

$B_e$ : Diámetro equivalente de la cimentación donde  $B_e = \sqrt{\frac{4BL}{\pi}}$ . En caso de tratarse de una cimentación circular,  $B_e$  es igual al diámetro.

$I_g$ : Factor de influencia por la variación del módulo de elasticidad con la profundidad, se obtiene de la Figura 3-35.

$I_F$ : Factor de corrección de la rigidez de la cimentación, se obtiene de la ecuación (126) y

$I_E$ : Factor de corrección de la profundidad de empotramiento de la cimentación, se obtiene de la ecuación (127).

$$I_F = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4.6 + 10(E_f/[E_o + (B_e/2)k])(2t/B_e)^3} \quad (126)$$

$$I_E = 1 - \frac{1}{3.5 \exp(1.22\nu - 0.4)[(B_e/D_f) + 1.6]} \quad (127)$$

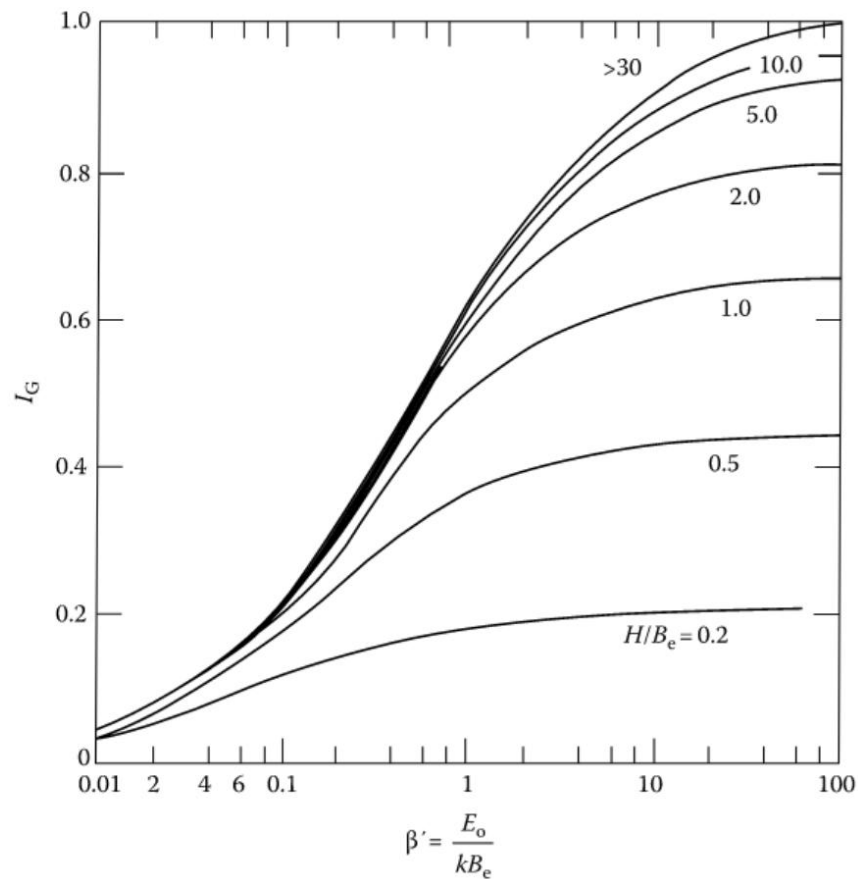


Figura 3-35 – Variación de  $I_G$  en función de  $\beta'$ . Tomado de DAS, Braja M. *Advanced soil mechanics*. CRC press, 2019, p. 621

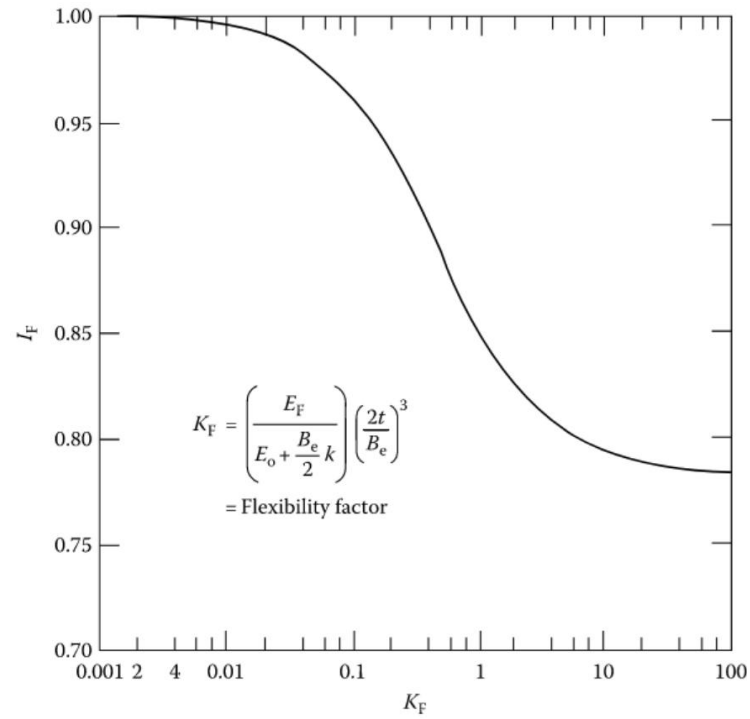


Figura 3-36 – Variación de  $I_F$  en función de  $K_F$ . Tomado de DAS, Braja M. *Advanced soil mechanics*. CRC press, 2019, p. 622

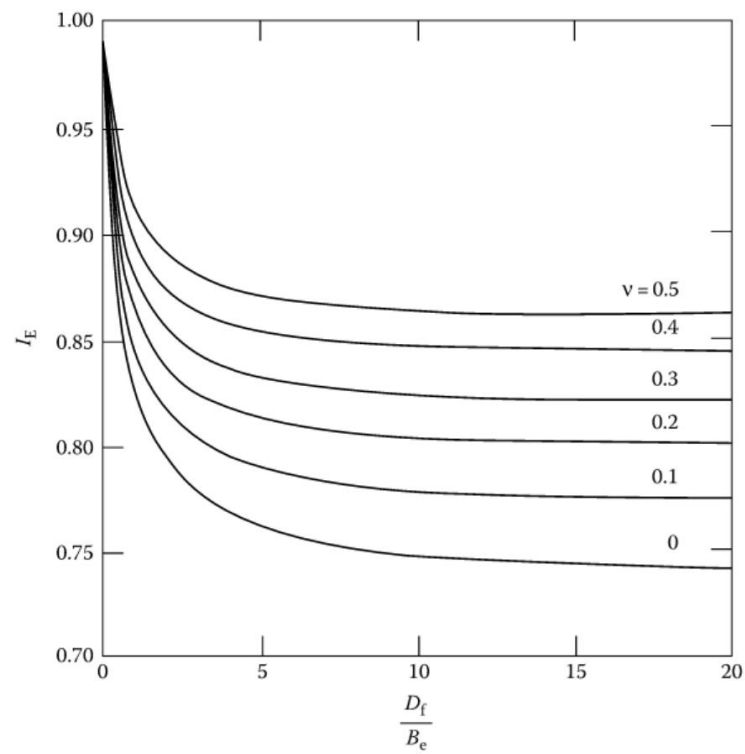


Figura 3-37 – Variación de  $I_E$  en función de  $D_f/B_e$ . Tomado de DAS, Braja M. *Advanced soil mechanics*. CRC press, 2019, p. 623

### 3.6 Módulo de balasto

El módulo de balasto  $k$  mide la relación entre la presión  $p$  aplicada a un área y la deformación  $s$  experimentada por dicha área, expresándose en unidades de fuerza por unidades de volumen ( $\text{KN/m}^3$ ). Se emplea tanto el módulo de balasto vertical (cimentaciones superficiales) como horizontal (pantallas o cimentaciones profundas).

$$k = \frac{p}{s} \quad (128)$$

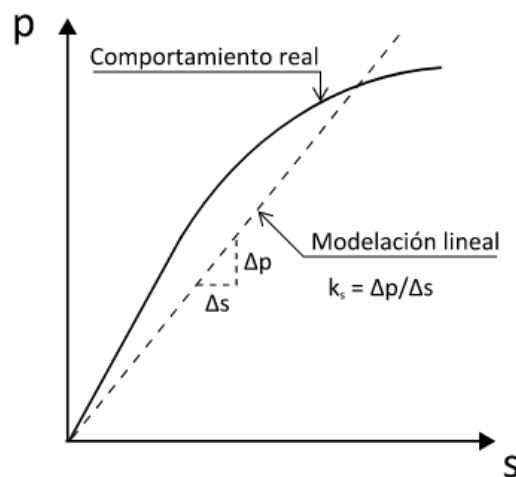


Figura 3-38 – Representación del módulo de balasto

Winkler (1867) introdujo el concepto de módulo de balasto con el fin de modelar la interacción entre el suelo y la estructura. Esta metodología asume que la cimentación se apoya sobre un conjunto de muelles elásticos independientes con rigidez  $k$  que oponen una resistencia a la deformación proporcional al asentamiento local del suelo.

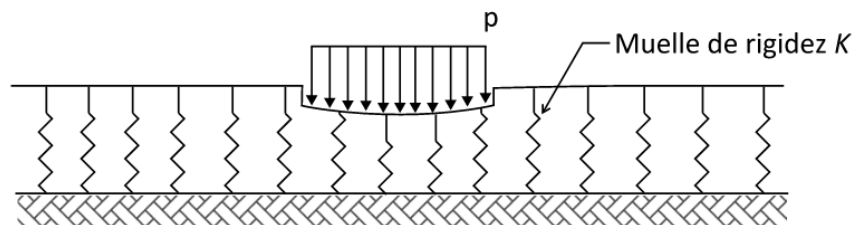


Figura 3-39 – Representación del modelo de Winkler

El módulo de balasto no depende únicamente de las propiedades del suelo, de acuerdo con la ecuación (129), desarrollada en el apartado 3.3.3, que relaciona el módulo de balasto  $k$  con el módulo de elasticidad  $E$ , el módulo de balasto no solo depende exclusivamente del suelo, también del tamaño del área cargada.

$$k = \frac{E}{I B} \quad (129)$$

Esta idealización de la interacción suelo-estructura es una gran simplificación del comportamiento real del suelo, pues en la realidad el terreno es un medio continuo cuyas deformaciones se extienden más allá de la zona inmediatamente cargada como se explica en el apartado 3.4 Distribución de tensiones bajo cimentaciones superficiales.

La rigidez de la propia cimentación también influye en la interacción con el suelo y la forma de transmitir las tensiones como se ha explicado en apartados anteriores y, por tanto, en el módulo de balasto. De acuerdo con el apartado 3.5 y Figura 3-40, se pueden distinguir dos casos extremos, cimentación rígida o flexible, siendo el comportamiento de ambos casos notablemente diferente, afectando tanto a la distribución de presiones como a los asientos.

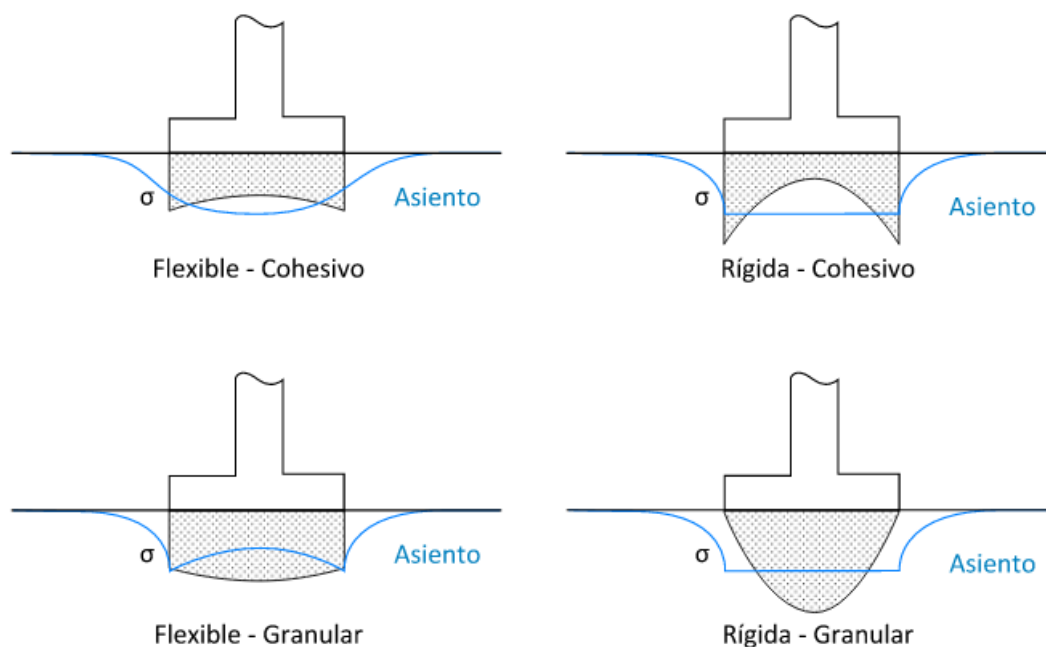


Figura 3-40 – Relación tensión-asiento en función de la rigidez del cimient. Distribución de tensiones en sobreado y sin sombrear el asiento.

En una cimentación muy rígida, la deformación tiende a ser uniforme, ya que la cimentación rigidiza el reparto de cargas.

En el caso de una carga centrada y una cimentación perfectamente rígida en un suelo homogéneo, el asiento sería constante en toda la base de la cimentación. Teóricamente, también se daría una presión uniforme bajo la cimentación, pero en la práctica, en función de la naturaleza cohesiva o granular del terreno, el comportamiento es diferente. En el caso de suelos granulares, un cimientto rígido genera mayores presiones en el centro de la cimentación y menores en los bordes, ya que el terreno granular no se adhiere a la cimentación (falta de confinamiento en los bordes), originándose un “despegue” en los bordes debido a la propia rigidez del cimientto que impide el contacto con el terreno.

Por el contrario, en el caso de suelos cohesivos, una cimentación rígida muestra mayores presiones en los extremos debido a la combinación de adherencia que ejerce el suelo sobre la cimentación y la rigidez del propio cimientto, impidiendo acomodarse a las deformaciones del suelo.

En el caso de cimentaciones flexibles, capaces de adaptarse a la deformación del suelo, ante cargas puntuales se deformará, hundiéndose bajo las zonas más cargadas. Esto genera una mayor presión de contacto bajo los puntos de aplicación de las cargas. Cuanto más flexible sea la cimentación, teóricamente, menos uniforme será la distribución de las presiones.

Sin embargo, la capacidad de redistribución de presiones que tienen las cimentaciones flexibles permite evitar picos excesivos, uniformizándose la presión de contacto en un mayor grado que en el caso de cimentaciones rígidas. De acuerdo con las observaciones de Leshchinsky y Marcozzi (1990), las cimentaciones rígidas presentan una mayor concentración de presiones cerca de los bordes, induciendo a fallos locales en los extremos (plastificación del borde), mientras que las cimentaciones flexibles distribuyen la presión de una forma más homogénea; como consecuencia, las cimentaciones flexibles alcanzan una mayor carga última antes del fallo en comparación con las cimentaciones rígidas, pero también un mayor asiento.

En el caso de losas continuas, debido a la continuación del elemento y la superposición de presiones generadas por varias columnas, se identifica una mayor presión de contacto bajo los pilares, mientras que en las zonas de mitad de vano las presiones son menores, incluso llegando a producirse despegues. En estos casos, no es realista suponer un único módulo de balasto constante en toda la cimentación, ya que esto significaría que el suelo ofrece la misma rigidez bajo las áreas fuertemente cargadas (pilares) y las zonas de mitad de vano.



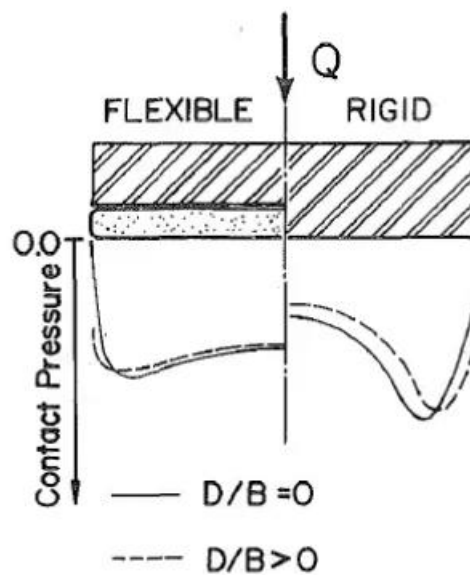


Figura 3-41 – Relación presión-rigidez en arenas densas. Extraído de LESHCHINSKY, Dov; MARCOZZI, Guy  
F. Bearing capacity of shallow foundations: rigid versus flexible models. Journal of geotechnical engineering, 1990, vol. 116, no 11, p. 1750-1756.

En losas de cimentación con múltiples columnas (por ejemplo, cimentaciones de edificios altos), se observa un patrón en las tensiones de contacto bajo las columnas, creándose una zona de alta presión bajo su área de influencia, mientras que las zonas centrales de la losa tienen tensiones considerablemente menores. Si la losa es rígida, la diferencia se atenúa, pero si es flexible, las diferencias pueden acentuarse. En algunos casos, pueden aparecer áreas sin contacto efectivo con el suelo debido a una distribución de cargas irregular, lo que requiere iterar en el cálculo para determinar las zonas de contacto, para ello se realiza un cálculo no lineal con el fin de identificar las zonas en que no hay presiones y liberar los muelles localmente.

Una manera práctica de abordar esto (ver apartado 3.6.3) es subdividir la losa en zonas más pequeñas, asignando a cada una un coeficiente de balasto acorde a la rigidez del suelo bajo esa porción, en lugar de usar un único  $k$  global. Este enfoque, conocido como método de áreas discretas, recomendado por comités técnicos como ACI Special Publication 152, refleja la variación de  $k$  a lo largo de una losa de cimentación, obteniendo así una distribución de presiones más realista: elevada donde la losa carga más y reducida donde carga menos, garantizando un diseño más seguro y económico.

A lo largo de los siguientes subapartados se enumeran las principales teorías, métodos de obtención y metodologías de aplicación en el modelado de cimentaciones superficiales.

### 3.6.1 Evolución de las teorías del módulo de balasto

El modelo original de Winkler (1867) considera que la deformación,  $s$ , es linealmente proporcional a la presión de contacto,  $p$ , en dicho punto e independiente de los esfuerzos de contacto en otros puntos. El suelo se modela como un conjunto de muelles elásticos independientes con rigidez  $k$  como se muestra en la Figura 3-39. Esta relación se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$p(x, y) = k s(x, y) \quad (130)$$

El modelo de Winkler, a pesar de su utilidad en la representación del comportamiento del suelo de una manera tan simplificada, presenta una limitación clave, asume que cada punto de la cimentación se apoya sobre resortes independientes, sin considerar la interacción entre áreas contiguas. Esta deficiencia llevó al desarrollo de modelos de respuesta del suelo más avanzados, conocidos como modelos de dos parámetros. La principal diferencia con Winkler es que, en lugar de un único coeficiente de balasto, estos modelos incorporan un segundo parámetro elástico que introduce un acoplamiento entre los resortes, reflejando de manera más realista la continuidad del suelo.

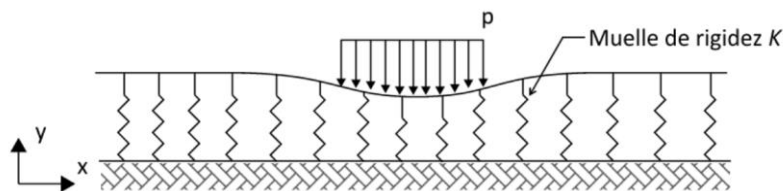


Figura 3-42 – Representación del modelo de Winkler optimizado

El desarrollo de estos modelos siguió dos enfoques distintos. El primero consiste en extender el modelo de Winkler mediante la incorporación de una capa elástica que vincula los muelles verticales, lo que permite distribuir las cargas de manera más progresiva. Ejemplos de esta línea de investigación incluyen los trabajos de Filonenko-Borodich (1940), Hetényi (1946), Pasternak (1954) y Kerr (1964), quienes propusieron distintas maneras de representar la interacción entre los elementos tipo muelle, ya sea a través de membranas elásticas, vigas continuas o capas sometidas a cortante. En particular, el modelo de Pasternak introdujo un parámetro adicional, denominado módulo de rigidez de corte,  $G$ , que permite que los desplazamientos de un punto del suelo afecten a los puntos vecinos, mejorando la representación de la distribución de esfuerzos bajo la cimentación.

El segundo enfoque parte directamente de la teoría de la elasticidad continua, evitando la discretización en muelles. Investigadores como Reissner (1958), Vlasov y Leontiev (1966) adoptaron este método, formulando modelos que parten del comportamiento continuo del suelo y simplifican las ecuaciones mediante hipótesis razonables sobre la distribución de tensiones, deformaciones y desplazamientos en la base de la cimentación. Posteriormente, trabajos como los de Vesic (1963, 1970) desarrollaron ecuaciones que permiten obtener el coeficiente de balasto de manera coherente con la teoría de la elasticidad, garantizando que las deformaciones y esfuerzos en el terreno sean equivalentes a los obtenidos con un análisis más detallado basado en un medio semi-infinito elástico, como el modelo de Boussinesq.

En los últimos años, la evolución de la interacción suelo-estructura ha llevado a metodologías aún más sofisticadas, incluyendo modelos no lineales de Winkler, en los que el módulo de balasto varía según la magnitud de la carga o el asentamiento. Estos modelos se calibran con datos experimentales obtenidos de ensayos de laboratorio y campo, lo que permite representar la variación de la rigidez del suelo con mayor precisión. Además, con el aumento del poder computacional, los métodos numéricos avanzados, como el método de elementos finitos (MEF) en 3D, han permitido modelar el suelo como un medio continuo, eliminando la necesidad de definir inicialmente un coeficiente de balasto. Estos modelos acoplados consideran simultáneamente la deformación de la estructura y la respuesta del suelo, incorporando modelos constitutivos más avanzados, como formulaciones elasto-plásticas y efectos de consolidación.

A pesar de estos avances, el modelo de Winkler y sus variantes siguen siendo ampliamente utilizados en la práctica de la ingeniería, debido a su facilidad de implementación y su capacidad para proporcionar resultados razonables en muchos casos. Sin embargo, para mejorar su precisión, es recomendable emplear enfoques híbridos, como los modelos de dos parámetros o calibraciones basadas en ensayos in situ, que permiten ajustar el coeficiente de balasto a las condiciones específicas del suelo y la cimentación.

A continuación, se describen los principales modelos teóricos para cada uno de los enfoques que se han indicado anteriormente, por un lado, los que extienden el modelo de Winkler mediante la incorporación de una capa elástica que vincula los resortes verticales, Filonenko-Borodich (1940), Hetényi (1946) y Pasternak (1954), y por otro, los basados en la teoría de la elasticidad Vlasov y Leontiev (1966) y Vesic (1970)

### 3.6.1.1 Filonenko-Borodich (1940)

El modelo de Filonenko-Borodich (1940) asume que el muelle  $k$  propuesto por Winkler se conecta a los muelles adyacentes mediante una membrana delgada sometida a una tracción constante  $T$ . Asumiendo el equilibrio estático de un elemento diferencial del sistema muelle-membrana, se llega a la conclusión de que en cimentaciones planas (zapatas, losas, etc.) la deformación superficial debida a una carga distribuida  $p$  se obtiene de la siguiente formulación:

$$p(x, y) = k s(x, y) - T \nabla^2(x, y) \quad (131)$$

Donde  $\nabla^2(x, y) = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  es el operador diferencial Laplaciano en coordenadas cartesianas. En caso de vigas de cimentación, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$p(x) = k s(x, y) - T \partial^2 p / \partial x^2 \quad (132)$$

### 3.6.1.2 Hetenyi (1946)

El modelo de Hetenyi (1946) asume que el muelle  $k$  propuesto por Winkler se conecta a los muelles adyacentes mediante una constante  $D$  que es función de la rigidez a flexión de la placa elástica embebida que conecta los muelles. En cimentaciones planas (zapatas, losas, etc.) la deformación superficial debida a una carga distribuida  $p$  se obtiene de la siguiente formulación:

$$p(x, y) = k s(x, y) - D \nabla^4(x, y) \quad (133)$$

Donde  $\nabla^4(x, y) = \partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/(\partial x^2 \partial y^2) + \partial^4/\partial y^4$  y  $D = EI/b$  es la rigidez a flexión de la placa elástica embebida,  $I$  es el momento de inercia de la cimentación y  $b$  es el ancho de la viga embebida.

En caso de vigas de cimentación, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$p(x) = k s(x, y) - \frac{EI}{b} \partial^4 p / \partial x^4 \quad (134)$$

### 3.6.1.3 Pasternak (1954)

Pasternak (1954) propuso una interacción de cortante entre los elementos tipo muelle mediante la conexión de dichos muelles a través de una capa de elementos verticales incompresibles de grosor unitario ( $t = 1$ ) que se deforma a cortante puro. Asumiendo el comportamiento isotrópico de las capas a cortante en el plano  $xy$  con módulos de cortante  $G_x = G_y = G_z$ , se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\tau_{xz} = G_p \gamma_{xz} = G_p \partial p / \partial x \quad (135)$$

$$\tau_{yz} = G_p \gamma_{yz} = G_p \partial p / \partial y \quad (136)$$

Aplicando el equilibrio de un elemento diferencial del medio a cortante en el eje  $Z$ :

$$p(x, y) - k s(x, y) - (\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y) = 0 \quad (137)$$

Reemplazando las ecuaciones (135) y (136) en la ecuación (137):

$$p(x, y) = k s(x, y) - G_p (\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2) = k s(x, y) - G_p \nabla^2 p(x, y) \quad (138)$$

En el caso particular de vigas de cimentación, la ecuación (137) quedaría de la siguiente forma:

$$p(x, y) = k s(x, y) - G_p (\partial^2 p / \partial x^2) \quad (139)$$

### 3.6.1.4 Vlazov-Leontiev (1966)

Esta metodología se basa en la teoría de la elasticidad. Los autores desarrollaron una formulación similar a la propuesta por Filonenko-Borodich y Pasternak, suponiendo deformaciones unitarias en el plano vertical, junto a una restricción en la distribución de las deformaciones en un medio elástico semi-infinito.

$$p(x) = k s(x, y) - t \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} \quad (140)$$

Donde;

$$K = \frac{(1-\nu)E_s b}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^H \left(\frac{dg}{dz}\right)^2 dz$$

$$t = \frac{E_s b}{2(1+\nu)} \int_0^H g^2 dz$$

b es el ancho de la viga de cimentación

$g(z) = \frac{\sinh \eta(H-z)}{\sinh \eta H}$  es el factor de influencia que describe la variación de deformación vertical con la profundidad z en un suelo o medio de espesor H, donde  $\eta$  es un parámetro experimental. En el apartado 3.4 se dan varias referencias para estimar el factor de influencia.

$E_s$  es el módulo de elasticidad del terreno

$\nu$  es el coeficiente de Poisson del terreno

### 3.6.1.5 Vesic (1970)

Vesic basó su modelo en un medio elástico homogéneo semi-infinito en el cual una cimentación rígida transmite una presión. El módulo de balasto se obtiene a partir de la solución elástica del asentamiento de una placa rígida sobre dicho medio elástico. A partir de este modelo, Vesic obtuvo la relación entre la presión de contacto y el asentamiento medio de la cimentación.

Según la teoría de la elasticidad, el asiento de una cimentación rígida apoyada sobre un suelo elástico homogéneo viene dado por:

$$s = \frac{pB(1 - \nu_s^2)}{E_s F} s \quad (141)$$

donde:

- s es el asentamiento medio de la cimentación,
- p es la presión de contacto en la base de la cimentación,
- B es el ancho característico de la cimentación (diámetro en cimentaciones circulares o ancho en zapatas rectangulares),
- $\nu_s$  es el coeficiente de Poisson del suelo,

- $E_s$  es el módulo de elasticidad del suelo,
- $F$  es un coeficiente de forma dependiente de la geometría de la cimentación.

Tabla 3-3 – Coeficiente de Forma  $F$ 

Tipo de cimentación	$F$
Cuadrada	1.0
Rectangular ( $B/L = 1:2$ )	1.12
Rectangular ( $B/L = 1:3$ )	1.22
Circular	1.13
Losa extensa	1.5-2.0

A partir de esta ecuación, el módulo de balasto  $k$ , definido como la relación entre presión y asentamiento unitario ( $k = p/s$ ), se obtiene como:

$$k = \frac{E_s F}{B(1 - \nu_s^2)} \quad (142)$$

Para cimentaciones situadas a una profundidad  $D$ , Vesic propuso un factor de profundidad  $\beta_D$ , que corrige el valor de  $k$  en función de la profundidad de cimentación:

$$k' = k\beta_D = k \left( 1 + 0.2 \frac{D}{B} \right) \quad (143)$$

donde:

- $k'$  es el módulo de balasto corregido por profundidad,
- $D$  es la profundidad de cimentación,
- $B$  es el ancho de la cimentación.

Para el caso de cimentaciones flexibles, el módulo de balasto varía espacialmente. En estos casos, Vesic sugirió dividir la cimentación en zonas discretas, asignando diferentes valores de  $k$  en función de la carga y la deformabilidad de la losa.

Para losas directamente apoyadas en el terreno (sin pilotes), Vesic recomendó calcular un módulo de balasto efectivo promedio ponderado:

$$k_{s,eff} = \sum \frac{k_s A_i}{\sum A_i} \quad (144)$$

Donde  $A_i$  son las áreas de la cimentación en las que se subdivide la losa.

### 3.6.2 Determinación del módulo de balasto

La determinación del módulo de balasto es dificultosa, no siendo directamente extrapolable de ensayos de campo o laboratorio debido a que su valor depende tanto de la naturaleza del suelo, como de la forma y profundidad del área cargada, como se ha explicado anteriormente.

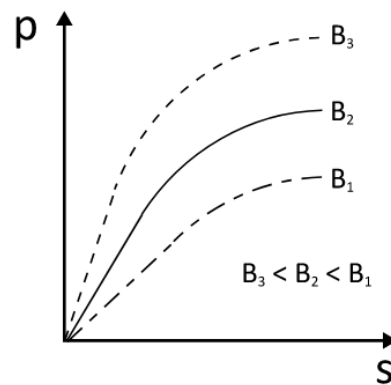


Figura 3-43 – Relación presión-asiento en función del tamaño de la cimentación

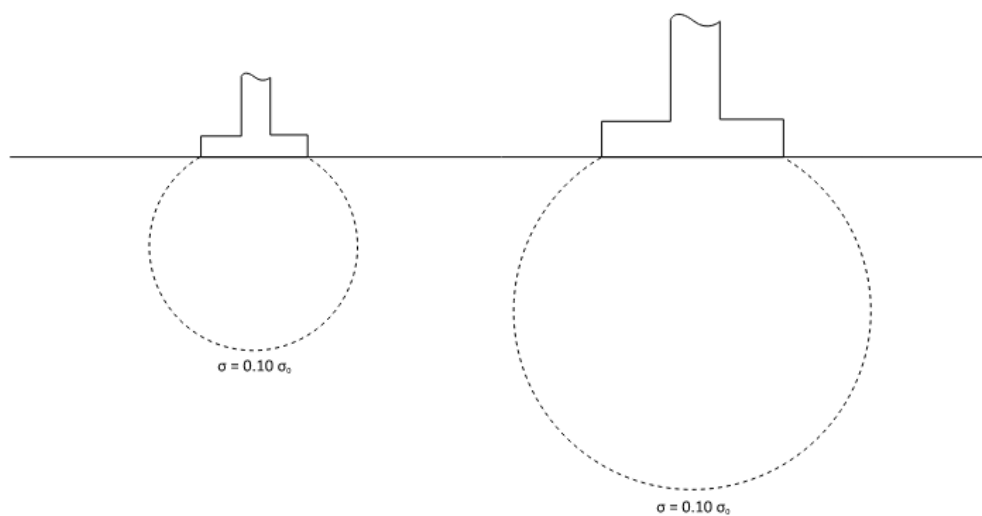


Figura 3-44 – Relación del bulbo de presiones en función del tamaño de la cimentación



La duración de la fase de carga también puede hacer variar el módulo de balasto con el tiempo, ya que, en terreno cohesivos, gran parte del asiento se debe a la consolidación y, por lo tanto, puede ocurrir durante varios años o incluso toda la vida útil de la estructura. Por ello, en terrenos de naturaleza cohesiva, se deben considerar análisis a corto y largo plazo del módulo de balasto.

Por otro lado, el módulo de balasto tampoco será constante para toda la superficie del cimiento, ya que la presión de contacto y asiento también varían espacialmente, como se muestra en la Figura 3-40. Se trata este tema en el apartado 3.6.3.

Varios autores han propuesto metodologías para determinar el módulo de balasto. Terzaghi (1955) propuso las siguientes ecuaciones para determinar el módulo de balasto  $k_s$  de una cimentación cuadrada de ancho  $B$  en base al módulo de balasto  $k_{s1}$  obtenido de un ensayo de placa de carga con placa cuadrada de ancho  $B_1$ .

Cimentación en suelo cohesivo:

$$k_s = k_{s1} \frac{B_1}{B} \quad (145)$$

Cimentación en suelo granular:

$$k_s = k_{s1} \left( \frac{B + B_1}{2B} \right)^2 \quad (146)$$

Para cimentaciones rectangulares de ancho  $B$  y longitud  $L$ ,  $k_s$  se multiplica por la siguiente relación:

$$k_{s,rect.} = k_{s,cuad.} \left( 1 + \frac{B}{2L} \right) \quad (147)$$

En el caso de cimentaciones ejecutadas a una profundidad de estudio  $D$ , autores como Terzaghi (1955) determinaron que el módulo de balasto a la profundidad de estudio  $k_{sz}$  puede estimarse mediante la siguiente relación:

$$k_{s,z} = k_s \left( 1 + 2 \frac{D}{B} \right) \quad (148)$$

Autores como Teng (1962), Vesic (1970) o Bowles (1996) propusieron una corrección a la fórmula anterior, indicando un incremento menos pronunciado del módulo de balasto con la profundidad, sustituyendo el  $2D/B$  por valores entre  $0.2 \sim 0.5 D/B$ . Se indica a continuación la formulación propuesta por Bowles (1996).

$$k_{s,z} = k_s \left( 1 + 0.5 \frac{D}{B} \right) \quad (149)$$

Biot (1937) desarrolló la siguiente formulación que combinaba las bases del modelo de Winkler con la teoría del sólido elástico, particularizada para el conocido caso de viga flotante (viga de cimentación).

$$k = \frac{1.23 E_s}{B(1 - \nu_s^2)} \left[ \frac{E_s B^4}{16C(1 - \nu_s^2)E_b I} \right]^{0.11} \quad (150)$$

Donde;

$B$  es el ancho de la cimentación

$\nu_s$  es el coeficiente de Poisson del suelo

$E_s$  es el módulo de elasticidad del suelo

$E_b$  es el módulo de elasticidad del material con que se ejecuta la cimentación

$I$  es la inercia de la cimentación

$C$  es un coeficiente adimensional que varía en función de la distribución de presiones bajo la viga de cimentación. Se toma un valor de 1.0 cuando la distribución de presiones es uniforme en el ancho del cimient y un valor entre  $1.0 < C < 1.13$  cuando la distribución del asiento es uniforme en el ancho del cimient.

Vesic (1961) realiza varias modificaciones de la formulación propuesta por Biot en 1937, quedando la fórmula de la siguiente forma:

$$k = \frac{0.65 E_s}{B(1 - \nu_s^2)} \sqrt[12]{\frac{E_s B^4}{E_b I}} \quad (151)$$

### 3.6.3 Metodologías de aplicación del módulo de balasto en modelos de cálculo

Las presiones de contacto y asientos en una cimentación varían espacialmente y, en consecuencia, también lo hace el módulo de balasto. En el caso de cimentaciones de pequeño tamaño, como zapatas, esta variación espacial puede llegar a ser ignorada, pero en el caso de cimentaciones tipo losa o vigas de cimentación, es notable que la relación entre la presión de contacto y el asiento puede llegar a variar notablemente.

En consecuencia, existen varias metodologías para considerar la variación espacial del módulo de balasto en los modelos de cálculo. Se exponen a continuación las principales metodologías.

#### 3.6.3.1 Módulo de balasto único

Se considera un único módulo de balasto en toda la superficie de la cimentación. Esta aproximación puede ser razonable cuando la cimentación tiene unas dimensiones moderadas y la variación espacial de cargas no es muy significativa.

Esta metodología no es aconsejable para cimentaciones con dimensiones considerables o cargas desiguales, ya que no refleja la verdadera distribución de presiones, asientos y esfuerzos.

#### 3.6.3.2 Módulo de balasto variable espacialmente

Se subdivide la base de la cimentación en áreas más pequeñas, por ejemplo, mallas o paneles asociados a los pilares y zonas intermedias. A cada área se le asigna un módulo de balasto distinto de acuerdo con la rigidez local de suelo y del propio cimiento.

Existen varios métodos para realizar la subdivisión y discretización de los parámetros considerados en cada zona. Algunos métodos, como los expuestos en ACI 336.2R-88 o algunas guías del Eurocódigo 7 (Frank et al. (2004). *Designers' Guide to EN 1997-1 Eurocode 7: Geotechnical Design - General Rules*), realizan una subdivisión de la cimentación con el fin de

asignar un coeficiente de balasto mayor en los bordes; otros métodos realizan una subdivisión de acuerdo a las características de las cargas o rigidez relativa de la losa y el suelo.

A continuación, se exponen los principales métodos de subdivisión y variación del módulo de balasto en losas de cimentación.

### Metodología propuesta por ACI 336.2R, 1988

El informe emitido por el comité de ACI número 336.2R-88 recomendaba que se hiciera una subdivisión de acuerdo con la Figura 3-45, donde la zona central tendría un tamaño entre un 30% y un 50% del ancho de la losa (cimentación rígida y flexible, respectivamente), la zona intermedia tendría también un tamaño entre un 30% y un 50% del ancho y, finalmente, la zona exterior tendría un ancho de aproximadamente un 20% el ancho de la losa. El módulo de balasto considerado sería de  $k_s$  en la zona central,  $1.5 k_s$  en la zona intermedia y  $2 k_s$  en el borde.

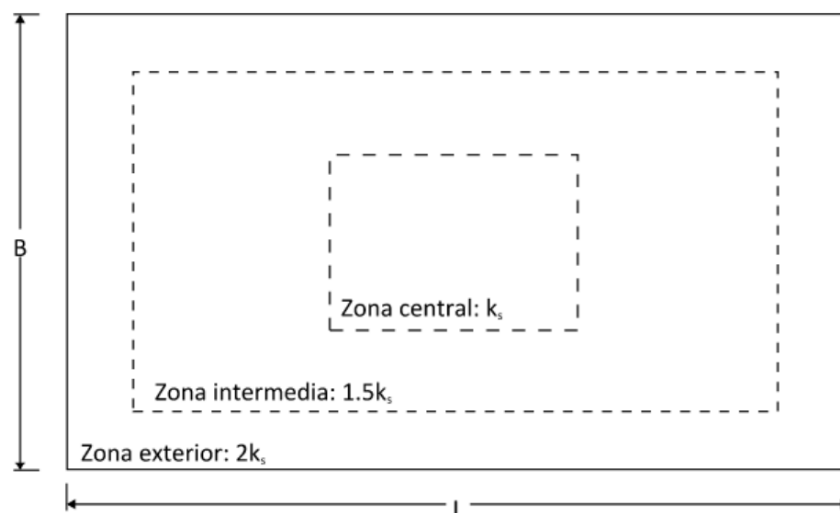


Figura 3-45 – Subdivisión de acuerdo con ACI 336.2R-88

### Metodología propuesta en Designers' Guide to EN 1997-1 Eurocode 7: Geotechnical Design - General Rules (2004)

Esta guía del Eurocódigo 7 propone subdividir la losa en 9 zonas de acuerdo con la Figura 3-46 con distancias de  $0.25B$  y  $0.25L$  desde los bordes de la losa. En las zonas ubicadas en las esquinas se incrementaría el módulo de balasto  $k_s$  un 50%, mientras que en la zona central se disminuiría un 50%.

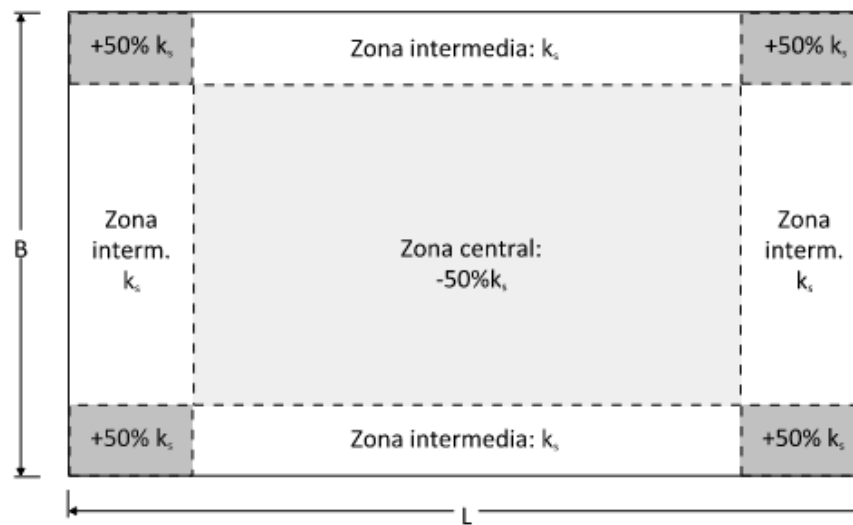


Figura 3-46 – Subdivisión de acuerdo con Frank et al. (2004). *Designers' Guide to EN 1997-1 Eurocode 7: Geotechnical Design - General Rules*

### Otras metodologías de subdivisión basadas en la geometría de la losa

Alipour, Amir (2011) recopiló varias metodologías de subdivisión de la losa siguiendo criterios similares al propuesto en ACI 336.2R-88, realizando una subdivisión de la losa que implica un mayor coeficiente de balasto en los bordes.

En las siguientes figuras se exponen tres metodologías de subdivisión del borde.

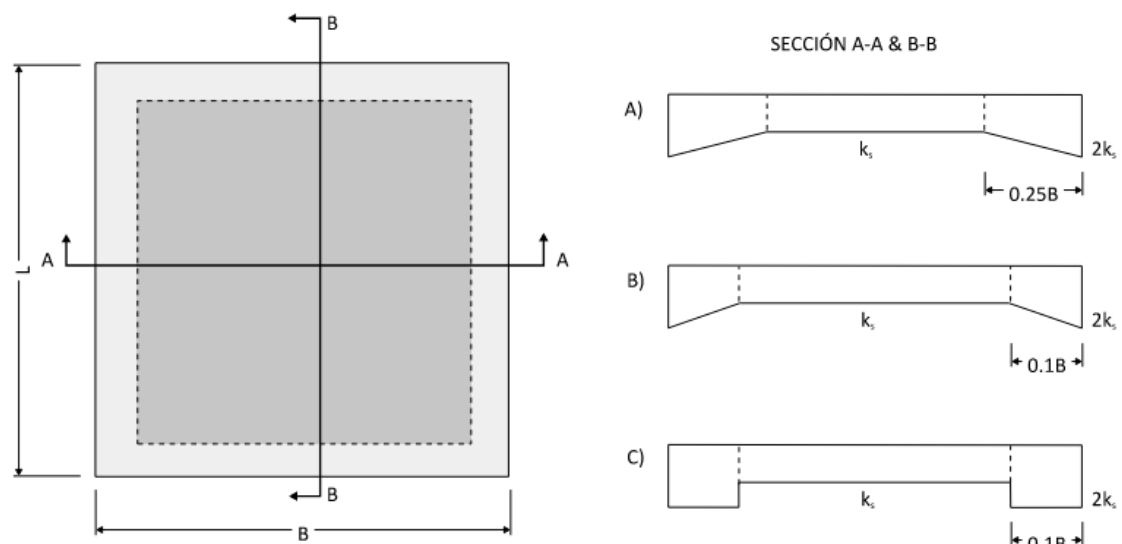


Figura 3-47 – Subdivisión de acuerdo con recopilación de Alipour, M. (2011)

### Método de áreas discretas

Para la discretización de los parámetros considerados en cada zona se realiza un proceso iterativo mediante cálculos estructurales, para la obtención de las presiones de contacto, y geotécnicos, para la obtención del asentamiento, retroalimentándose hasta obtener un módulo de balasto coherente entre el análisis estructural y geotécnico.

Esta subdivisión permite una representación más precisa de cómo el suelo responde a las cargas aplicadas, mejorando la exactitud del análisis estructural. No obstante, tiene un mayor costo computacional que los métodos expuestos anteriormente.

Este enfoque ha sido discutido por diversos autores como Ulrich (1995) y ACI mediante la *Special Publication SP-152* (1995), o estudios más recientes, como Estephan R. et al. (2021), donde se recomiendan diferentes algoritmos para optimizar el proceso. A continuación, se indica un algoritmo para realizar la iteración usando los programas comerciales CSI SAFE y Rocscience Settle3.

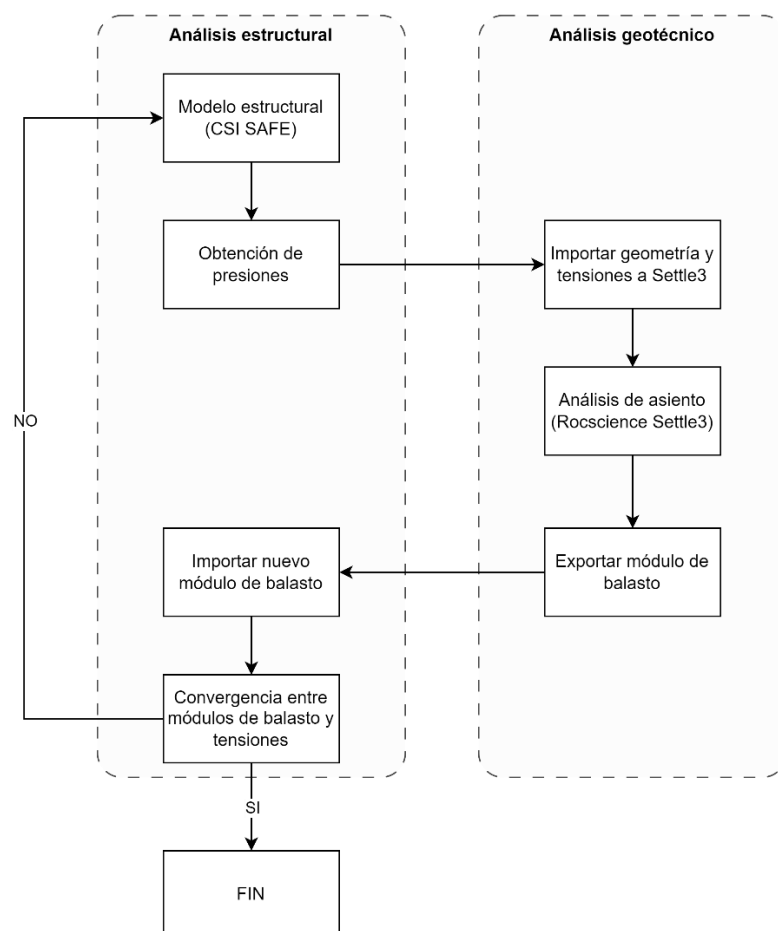


Figura 3-48 – Algoritmo aplicado a método de áreas discretas. Adaptación de Estephan R. et al. (2021)

### 3.6.3.3 Modelos de dos parámetros (Winkler-Pasternak, Hetenyi u otros)

Algunos programas de cálculo permiten considerar dos parámetros de entrada, además del módulo de balasto vertical, se define un segundo coeficiente, módulo de cortante (en algunos casos, módulo de balasto horizontal), que simula el acople entre nodos, permitiendo la interacción entre muelles contiguos.

Este enfoque permite una distribución de asientos y presiones de contacto más suave, evitando picos aislados. En la práctica, la calibración de este tipo de modelos es más compleja, ya que exige calibrar dos parámetros. En ausencia de datos de campo válidos, suelen emplearse fórmulas teóricas basadas en la teoría de la elasticidad que relacionan este segundo parámetro con el módulo de Poisson del suelo o el espesor de la capa deformable.

### 3.6.3.4 Modelos de elementos finitos (FEM)

A pesar de no ser un método que use el módulo de balasto directamente, este tipo de modelos se suelen emplear como herramienta de validación o calibración de modelos basados en el módulo de balasto.

En este método, en lugar de usar el coeficiente de balasto explícito, se modela el suelo con elementos finitos (como elementos de volumen con comportamiento elasto-plástico para el terreno). La cimentación se modela con elementos estructurales (placa o viga) y se vincula al suelo mediante la compatibilidad de deformaciones en la interfaz. Este enfoque FEM resuelve las ecuaciones de equilibrio en la estructura y el suelo simultáneamente, permitiendo una distribución natural de tensiones y deformaciones según las propiedades del suelo y la cimentación, sin depender de un módulo de balasto supuesto. También permite considerar efectos no lineales, estratificación compleja o el nivel freático, entre otros.

A pesar de ser una herramienta muy útil y precisa, requiere un mayor costo computacional y parámetros de entrada. Para proyectos convencionales, el método de áreas discretas, suficientemente calibrado, puede ser suficientemente preciso y manejable para la mayoría de los diseños; no obstante, cada día estos modelos son más utilizados, combinado con una mayor capacidad computacional de los ordenadores.

### 3.7 Análisis retrospectivo

El análisis retrospectivo (o *backanalysis*) en el contexto de este Trabajo de Fin de Master se refiere a la identificación de los parámetros del terreno en base a las mediciones observadas, principalmente, asientos o presiones ejercidas al terreno. Este proceso se realiza mediante una función objetivo y un algoritmo de optimización.

La función objetivo es una expresión matemática que cuantifica el error o la discrepancia entre los valores medidos y los valores estimados por el modelo de cálculo, considerando un conjunto de parámetros geotécnicos determinados.

Por otro lado, el algoritmo de optimización es un método matemático diseñado para identificar el conjunto de parámetros geotécnicos que minimiza la función objetivo. Este algoritmo explora el espacio de soluciones con el fin de determinar los parámetros que reducen al mínimo el error del modelo.

Existen diferentes funciones objetivo que pueden utilizarse dependiendo de la naturaleza del problema y de las propiedades de los datos observados. A continuación (apartado 3.8), se presentan las principales funciones objetivo potencialmente aplicables a problemas geotécnicos.

A lo largo del apartado 3.9 se exponen las principales categorías de algoritmos de optimización y se explican los principales algoritmos aplicables a este Trabajo de Fin de Master.



### 3.8 Funciones objetivo

La función objetivo cuantifica la discrepancia entre las mediciones de campo  $x^*$  y las predicciones  $x(p)$  del modelo en función de un conjunto de parámetros  $p$  a estimar. La mejor estimación de los parámetros  $p$  será la que minimice la función objetivo.

A continuación, se exponen varias funciones objetivo que pueden utilizarse en el análisis retrospectivo de parámetros geotécnicos dependiendo de la naturaleza del problema y de las propiedades de los datos observados.

#### 3.8.1 Método de mínimos cuadrados

El método más común es adoptar errores independientes con varianza constante, lo que nos lleva al criterio de mínimos cuadrados ordinarios. Esta función objetivo se define como la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores medidos y calculados.

$$J_{LS}(p) = \sum_{i=1}^m [x_i^* - x_i(p)]^2 \quad (152)$$

Donde;

$m$  es el número de observaciones

De acuerdo con Ledesma et al. (1996), la ecuación (152) se puede representar en notación matricial de la siguiente forma:

$$J = (x^* - x)^T (x^* - x) \quad (153)$$

#### 3.8.2 Función de desviación media absoluta

En lugar de minimizar la suma de los cuadrados de los errores, minimiza la suma de los valores absolutos de los errores. Esta función objetivo es más robusta ante valores atípicos y menos sensible a errores extremos comparado con la función de mínimos cuadrados.

$$J_{MAD}(p) = \sum_{i=1}^m |x_i^* - x_i(p)| \quad (154)$$

### 3.8.3 Método de mínimos cuadrados ponderados (WLS)

Es una extensión del método de mínimos cuadrados, pero asignando pesos  $w_i$  a cada observación, considerando su incertidumbre. Es útil cuando las mediciones tienen diferente confiabilidad.

$$J_{\text{WLS}}(p) = \sum_{i=1}^m w_i [x_i^* - x_i(p)]^2 \quad (155)$$

### 3.8.4 Método de máxima entropía

En problemas donde los datos observados son escasos o tienen incertidumbre, la Máxima Entropía permite estimar los parámetros que maximizan la dispersión de la distribución de probabilidades, asegurando que no se introduzcan sesgos innecesarios.

La función objetivo se basa en la entropía de Shannon:

$$J_{\text{ME}}(p) = - \sum_i P_i(p) \log P_i(p) \quad (156)$$

Donde  $P_i(p)$  es la probabilidad de cada observación dada la estimación de parámetros  $p$ . Se usa en calibración de modelos probabilistas.

### 3.8.5 Método de Markov

El método de Markov se basa en la incorporación de dependencias estadísticas entre mediciones para mejorar la estimación de parámetros en los problemas inversos. Este método es indicado cuando los errores de las observaciones no son independientes, estando correlacionados entre ellos, por ejemplo, la acumulación de errores de medición.

La función de mínimos cuadrados ordinarios supone que los errores en las mediciones son independientes y con varianza constante, pero en geotecnia es común que estén correlacionados. En estos casos, el método de Markov tiene la ventaja de poder corregir este error acumulativo mediante el uso de una matriz de covariancia que modela estas correlaciones.

Para incorporar la dependencia entre mediciones, se usa un enfoque de Mínimos Cuadrados Ponderados (WLS) o Mínimos Cuadrados Generalizados (GLS), donde en lugar de minimizar simplemente la suma de los errores al cuadrado, se introduce una matriz de covarianza  $C_x$ :

$$J_{\text{GLS}}(p) = (x^* - x)^T C_x^{-1} (x^* - x) \quad (157)$$

La matriz  $C_x$  describe la relación entre los errores de medición. Si los errores fueran independientes,  $C_x$  sería simplemente una matriz diagonal con las varianzas  $\sigma_i^2$  en la diagonal. Sin embargo, cuando hay correlación, los elementos fuera de la diagonal indican la relación entre diferentes mediciones.

El método de Markov propone modelar  $C_x$  como una matriz con estructura Markoviana, es decir, una matriz donde los errores están correlacionados según un proceso de ruido acumulativo.

Un modelo típico para la matriz  $C_x$  es una estructura Markoviana de primer orden, en la que los errores de una medición dependen del error de la medición anterior, con un coeficiente de correlación  $\rho$ :

$$C_x = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \rho^2\sigma^2 & \dots & \rho^{m-1}\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \rho^{m-2}\sigma^2 \\ \rho^2\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho^{m-3}\sigma^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{m-1}\sigma^2 & \rho^{m-2}\sigma^2 & \rho^{m-3}\sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (158)$$

Donde:

$\sigma^2$  es la varianza de los errores de medición.

$\rho$  es el coeficiente de correlación entre mediciones consecutivas.

$m$  es el número de mediciones.

### 3.8.6 Método de máxima verosimilitud

Dado un conjunto de mediciones  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$  y un modelo numérico que predice valores  $x(p)$ , la función de verosimilitud expresa la probabilidad de observar  $x^*$  dado  $p$ :

$$L(p) = P(x^* | p) \quad (159)$$

El método de máxima verosimilitud consiste en encontrar los valores de  $p$  que maximizan  $L(p)$ . Para mayor facilidad de cálculo, en lugar de maximizar  $L(p)$ , se suele maximizar su logaritmo (función log-verosimilitud):

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^m \ln P(x_i^*|p) \quad (160)$$

Dado que en muchos problemas los errores en las mediciones se modelan como distribuciones normales, se asume que los errores  $\varepsilon_i = x_i^* - x_i(p)$  siguen una distribución normal  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , con varianza  $\sigma^2$ . Esto nos lleva a definir la función de verosimilitud como:

$$L(p) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i^* - x_i(p))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (161)$$

Tomando logaritmos:

$$\ln L(p) = -\frac{m}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (x_i^* - x_i(p))^2 \quad (162)$$

Dado que  $\ln L(p)$  crece cuando la suma de cuadrados disminuye, maximizar  $\ln L(p)$  es equivalente a minimizar la función objetivo de Mínimos Cuadrados Generalizados:

$$J_{ML}(p) = (x^* - x(p))^T C_x^{-1} (x^* - x(p)) \quad (163)$$

Donde  $C_x$  es la matriz de covarianza de los errores.

### 3.8.7 Método de máxima verosimilitud con información previa (Bayesiana)

El método de máxima verosimilitud con información previa, también conocida como estimación de máximo a posteriori MAP, es una extensión del método de máxima verosimilitud

incorporando información previa de los parámetros objetivo. Se basa en la teoría de Bayes, que permite actualizar nuestras creencias sobre los parámetros a partir de los datos observados.

En el método de máxima verosimilitud se buscan los parámetros  $p$  que maximicen la probabilidad de observar los datos medidos en  $x^*$ . En el caso de disponer de información previa sobre los parámetros objetivo (ensayos de laboratorio, pruebas de campo...), mediante el teorema de Bayes, se pueden combinar ambas fuentes con la siguiente ecuación:

$$P(p|x^*) = \frac{P(x^*|p)P(p)}{P(x^*)} \quad (164)$$

Donde:

$P(p|x^*)$  es la probabilidad a posteriori de los parámetros, es decir, la mejor estimación de  $p$  después de considerar los datos.

$P(x^*|p)$  es la verosimilitud, que mide qué tan bien los parámetros  $p$  explican los datos  $x^*$ .

$P(p)$  es la distribución a priori de los parámetros, basada en conocimientos previos.

$P(x^*)$  es una constante de normalización.

El método MAP maximiza la probabilidad a posteriori  $P(p|x^*)$  en lugar de sólo la verosimilitud. Dado que maximizar  $P(p|x^*)$  es lo mismo que maximizar su logaritmo, aplicando logaritmos:

$$\ln P(p|x^*) = \ln P(x^*|p) + \ln P(p) - \ln P(x^*) \quad (165)$$

Como  $P(x^*)$  es una constante respecto a  $p$ , puede ignorarse en la optimización. Así, la función objetivo del método MAP se obtiene como la suma de la función objetivo de máxima verosimilitud y un término adicional que penaliza desviaciones respecto a los valores previos de  $p$ :

$$J_{\text{MAP}}(p) = -\ln P(x^*|p) - \ln P(p) \quad (166)$$

Suponiendo que los errores en los datos siguen una distribución normal multivariada con matriz de covarianza  $C_x$ , y que los valores previos de los parámetros también siguen una distribución normal con media  $p_0$  y matriz de covarianza  $C_p$ , entonces:

$$P(x^*|p) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |C_x|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (x^* - x(p))^T C_x^{-1} (x^* - x(p)) \right) \quad (167)$$

$$P(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C_p|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (p - p_0)^T C_p^{-1} (p - p_0) \right) \quad (168)$$

Tomando logaritmos y omitiendo constantes, se obtiene la función objetivo a minimizar en el método MAP:

$$J_{\text{MAP}}(p) = (x^* - x(p))^T C_x^{-1} (x^* - x(p)) + (p - p_0)^T C_p^{-1} (p - p_0) \quad (169)$$

### 3.8.8 Función objetivo con error relativo

La función objetivo con error relativo es una variación del enfoque clásico de mínimos cuadrados, en la cual se minimiza la diferencia relativa entre los valores medidos y los valores calculados en lugar de la diferencia absoluta. Este método es particularmente útil cuando los datos medidos tienen órdenes de magnitud muy diferentes o cuando se desea dar la misma importancia relativa a cada medición, independientemente de su magnitud.

La función objetivo con error relativo se define como:

$$J_{\text{rel}}(p) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{x_i^* - x_i(p)}{x_i^*} \right)^2 \quad (170)$$

En la ecuación anterior, cada término representa el error relativo cuadrático de la medición  $i$ , es decir, la diferencia entre el valor medido  $x_i^*$  y el valor calculado  $x_i(p)$ , normalizada por  $x_i^*$ .

También puede escribirse en términos de error absoluto y error relativo:

$$J_{\text{rel}}(p) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\varepsilon_i}{x_i^*} \right)^2 \quad (171)$$

Donde  $\varepsilon_i = x_i^* - x_i(p)$ .

Si hay diferentes tipos de mediciones, se pueden usar términos ponderados:

$$J_{\text{rel}}(p) = \frac{1}{N_U} \sum_{i=1}^{N_U} \left( \frac{U_i^{\text{meas}} - U_i^{\text{calc}}(p)}{U_i^{\text{meas}}} \right)^2 + \frac{1}{N_P} \sum_{j=1}^{N_P} \left( \frac{P_j^{\text{meas}} - P_j^{\text{calc}}(p)}{P_j^{\text{meas}}} \right)^2 \quad (172)$$

Donde:

$U^{\text{meas}}$  y  $P^{\text{meas}}$  son los valores medidos.

$N_U$  y  $N_P$  son el número de mediciones de cada tipo.

Este criterio equilibra la importancia de cada medición, sin importar su magnitud.

### 3.8.9 Método de máxima correlación cruzada

Este método minimiza la diferencia en la correlación entre los valores medidos y los valores calculados, en lugar de los valores absolutos. Su principal aplicación es en problemas donde se busca ajustar la tendencia general más que valores puntuales.

$$J_{\text{XCORR}}(p) = 1 - \frac{\sum (x_i^* - \bar{x}^*)(x_i(p) - \bar{x}(p))}{\sigma_{x^*} \sigma_x} \quad (173)$$

### 3.8.10 Función objetivo basada en divergencia de Kullback-Leibler (KL)

Se usa en enfoques probabilistas donde la distribución de los datos estimados  $P(x|p)$  debe aproximarse a la distribución de los datos observados  $P(x^*)$ . Se usa en problemas de optimización en modelos probabilísticos.

$$J_{\text{KL}}(p) = \sum_i P(x_i^*) \log \frac{P(x_i^*)}{P(x_i(p))} \quad (174)$$

### 3.8.11 Función de penalización con regularización de Tikhonov

En problemas mal condicionados o con un sobreajuste, introduciendo una penalización en la magnitud de los parámetros, ayudando a regularizar las soluciones.

$$J_{\text{Tik}}(p) = \sum_{i=1}^m [x_i^* - x_i(p)]^2 + \lambda |p|^2 \quad (175)$$



### 3.9 Algoritmos de optimización

Los algoritmos de optimización son métodos matemáticos que se emplean para identificar la mejor solución a un problema mediante la maximización o minimización de una función objetivo con ciertas restricciones.

Los principales algoritmos de optimización se pueden clasificar en los siguientes tipos, aunque esta lista no es exhaustiva:

- Métodos basados en gradientes. Estos métodos requieren el cálculo de derivadas de la función objetivo para determinar la dirección óptima de búsqueda. Se aplican principalmente en problemas de optimización continua y diferenciable, como el entrenamiento de redes neuronales, la calibración de modelos numéricos y la optimización de funciones matemáticas complejas. Son rápidos y eficientes cuando la función es convexa, pero pueden quedarse atrapados en mínimos locales en problemas con múltiples óptimos. A continuación, se enumeran algunos métodos basados en gradientes.
  - Descenso por Gradiente (Gradient Descent - GD)
  - Gradiente Descendente Estocástico (SGD - Stochastic Gradient Descent)
  - Descenso por Gradiente con Momento (Momentum-Based GD)
  - Método de Newton
  - Método de Gauss-Newton
  - Método de Levenberg-Marquardt
  - Gradiente Conjugado
  - Optimización Cuasi-Newton (BFGS, L-BFGS)
  - Adam (Adaptive Moment Estimation)
  - RMSprop (Root Mean Square Propagation)
  - Adagrad / Adadelta
- Métodos basados en derivadas parciales aproximadas. Estos métodos se utilizan cuando no es posible calcular el gradiente analíticamente, por lo que se aproximan las

derivadas mediante diferencias finitas o técnicas similares. Son útiles en problemas donde la función objetivo es implícita, como en simulaciones numéricas y análisis de elementos finitos. Sin embargo, pueden ser ineficientes en términos computacionales si la evaluación de la función es costosa. A continuación, se enumeran los principales métodos.

- Método de Diferencias Finitas
- Métodos de Hessiana Aproximada
- Algoritmos heurísticos y metaheurísticos (optimización evolutiva). Estos algoritmos están inspirados en procesos biológicos y físicos, como la selección natural, el comportamiento de enjambres y la evolución de organismos. Se usan en problemas donde no se conoce la forma exacta de la función objetivo o donde los métodos tradicionales no son efectivos. No garantizan encontrar el óptimo global, pero exploran eficientemente el espacio de soluciones. Estos algoritmos no necesitan el cálculo de derivadas y son más adecuados en problemas complejos con múltiples óptimos locales o con funciones objetivo no diferenciables. A continuación, se enumeran los principales métodos.
  - Algoritmos Genéticos (GA - Genetic Algorithms)
  - Estrategias Evolutivas (ES - Evolution Strategies)
  - Programación Evolutiva (EP - Evolutionary Programming)
  - Optimización por Enjambre de Partículas (PSO - Particle Swarm Optimization)
  - Algoritmos de Colonia de Hormigas (ACO - Ant Colony Optimization)
  - Recocido Simulado (SA - Simulated Annealing)
  - Optimización por Evolución Diferencial (DE - Differential Evolution)
  - Sistemas Inmunológicos Artificiales (AIS - Artificial Immune Systems)
  - Optimización por Enjambre Bacterial (BFO - Bacterial Foraging Optimization)
  - Optimización Evolutiva de Arquitecturas de Redes Neuronales (Neuroevolución)

- Algoritmos Genéticos aplicados a Machine Learning (AutoML basado en GA)
- Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) en Deep Learning
- Métodos basados en búsqueda directa (sin gradiente). Estos métodos no requieren el cálculo de derivadas y se basan en la evaluación secuencial de puntos en el espacio de búsqueda. Son útiles cuando la función objetivo es discontinua, ruidosa o difícil de modelar, como en procesos industriales, calibración de modelos geotécnicos y optimización de sistemas físicos reales. Aunque pueden ser efectivos en problemas no diferenciables, suelen ser más lentos en comparación con los métodos basados en gradientes. A continuación, se enumeran los principales métodos.
  - Método Nelder-Mead (Simplex)
  - Método de Powell
  - Búsqueda Aleatoria
- Métodos de programación matemática. Engloban técnicas como la programación lineal, cuadrática y no lineal, utilizadas en problemas con restricciones bien definidas. Estos métodos pueden garantizar la convergencia a la solución óptima bajo ciertas condiciones, pero pueden ser computacionalmente exigentes en problemas de alta dimensión. Su principal aplicación es la optimización de recursos, logística, planificación de infraestructuras y optimización de costos en ingeniería civil. A continuación, se enumeran los principales métodos.
  - Programación Lineal (LP - Linear Programming)
  - Programación Entera y Entera Mixta (ILP, MILP)
  - Programación No Lineal (NLP - Nonlinear Programming)
  - Programación Cuadrática (QP - Quadratic Programming)
  - Programación Dinámica

- Métodos basados en modelos surrogados (optimización con modelos aproximados). Estos métodos construyen una aproximación probabilística de la función objetivo, permitiendo optimizar funciones costosas de evaluar, como simulaciones numéricas complejas. Se aplican en optimización bayesiana, procesos gaussianos y modelos de aprendizaje automático. Son útiles cuando cada evaluación de la función objetivo requiere un alto costo computacional. A continuación, se enumeran los principales métodos.
  - Optimización Bayesiana (BO - Bayesian Optimization)
  - Procesos Gaussianos (GP - Gaussian Processes)
  - Optimización con Modelos de Superficie de Respuesta (Kriging)
  - Optimización basada en Máquinas de Soporte Vectorial (SVM Optimization)
  - Redes Neuronales como Modelos Surrogados
- Métodos híbridos. Los métodos híbridos combinan dos o más enfoques de optimización para mejorar el rendimiento y la precisión. Se utilizan en problemas de optimización complejos, donde un método global (como algoritmos genéticos o PSO) busca una buena solución inicial, y luego un método local (como descenso por gradiente o Levenberg-Marquardt) la refina. A continuación, se enumeran los principales métodos.
  - Combinación de Métodos Deterministas y Evolutivos (GA + Gradient Descent, PSO + Levenberg-Marquardt)
  - Optimización Multiobjetivo (NSGA-II, MOEA/D)
  - Hibridación de Procesos Gaussianos con Métodos Evolutivos
  - Optimización de Hiperparámetros con Modelos Surrogados (AutoML con Bayesian Optimization + GP)

A lo largo de los siguientes apartados se exponen las bases teóricas de los principales algoritmos de optimización considerados en este Trabajo de Fin de Master.

### 3.9.1 Métodos basados en gradientes

Los métodos basados en gradientes utilizan el gradiente de la función objetivo para guiar la búsqueda de soluciones óptimas. Dado que el gradiente representa la dirección de mayor cambio de la función, estos métodos lo emplean para actualizar los parámetros en cada iteración y acercarse progresivamente a un mínimo (o máximo) óptimo.

Para poder aplicar estos métodos, la función objetivo debe ser continua y diferenciable en todo el dominio de búsqueda con el fin de poder calcular las derivadas y ajustar los objetivos adecuadamente. Los métodos basados en gradientes son muy eficaces y convergen rápidamente a la solución óptima cuando la función es suave, con pocos óptimos locales y un número limitado de parámetros.

En el caso de funciones menos suaves, donde existen varios mínimos locales o múltiples parámetros, los métodos basados en gradientes pueden ser inestables o menos eficientes, ya que el gradiente puede llegar a fluctuar de manera abrupta o terminar en objetivos no óptimos.

Por otro lado, estos algoritmos tienen una fuerte dependencia del valor inicial de los parámetros (punto de partida), afectando al rendimiento y eficacia de la solución. Una incorrecta elección del valor inicial puede implicar que el algoritmo se atore en un óptimo local o incrementando el número de iteraciones necesarias.

En términos generales, los métodos basados en gradientes siguen un esquema iterativo definido por:

$$p_{k+1} = p_k + \Delta p_k \quad (176)$$

donde:

$p_k$  representa la estimación de los parámetros en la iteración  $k$ .

$\Delta p_k$  es el incremento de parámetros, calculado a partir del gradiente de la función objetivo.

El procedimiento de actualización puede variar según la estrategia utilizada para determinar  $\Delta p_k$ , lo que da lugar a distintas variantes de métodos de optimización basados en gradientes. En los siguientes apartados se presentarán dos de los enfoques más utilizados en la optimización numérica: el método de Gauss-Newton y el método de Levenberg-Marquardt,

ambos diseñados para mejorar la estabilidad y la eficiencia de estos algoritmos en diferentes contextos de optimización.

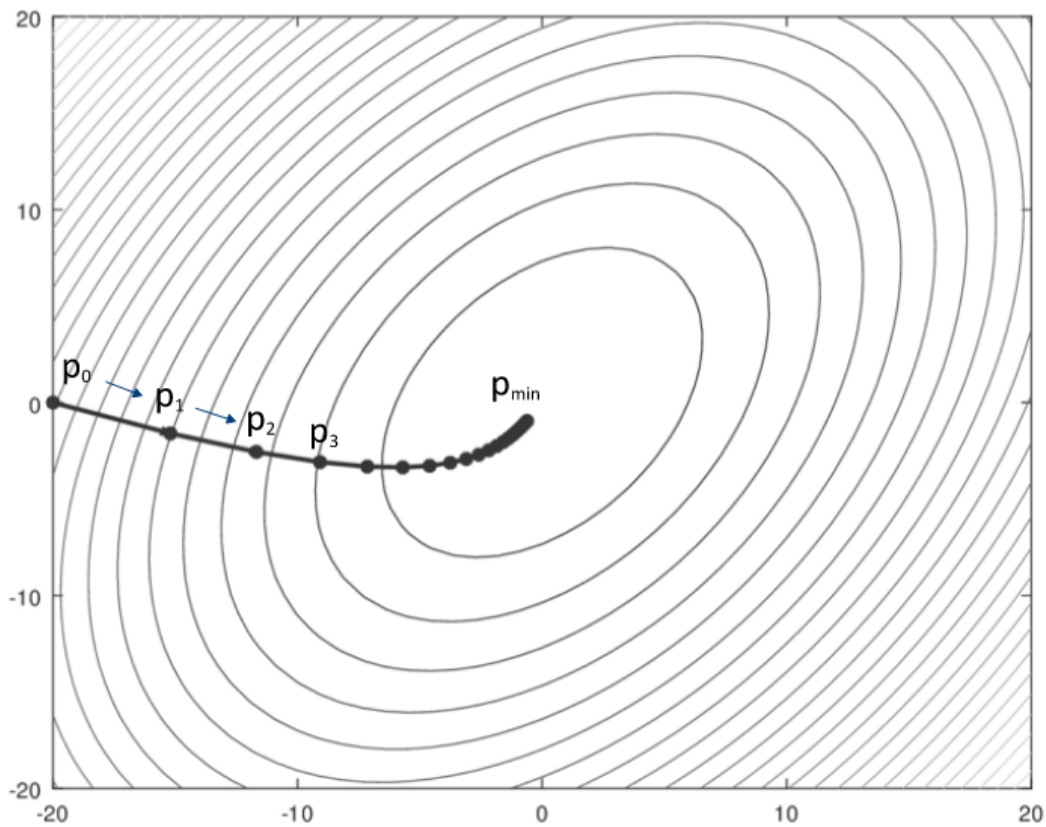


Figura 3-49 – Ejemplo gráfico del gradiente descendente dado el punto inicial  $p_0$  y  $p_{min}$

### 3.9.1.1 Método de Gauss-Newton

El método de Gauss-Newton es una técnica iterativa para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales.

El problema se plantea como la minimización de la función de error cuadrado (véase ecuación (152) de los residuos entre los datos y las ecuaciones no lineales. Para ello, se realiza una aproximación mediante la expansión en serie de Taylor en primer orden, de forma que se pueda usar la teoría de mínimos cuadrados para la obtención de las nuevas estimaciones de los parámetros que avanzan en la dirección en que se minimiza el residuo.

El residual de la observación  $i$  es  $r_i(p) = x_i^* - x_i(p)$  y su vector es  $r(p) = [r_1, \dots, r_m]^T$ , por lo que se tiene  $J(p) = r(p)^T r(p) = \sum_i r_i^2$ . El gradiente y la Hessiana de  $J$  son:

$$\nabla J = -2J^T(p) r(p) \quad (177)$$

$$H = 2J^T J + 2 \sum_i r_i \nabla^2 r_i \quad (178)$$

Donde  $J(p)$  es la matriz Jacobiana con elementos  $J_{ij} = \partial r_i / \partial p_j$ .

El método Gauss-Newton aproxima  $H \approx 2J^T J$ , esta simplificación es aplicable cuando los residuos son despreciables para la estimación del óptimo o las propias derivadas segundas de  $r_i$ .

Igualando el gradiente a cero, la condición de estacionariedad  $J^T r = 0$  da el sistema normal linealizado:

$$J^T(p_k) J(p_k) \Delta p = J^T(p_k) [x^* - x(p_k)] \quad (179)$$

Donde  $\Delta p = p_{k+1} - p_k$  es la corrección de parámetros.

La solución  $\Delta p = [J^T J]^{-1} J^T (x^* - x)$  se aplica iterativamente. En esta forma, la ecuación de Gauss-Newton es:

$$p_{k+1} = p_k + \Delta p_k = p_k - (J^T J)^{-1} J^T (x^* - x(p_k)) \quad (180)$$

Esta fórmula minimiza *en un paso* la suma de cuadrados linealizada en el entorno de  $p_k$ . El procedimiento se repite hasta convergencia, cuando  $|\Delta p|$  o la reducción en  $J$  están por debajo de un criterio aceptable.

Gauss-Newton hereda la rapidez de Newton cerca del óptimo (convergencia cuadrática local si  $J$  es bien comportado) pero sin necesidad de calcular segundas derivadas, ya que utiliza  $J^T J$  como aproximación de la Hessiana. Sin embargo, puede divergir o converger lentamente si la estimación inicial está lejos del mínimo o si  $J^T J$  es mal condicionada. En aplicaciones geotécnicas, se ha utilizado con éxito para identificar parámetros de modelos constitutivos, aunque su rendimiento decae cuando el problema es extremadamente no lineal o los parámetros están acoplados de forma compleja. Ledesma *et al.* (1996) implementaron Gauss-

Newton en un código de retroanálisis geotécnico, destacando su eficiencia, pero también su sensibilidad a valores iniciales y a la presencia de mínimos locales.

### 3.9.1.2 Método de Levenberg-Marquardt

El método de Levenberg-Marquardt (LM), también conocido como método de mínimos cuadrados amortiguados, es una variante híbrida que combina Gauss-Newton con el método de descenso por gradiente para mejorar la robustez de la optimización, a pesar de ser más lento. Este método interpola entre ambos métodos introduciendo un factor de amortiguamiento  $\lambda$  que regula el paso. El sistema de ecuaciones modificado es:

$$(J^T J + \lambda I) \Delta p = J^T (x^* - x) \quad (181)$$

Donde  $\lambda$  es adaptativo, aumenta (para acercarse a gradiente descendente) si un paso no mejora suficientemente  $J$ , o se reduce (aproximando Newton puro) cuando nos acercamos al mínimo. En términos de región de confianza,  $\lambda$  controla el tamaño de paso confiable para la aproximación cuadrática.

El algoritmo de Levenberg-Marquardt es más robusto que Gauss-Newton, debido a que llega a la convergencia incluso con datos de partida muy alejados de mínimo. Valores del factor de amortiguamiento alto facilitan el descenso del gradiente en cada iteración, mientras que un ajuste con valores de  $\lambda$  cercanos a cero mantiene la rapidez del método Gauss-Newton.

Diversos estudios indican que el método Levenberg-Marquardt (LM) es capaz de encontrar soluciones en situaciones donde el método Gauss-Newton falla o se estanca, aunque generalmente requiere un mayor número de iteraciones. Esta diferencia se debe a que LM combina la exploración global con la optimización local: inicialmente actúa con cautela similar al método del gradiente, y posteriormente ajusta rápidamente como el método de Newton.

El algoritmo de Levenberg-Marquardt ha sido utilizado para retroanálisis de parámetros de suelos cuando  $J$  presenta alta no linealidad. Por ejemplo, Chen et al. (1990) aplicaron LM en la calibración de modelos elasto-plásticos obteniendo convergencia estable incluso con parámetros iniciales alejados. De Santos (2015) señala que Levenberg-Marquardt es “más robusto” que Gauss-Newton en problemas con muchos parámetros o datos ruidosos, aunque con un costo computacional mayor. En general, LM es recomendable como mejora del Gauss-



Newton básico, especialmente en la etapa final de convergencia, o como componente de algoritmos híbridos global-local.

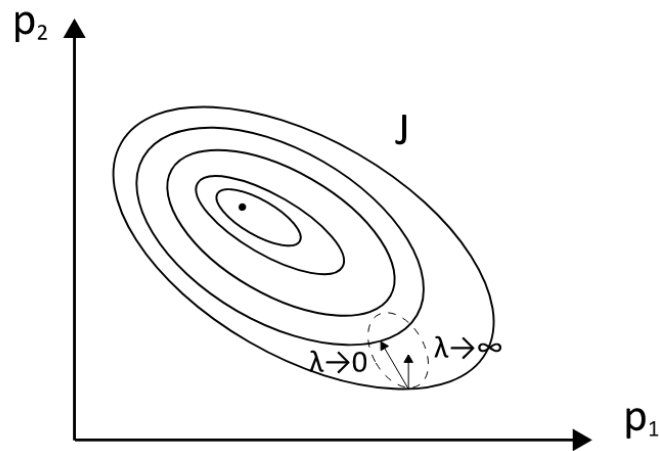


Figura 3-50 – Influencia del factor de amortiguación. Adaptación de De Santos (2015), Figure 3.2.

Marquardt (1963) propuso el siguiente algoritmo para optimizar el coeficiente de amortiguamiento  $\lambda$  a lo largo de proceso de iteración.

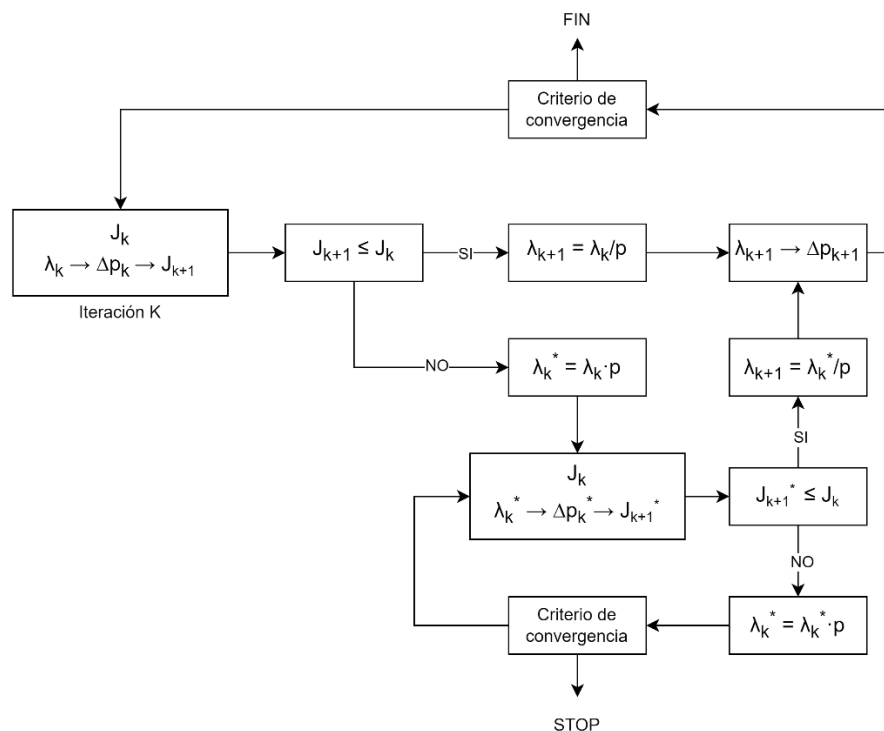


Figura 3-51 – Algoritmo de optimización del factor de amortiguación propuesto por Marquardt (1963). Adaptación de De Santos (2015), Figure 3.3.

### 3.9.2 Algoritmos heurísticos y metaheurísticos

En los casos en que los métodos basados en gradientes pueden ser ineficientes o inadecuados, los algoritmos heurísticos y metaheurísticos pueden ser una de las técnicas de optimización más adecuada.

Basados en procesos naturales y matemáticos, como la selección natural, evolución biológica, el comportamiento de enjambres o el recocido de metales, son aplicables en procesos en que la forma exacta de la función no es conocida y los métodos tradicionales no son adecuados.

A pesar de que estos métodos pueden no encontrar el óptimo global, permiten una exploración del espacio de soluciones bastante eficiente.

Estos algoritmos no requieren el cálculo de derivadas, lo que los hace más apropiados para resolver problemas complejos con múltiples óptimos locales o con funciones objetivo no diferenciables.

A continuación, se desarrollan dos métodos, los algoritmos genéticos y la optimización por enjambre de partículas.

#### 3.9.2.1 Introducción a los algoritmos genéticos

Introducidos por John Holland en el año 1975, son un método de búsqueda heurística basado en la evolución natural.

Esta metodología realiza una búsqueda global de todo el espacio de parámetros usando cálculos similares a la selección natural, cruce genético y mutación, de forma que es capaz de identificar diversas soluciones, candidatas simultáneamente, una población e individuos.

En un GA, cada posible solución se codifica como una cadena de genes que representan los parámetros del problema. Una población inicial evoluciona mediante generaciones (iteraciones) aplicando selección, crossover y mutación. La aptitud de cada individuo se mide según su desempeño en resolver el problema. Los individuos más aptos tienen mayor probabilidad de ser seleccionados para reproducirse, mientras que los menos aptos son descartados. Así, la población mejora gradualmente, similar a la evolución según Darwin.

El Teorema Fundamental de los Algoritmos Genéticos, conocido como el Teorema de los Esquemas de Holland (1975), formaliza esta idea. En esencia, establece que *los esquemas*

*cortos, de orden bajo y con una medida de aptitud superior al promedio proliferan exponencialmente en las sucesivas generaciones.*

Un esquema es un patrón común en algunos cromosomas. El teorema indica que un patrón con alta aptitud aumentará rápido en la población gracias a la selección y recombinación. Los algoritmos genéticos combinan estos patrones para buscar soluciones óptimas. Así, la información genética útil se difunde y combina sin perderse, excepto por mutaciones.

A continuación, se indica la ecuación del Teorema de los Esquemas:

$$m(H, t + 1) \geq m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} (1 - P_m) \left( 1 - P_c \frac{\delta(H)}{l - 1} \right) \quad (182)$$

Donde:

$m(H, t)$  es un número de individuos con el esquema  $H$  en la población en la generación  $t$ .

$f(H)$  es la aptitud promedio de los individuos con el esquema  $H$ .

$\bar{f}$  es la aptitud promedio de toda la población.

$P_m$  es la probabilidad de mutación.

$P_c$  es la probabilidad de cruce.

$l$  es la longitud del cromosoma (cantidad de genes).

$\delta(H)$  es el orden del esquema (cantidad de genes fijos en el esquema  $H$ ).

### 3.9.2.2 Algoritmo genético simple

Los algoritmos genéticos simples se basan en tres operadores principales, selección, cruce y mutación. Mantiene una población de solución y la va mejorando iterativamente mediante procesos basados en la evolución biológica.

En la siguiente figura se muestra la estructura de un algoritmo genético simple.

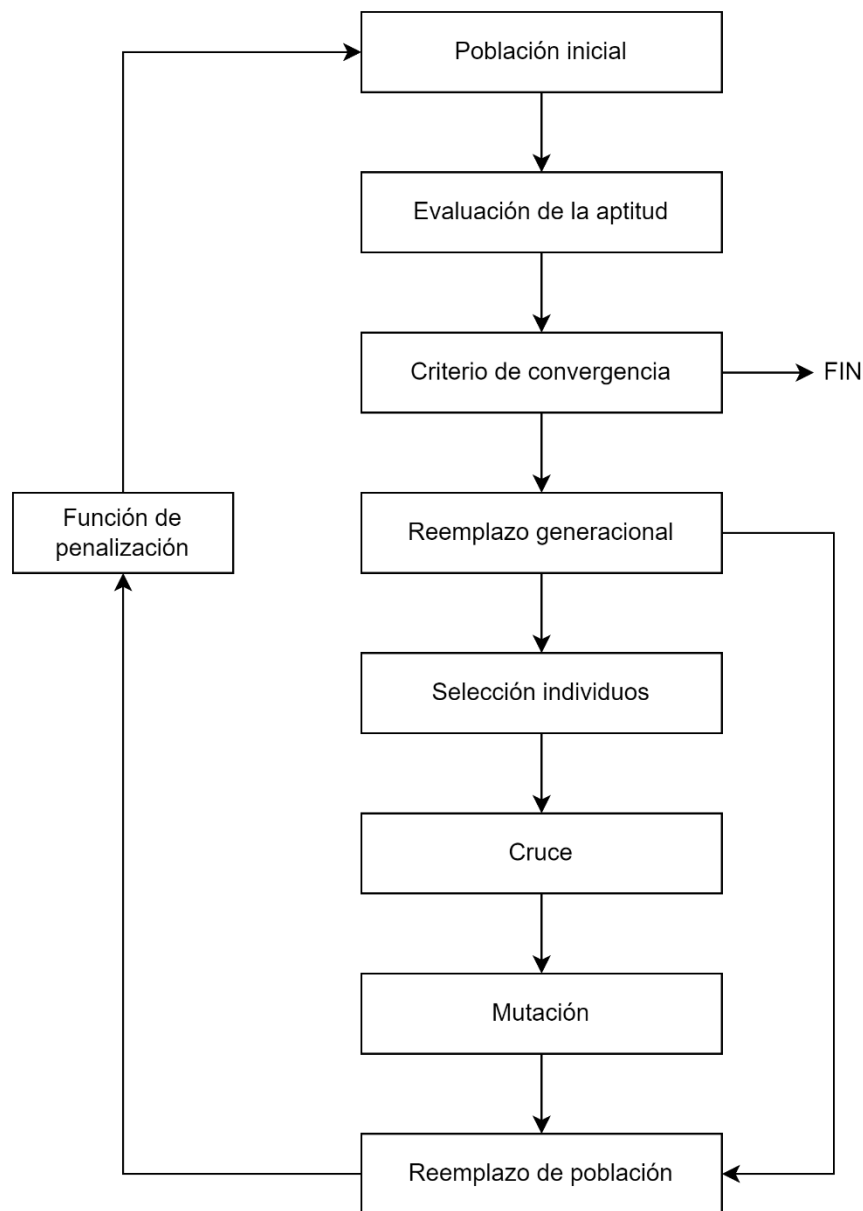


Figura 3-52 – Estructura de algoritmo genético simple. Adaptación de De Santos (2015), Figure 3.5.

El algoritmo genético simple sigue las siguientes fases:

- 1) Se comienza estableciendo una población inicial de tamaño  $N$  de individuos, normalmente de forma aleatoria en el rango de búsqueda acotado a los parámetros. Cada individuo representa una posible solución al problema, codificada típicamente en forma binaria (secuencias de 0s y 1s) o en alguna codificación adecuada (enteros, reales, etc. según el problema).

- 2) Se evalúa la aptitud de cada individuo mediante una función de aptitud que estima la calidad de cada individuo como solución. Por ejemplo, mediante la inversa del valor de la función objetivo  $J(p)$ .

$$f(p) = 1/[1 + J(p)] \quad (183)$$

- 3) El criterio de convergencia determina cuando termina el proceso evolutivo. Dado que estos algoritmos trabajan con poblaciones de soluciones, son necesarios varios parámetros de tolerancia como: número máximo de generaciones, aptitud del mejor individuo, aptitud media de la población, número de nuevos individuos por género.
- 4) El reemplazo generacional indica el porcentaje de la población que es sustituida por la nueva descendencia en cada generación. Por ejemplo, un factor de reemplazo del 100% implica que todos los individuos son sustituidos por nuevos individuos, lo que equivale al modelo clásico generacional puro. Alternativamente, se pueden reemplazar solo una parte de la población, manteniendo los mejores individuos, de forma que no se pierden los genes de los mejores individuos.
- 5) La selección consiste en elegir a los individuos que se reproducirán. Los individuos con mejor aptitud tienen una mayor probabilidad de ser seleccionados. Existen varios métodos de selección, se indican los más destacados a continuación:

- a. Ruleta. Estima la probabilidad de seleccionar a un individuo en una generación ( $t$ ) en función de su aptitud ( $f$ ) con respecto a la aptitud media ( $\bar{f}$ ) de una población con  $N$  individuos.

$$P_{Ruleta}(t) = \frac{f}{N \cdot \bar{f}} \quad (184)$$

- b. Torneo. Se eligen aleatoriamente un número de individuos y se selecciona el que tiene mejor aptitud.
- c. Ranking. Se ordenan las soluciones por aptitud y se otorgan probabilidades de selección.
- 6) La combinación de dos individuos para generar nuevos individuos se denomina cruce. Existen diferentes tipos de cruce, destacándose:
- a. Punto único: se escoge un punto y se intercambian segmentos.

- b. Dos puntos: se intercambian segmentos en dos puntos.
- c. Uniforme: se elige cada bit aleatoriamente de un progenitor.

Ejemplo de un cruce de un punto para una solución binaria de longitud 7, donde se exploran nuevas combinaciones de soluciones de la combinación de los últimos 4 dígitos:

Progenitor 1:	101 <b>1010</b>
Progenitor 2:	011 <b>0011</b>
Descendiente 1:	101 <b>0011</b>
Descendiente 2:	011 <b>1010</b>

- 7) La mutación consiste en la modificación aleatoria de los genes para evitar estancamientos en óptimos locales. Existen varios tipos de mutación:
- a. Mutación de Bit, donde se cambia aleatoriamente un bit: 0→1 o 1→0
  - b. Mutación Gaussiana. Aplicable a valores reales, se añade un ruido aleatorio.

Ejemplo de mutación en un escenario binario:

Original:	101 <b>0</b> 010
Mutado:	101 <b>1</b> 010

- 8) La nueva población está formada por los nuevos descendientes y los individuos seleccionados de acuerdo con el criterio de reemplazo generacional indicado anteriormente.
- 9) En los casos en que existan restricciones en las soluciones, se utiliza la siguiente función de penalización para castigar a los individuos que no cumplan con dichas restricciones, donde  $g_i(p)$  son las restricciones y  $\lambda$  es un coeficiente de penalización.

$$J_{\text{penalizado}}(p) = J(p) + \lambda \sum \max(0, g_i(p)) \quad (185)$$

De acuerdo de Santos (2015), Los Algoritmos Genéticos Simples presentan ciertas limitaciones que pueden afectar su rendimiento en problemas complejos. Su desempeño depende del equilibrio entre explotación (mejorar las soluciones dentro de regiones prometedoras) y exploración (buscar nuevas regiones con soluciones potencialmente mejores). Sin embargo, este equilibrio no siempre es fácil de alcanzar y depende de varios parámetros como el tamaño de la población, el tipo de selección, la probabilidad de cruce  $P_c$  y la probabilidad de mutación  $P_m$ .

### 3.9.2.3 Algoritmo genético adaptativo

Los algoritmos genéticos adaptativos son una variante de los algoritmos genéticos simples, con la principal ventaja que permiten el ajuste dinámico de los parámetros de evolución como la probabilidad de cruce  $P_c$  y la probabilidad de mutación  $P_m$  en función del estado de la población y la etapa del proceso evolutivo.

De acuerdo con de Santos (2015), a este algoritmo se le incorpora una etapa de mutación adaptativa, donde se busque un equilibrio entre exploración de nuevas regiones del espacio de búsqueda y explotación para refinar soluciones dentro de regiones potencialmente óptimas.

En la Figura 3-53 se muestra la estructura del algoritmo genético adaptativo. En los siguientes puntos se desarrollan las nuevas fases que se incorporan al algoritmo con respecto al simple definido en el apartado anterior.

- A. Evaluación de la diversidad poblacional tras la evaluación de la aptitud de los individuos. La diversidad poblacional mide la variabilidad genética que hay en la población con el fin de estimar si el algoritmo necesita más exploración o explotación.
  - i. Diversidad de población estándar. Mide la variabilidad general de los valores de los genes dentro de la población (con  $n$  número de genes). Se basa en la varianza ( $\sigma_j^2$ ) de cada parámetro en los individuos.

$$D_{std} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \quad (186)$$

Cuando  $D_{std}$  es alto, implica que hay grandes diferencias entre los individuos (alta diversidad), en caso de ser bajo, la población ha convergido a soluciones similares.

Alternativamente se puede emplear la diversidad basada en la distancia Euclidiana que mide la variabilidad individual de cada parámetro en la población utilizando la distancia euclidiana entre los valores de los genes de los individuos. Esta alternativa es más precisa en representaciones binarias y codificaciones más complejas, pero tiene un mayor coste computacional.

- ii. Diversidad de población saludable. Es un umbral dinámico que se calcula en función del historial de diversidad de la población durante el proceso evolutivo.

$$D_{sal} = \alpha \cdot D_{max} + (1 - \alpha) \cdot D_{min} \quad (187)$$

Donde:

$D_{max}$  es la máxima diversidad observada en generaciones anteriores.

$D_{min}$  es la mínima diversidad observada en generaciones anteriores.

$\alpha$  es un coeficiente de ponderación entre 0 y 1 que controla cuánto peso se le da a cada valor.

Si la diversidad actual es menor que  $D_{sal}$ , se activa un aumento en la mutación para recuperar diversidad. Cuando la diversidad actual está cerca o por encima de  $D_{sal}$ , el algoritmo mantiene su enfoque en explotación.

- B. Selección adaptativa. De acuerdo con la diversidad de la población, se ajusta la selección considerando un torneo mayor o menor para diversidades bajas y altas, respectivamente.

$$T_{Tamaño}^{Adaptativa} = T_{Tamaño}^{Max} \cdot (1 - D_{std}) \quad (188)$$

- C. Cruce adaptativo. La probabilidad de cruce  $P_c$  se obtiene del ajuste de la función de aptitud del individuo  $f$ . El cruce será más conservador o agresivo para individuos buenos o malos, respectivamente.



$$P_c^{adap} = P_c^{max} \cdot \left( 1 - \frac{f_{mejor} - f_{ind}}{f_{mejor} - f_{promedio}} \right) \quad (189)$$

D. Mutación adaptativa. La probabilidad de mutación  $P_m$  se obtiene del ajuste de la función de aptitud del individuo  $f$ . Si la población es muy homogénea, se obtendrá un incremento en la mutación para recuperar la diversidad, por el contrario, cuando la población es muy diversa, se reduce la mutación para evitar ruido.

$$P_m^{adap} = P_m^{max} \cdot \left( 1 - \frac{f_{mejor} - f_{ind}}{f_{mejor} - f_{promedio}} \right) \quad (190)$$

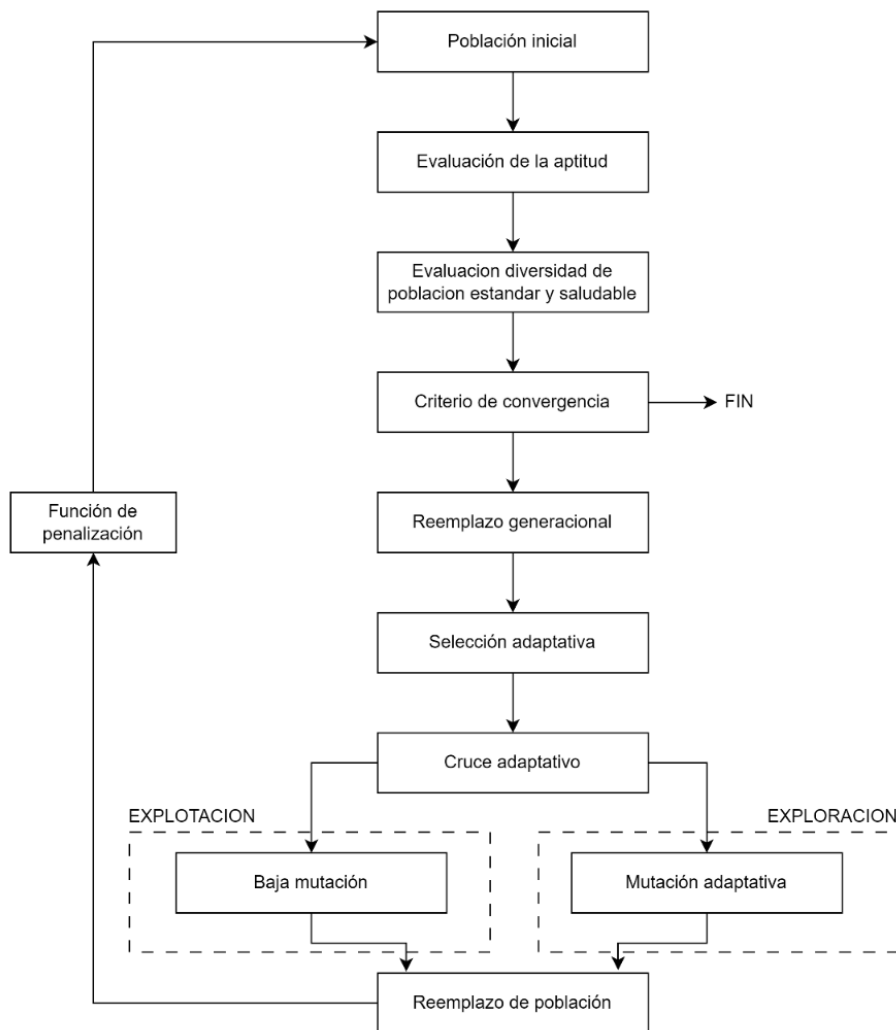


Figura 3-53 – Estructura de algoritmo genético adaptativo. Adaptación de De Santos (2015), Figure 3.13.

### 3.9.2.4 Optimización por enjambre de partículas

La optimización por enjambre de partículas (PSO por sus siglas en inglés), desarrollada por los investigadores Kennedy, Eberhart y Shi (1995), es una técnica metaheurística de algoritmo de optimización basado en la inteligencia colectiva de sistemas biológicos, como el comportamiento de bandadas de pájaros o bancos de peces. Inicialmente fue creado para el desarrollo de modelos de comportamientos sociales, pero se comprobó que también es capaz de resolver problemas de optimización.

Este algoritmo optimiza un problema utilizando una población de soluciones candidatas llamadas "partículas", moviéndolas por el espacio de búsqueda según reglas matemáticas que consideran la posición y velocidad de las partículas. El movimiento de cada partícula se ve influido por su mejor posición local encontrada hasta ese momento y por las mejores posiciones globales halladas por otras partículas en el espacio de búsqueda. El objetivo teórico es hacer que la nube de partículas converja rápidamente hacia las mejores soluciones.

En el siguiente diagrama se puede ver la estructura del algoritmo.

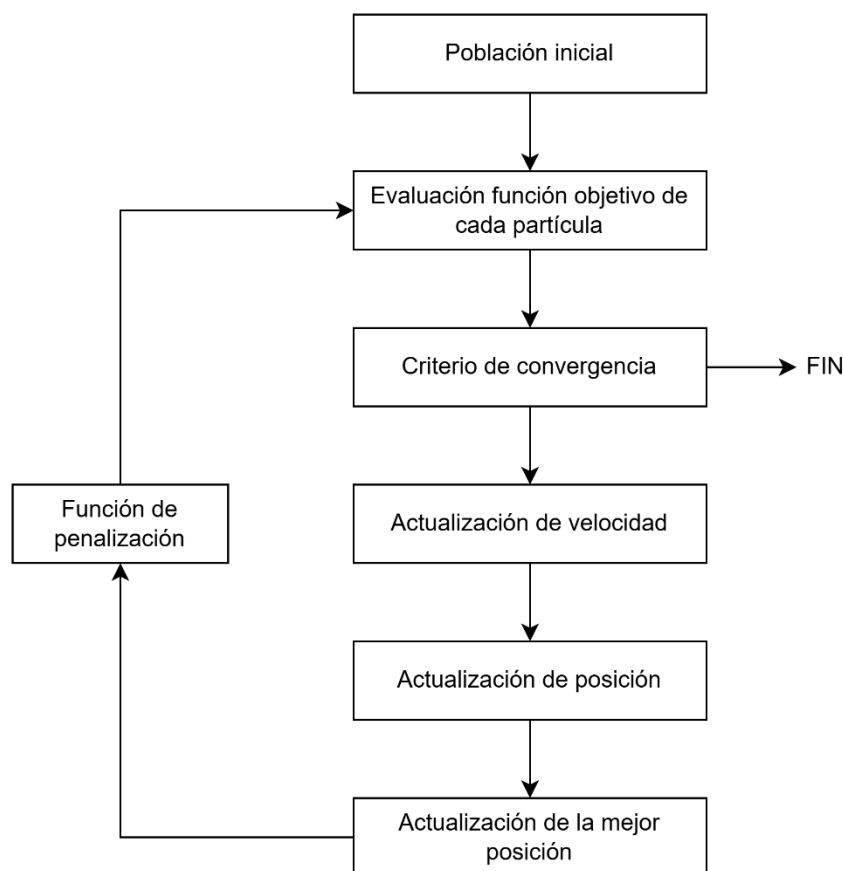


Figura 3-54 – Estructura de algoritmo de optimización por enjambre de partículas PSO

El algoritmo de enjambre de partículas sigue las siguientes fases:

- 1) Se comienza estableciendo una población y velocidad inicial de las soluciones candidatas llamadas "partículas" de tamaño N de individuos, normalmente de forma aleatoria en el rango de búsqueda acotado a los parámetros. Cada partícula representa una posible solución al problema.
- 2) Se evalúa la mejor posición de cada partícula. Nótese que cada partícula es atraída a su mejor posición que ha encontrado en iteraciones anteriores, pero a la vez, también es atraída a la mejor posición que ha encontrado el conjunto de partículas en el espacio de búsqueda.
- 3) El criterio de convergencia determina cuando termina el proceso evolutivo. Dado que estos algoritmos trabajan con poblaciones de soluciones, son necesarios varios parámetros de tolerancia.
- 4) La actualización de la velocidad se realiza con la siguiente ecuación:

$$v_i^{(t+1)} = \omega v_i^{(t)} + c_1 r_1 (p_i - x_i) + c_2 r_2 (g - x_i) \quad (191)$$

Donde:

$\omega \rightarrow$  Factor de inercia, controla la influencia de la velocidad previa y permite que la partícula mantenga su dirección de movimiento. Valores altos y bajos indican que la partícula explora más lejos o cerca, respectivamente.

$c_1$  &  $c_2 \rightarrow$  Coeficientes de aceleración, controlan la atracción hacia  $p_i$  y  $g$ .

$r_1$  &  $r_2 \rightarrow$  Números aleatorios entre  $[0,1]$ , introducen aleatoriedad en el movimiento.

$c_1 r_1 (p_i - x_i) \rightarrow$  Es la parte cognitiva de la ecuación (aprendizaje personal), que hace que la partícula se aproxime a su mejor posición encontrada y fomenta la exploración individual. Valores de  $c_1$  altos implican que las partículas confían más en sus experiencias.

$c_2 r_2 (g - x_i) \rightarrow$  Es la parte social de la ecuación (aprendizaje colectivo), que controla que la partícula se dirija hacia la mejor posición global. Esta componente favorece la colaboración entre partículas. Valores de  $c_2$  altos implican que las partículas siguen más al grupo.

5) La actualización de la posición se realiza con la siguiente ecuación.

$$x_i^{(t+1)} = x_i^{(t)} + v_i^{(t+1)} \quad (192)$$

Donde:

$x \rightarrow$  Es la posición en cada iteración

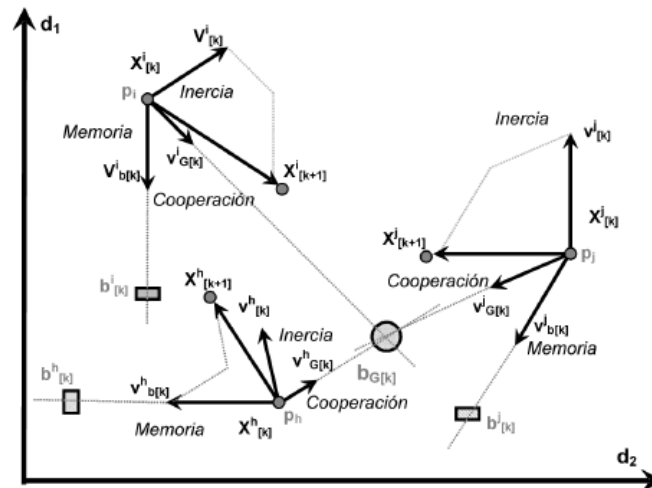


Figura 3-55 – Actualización de posición en enjambre de partículas PSO. Fuente: SANCHEZ CAPARRINI, Fernando. Diagrama del algoritmo PSO. En: PSO: Optimización por Enjambres de Partículas. Universidad de Sevilla, 2025. Disponible en: <https://www.cs.us.es/~fsancho/Blog/posts/PSO.md> [Consulta: 14/03/2025].

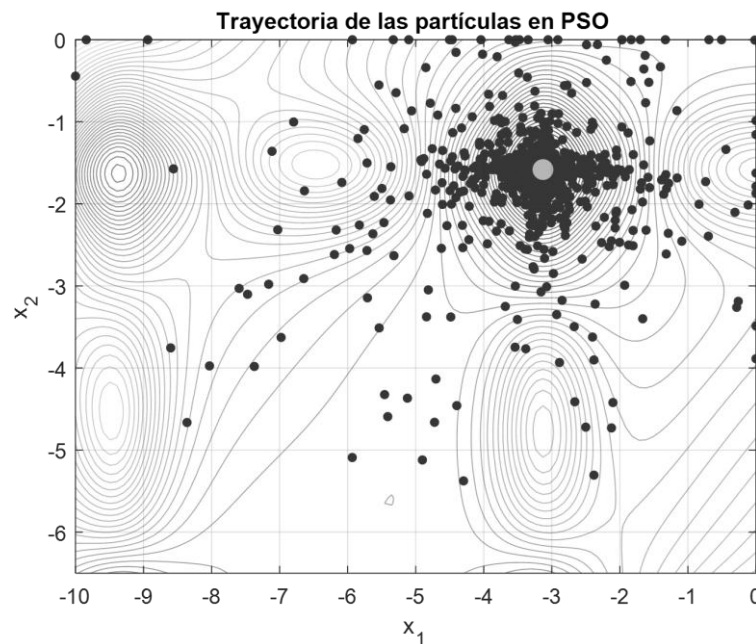


Figura 3-56 – Ejemplo de trayectoria de las partículas en PSO para resolver la función de Mishra Bird para diferentes valores de  $x_1$  y  $x_2$  en la función sobre mapa de soluciones.

### 3.9.3 Método híbrido Global-Local

La combinación de varios métodos se denomina hibridación. Como se ha indicado anteriormente, algunos métodos, como los basados en gradientes, son más eficaces en la estimación final de la solución, pero tienen la desventaja de poder atorarse en mínimo locales en problemas con múltiples óptimos, por otro lado, los métodos heurísticos y metaheurísticos, a pesar de no garantizar encontrar el óptimo global, permiten explorar eficientemente el espacio de soluciones. Esta metodología tiene la ventaja de poder utilizar los puntos fuertes de varios métodos para agilizar el proceso de búsqueda.

En el retroanálisis geotécnico, el método híbrido que más interesa consta de dos etapas: una búsqueda global mediante un algoritmo metaheurístico (algoritmo genéticos o enjambre de partículas) para explorar el espacio de parámetros y encontrar regiones prometedoras cerca del óptimo global, seguida de una búsqueda local refinada en esas regiones para converger con precisión al mínimo, por ejemplo, mediante los métodos de Gauss-Newton, Levengebr-Marquardt o gradiente descendiente. Esta combinación permite reducir las posibilidades de quedar atrapado en óptimos locales durante la búsqueda global, mientras que se emplea un algoritmo con mayor velocidad de convergencia una vez encontrada una buena aproximación. Este esquema se denomina algoritmo memético.

#### 3.9.3.1 Búsqueda global

En la primera etapa, se ejecuta un algoritmo global configurado para priorizar la exploración del espacio. Esto implica típicamente permitir bastantes generaciones o partículas, y criterios de parada relativamente permisivos, de modo que se identifiquen no sólo una sino varias regiones de interés. El resultado de esta etapa es una o varias soluciones de buena calidad global. Por ejemplo, considerando un algoritmo genético, tras  $G_1$  generaciones, el algoritmo entrega como salida el mejor individuo encontrado y quizá otros individuos cercanos en aptitud.

Una práctica común es recoger no solo el óptimo global estimado, sino también los óptimos locales significativos detectados. Por ejemplo, si la población final del algoritmo genético sugiere dos grupos de individuos de aptitud alta en diferentes zonas del espacio de parámetros, se toman representantes de cada grupo. Así, la etapa global mapea el paisaje de la función objetivo, localizando valles prometedores.

En el caso de un algoritmo genético, se puede usar un criterio de parada relativamente temprano si se observa que la población ya se concentró en torno a soluciones buenas. El objetivo es no gastar excesivo tiempo afinando con un algoritmo genético lo que se puede afinar mejor con el método local.

### 3.9.3.2 Búsqueda local

En la segunda etapa, cada solución candidata obtenida de la fase global se utiliza como punto de partida para un algoritmo local de alta eficiencia, por ejemplo, Levenberg-Marquardt o Gauss-Newton. Este algoritmo refinará la solución, aprovechando que está dentro de la cuenca de atracción de un mínimo (idealmente el global). La convergencia local llevará a ajustar los parámetros con mayor precisión que la discreción finita de la población mediante un algoritmo genético, alcanzando rápidamente una reducción adicional del error.

En la implementación de De Santos (2014) para túneles, tras el algoritmo genético global se iniciaba un proceso de Gauss-Newton (con el programa de elementos finitos Plaxis conectado en el bucle) que en pocas iteraciones lograba reducir el error final en un orden de magnitud aceptable. Esta sinergia es potente: el algoritmo genético llevaba la solución a una aproximación con un error del 5%, y luego Gauss-Newton desde el 5% al error deseado, generalmente por debajo del 1%. Si se hubiera usado Gauss-Newton desde el inicio con un punto aleatorio, probablemente habría quedado atrapado lejos del óptimo; si se hubiera seguido con un algoritmo genético puro, requeriría muchas más generaciones para lograr esa precisión sub-1%.

El método híbrido, por tanto, combina eficiencia computacional con amplia exploración. Su desempeño depende de una adecuada interconexión, sabiendo decidir óptimamente cuándo pasar de la etapa 1 a la etapa 2. Si se cambia demasiado pronto, el método local podría llevar a un óptimo local no global. Si se cambia muy tarde, se habrá malgastado tiempo en el algoritmo genético que un método local habría resuelto más rápido. En la práctica, un criterio es pasar cuando la mejora en aptitud del GA se desacelera y la diversidad poblacional ya es baja (señal de que está explotando en una región). En el estudio de De Santos (2015), se definió una cota de error alcanzable por el algoritmo genético, y al llegar a ella, se disparó el refinamiento Newtoniano.

### 3.10 Síntesis del estado del arte

A continuación, se presenta una síntesis ampliada y detallada del estado del arte en el análisis de asientos en cimentaciones superficiales en un medio granular y análisis retrospectivo de parámetros geotécnicos mediante el uso de algoritmos de optimización.

Históricamente, los parámetros geotécnicos han sido estimados mediante métodos empíricos y modelos analíticos tradicionales, cuya precisión y capacidad para adaptarse a condiciones específicas son limitadas. Con la evolución de la geotecnia y la creciente complejidad de las estructuras modernas, han surgido necesidades más rigurosas en la modelación del comportamiento del terreno, impulsando avances significativos en los modelos constitutivos del suelo. Estos modelos han evolucionado desde simplificaciones elásticas lineales hacia formulaciones más complejas que reflejan comportamientos no lineales, dependientes del tiempo o anisotropía, reconociendo explícitamente la heterogeneidad natural del terreno y las limitaciones inherentes a su representación matemática idealizada.

Dentro de los modelos constitutivos, el módulo de elasticidad  $E$  emerge como parámetro esencial para caracterizar la respuesta del suelo ante sollicitaciones externas. Tradicionalmente, el módulo de elasticidad se ha estimado mediante ensayos de laboratorio y correlaciones empíricas derivadas de ensayos in situ como el ensayo de penetración estándar, ensayos de penetración dinámica o presiómetros, aunque estas correlaciones tienen dificultades para reflejar adecuadamente la complejidad y variabilidad real del comportamiento del suelo en condiciones diversas.

A pesar de poderse estimar diferentes módulos de deformación del suelo a partir de la curva tensión-deformación, por ejemplo, utilizando líneas secantes desde el origen hasta un punto determinado de la curva (módulo secante o inicial) o la pendiente en ciclos de descarga y recarga (módulo de recarga), entre otros, la curva tensión-deformación no es lineal, por lo que existen diferentes relaciones o módulos de elasticidad para diferentes fases de carga, lo que complica aún más la obtención de este parámetro mediante correlaciones empíricas.

En los últimos años, investigaciones avanzadas han enfocado sus esfuerzos en mejorar la representación de fenómenos complejos en los modelos constitutivos, como la anisotropía, la respuesta cíclica y dinámica, y efectos multifísicos relacionados con interacciones suelo-agua-temperatura. Modelos como el Modified Cam Clay (MCC), Hardening Soil (HS) o Hardening Soil Small Strain (HSsmall), han permitido representar adecuadamente comportamientos dependientes del esfuerzo y pequeñas deformaciones en suelos cohesivos y blandos. Por otro lado, el modelo Barcelona Basic Model (BBM) destaca en la representación del

comportamiento de suelos parcialmente saturados, especialmente relevante en condiciones variables de humedad.

A pesar de estos avances significativos, aún existen importantes desafíos y necesidades no cubiertas en la modelación constitutiva del terreno. Una de las principales carencias identificadas es la representación de la anisotropía inducida por la deposición natural y compactación del suelo, particularmente en suelos naturales heterogéneos. Asimismo, existe una necesidad de incorporar eficazmente el comportamiento reológico a largo plazo, incluyendo procesos de fluencia y relajación bajo cargas permanentes. Otro aspecto crítico pendiente de resolver es la representación precisa y práctica de procesos multifísicos, como la interacción compleja entre suelo, agua y temperatura, enfrentando aún limitaciones debido al elevado coste computacional y la dificultad para determinar experimentalmente los parámetros asociados.

La distribución de tensiones bajo cimentaciones superficiales constituye otro aspecto fundamental, clásicamente abordado mediante soluciones analíticas como las propuestas por Boussinesq y Westergaard. Estas soluciones, aunque útiles en términos educativos y conceptuales, presuponen condiciones idealizadas que rara vez coinciden exactamente con la realidad práctica de las obras civiles. Por esta razón, el desarrollo de métodos numéricos avanzados, particularmente el método de elementos finitos (FEM), ha proporcionado herramientas capaces de simular distribuciones de tensiones más realistas, considerando adecuadamente la heterogeneidad del terreno, la estratificación y las condiciones de carga complejas. Aunque estos métodos presentan ventajas notables en términos de precisión y flexibilidad, implican también un mayor coste computacional y complejidad en la obtención de parámetros representativos del terreno.

En estrecha relación con la distribución de tensiones se encuentra el cálculo de los asientos en cimentaciones superficiales. La predicción precisa de estos asientos es esencial para garantizar la seguridad estructural y funcionalidad de las obras civiles. Los métodos tradicionales, basados en teorías clásicas de elasticidad o en enfoques empíricos derivados de observaciones directas en obra, a menudo carecen de precisión cuando se enfrentan a condiciones de suelo heterogéneas o escenarios de carga complejos. La integración de técnicas avanzadas de monitoreo en tiempo real y modelos numéricos más robustos ha proporcionado herramientas adicionales para mejorar significativamente la capacidad predictiva respecto a los asientos.

Dentro de estos análisis cobra especial relevancia el módulo de balasto ( $k$ ), definido como la relación entre la presión aplicada sobre una cimentación y el asiento inducido en el terreno.



Este parámetro es crítico para el diseño de estructuras de cimentación como losas. Tradicionalmente, su estimación se basa en ensayos de carga directa o correlaciones empíricas, aunque estos métodos enfrentan limitaciones inherentes en la representación adecuada de la variabilidad espacial del suelo y su comportamiento no lineal. Métodos como el de áreas discretas permiten una representación precisa y práctica del comportamiento del suelo frente a cargas específicas, ofreciendo precisión suficiente para la mayoría de los proyectos convencionales. Sin embargo, para problemas más complejos o sensibles, los modelos basados en elementos finitos son cada vez más empleados debido a su capacidad para representar fenómenos no lineales, estratificaciones complejas y variaciones del nivel freático, a pesar de implicar un mayor esfuerzo computacional.

Frente a estas necesidades y desafíos, el análisis retrospectivo se presenta como una metodología valiosa para calibrar modelos geotécnicos mediante la comparación sistemática entre predicciones del modelo y datos observados en campo. En este proceso, la elección adecuada de la función objetivo es determinante para garantizar una calibración efectiva y significativa del modelo. Funciones clásicas como el error cuadrático medio (MSE) o el coeficiente de determinación ( $R^2$ ) son ampliamente utilizadas; sin embargo, en presencia de mediciones afectadas por ruido o incertidumbre experimental, otras funciones como el error absoluto medio (MAE), funciones robustas como el error absoluto mediano o enfoques probabilísticos como la máxima verosimilitud han demostrado ser más apropiadas. No obstante, persisten carencias metodológicas en la definición de funciones objetivo que manejen adecuadamente la incertidumbre inherente a los datos experimentales, representando una línea clara de desarrollo futuro en la investigación geotécnica.

En paralelo a estos desarrollos metodológicos, los algoritmos de optimización utilizados en geotecnia han evolucionado considerablemente, pasando desde métodos deterministas basados en gradientes, como Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt, hacia técnicas evolutivas y metaheurísticas, tales como Algoritmos Genéticos (GA) o Enjambre de Partículas (PSO). Recientemente, ha surgido un cierto interés en la ventaja que ofrecen métodos híbridos que combinan métodos evolutivos para una fase de búsqueda global, seguidos de una fase de optimización local mediante métodos deterministas como Gauss-Newton. Si bien, las metodologías híbridas ofrecen grandes ventajas para evitar caer en mínimos locales, estas metodologías implican un elevado coste computacional para identificar soluciones óptimas con precisión.

Precisamente en esta confluencia metodológica se posiciona este Trabajo de Final de Máster, cuyo objetivo principal es avanzar en la estimación precisa del módulo de elasticidad mediante el desarrollo de un método híbrido innovador. Este método propone una metodología de estimación global basada en redes neuronales artificiales, seguida por un refinamiento local mediante el método Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt. Esta metodología implicaría una reducción en el coste computacional para llegar a soluciones precisas.

#### 4. DEFINICIÓN DE LA NECESIDAD

El presente Trabajo de Fin de Máster responde a la necesidad de desarrollar metodologías de análisis más precisas, adaptativas y fundamentadas en datos reales (análisis observacional) que permitan optimizar el diseño de cimentaciones superficiales en contextos complejos. Esta necesidad surge de la combinación de factores técnicos, metodológicos, normativos y estratégicos que se detallan a continuación.

##### A. Dificultades en la calibración de modelos geotécnicos

A pesar de los avances en modelación numérica, la calibración de parámetros geotécnicos continúa siendo una de las tareas más críticas y sensibles. Ajustar los modelos a partir de datos reales (asientos, presiones, deformaciones) requiere metodologías capaces de procesar información dispersa, potencialmente ruidosa, y que además mantengan coherencia física con la mecánica del medio continuo. Esta dificultad se acentúa en proyectos donde los requerimientos de precisión son elevados o donde se dispone de datos limitados pero valiosos.

##### B. Emergencia de la inteligencia artificial en ingeniería geotécnica

En los últimos años se ha observado una expansión notable del uso de la inteligencia artificial en el campo de la geotecnia, particularmente para la predicción de parámetros del terreno a partir de datos de campo (*data augmentation*). Algoritmos como las redes neuronales permiten capturar relaciones no lineales complejas y patrones ocultos que resultan inaccesibles a través de métodos empíricos tradicionales. Sin embargo, estos modelos carecen frecuentemente de control físico y no garantizan la validez mecánica de las estimaciones, lo que limita su aplicación directa en el diseño estructural.

##### C. Necesidad de enfoques híbridos: búsqueda global + ajuste físico

Para superar las limitaciones anteriores, se requiere una metodología híbrida que combine la capacidad predictiva de la inteligencia artificial con herramientas de ajuste físico de alta precisión. La presente tesis propone un enfoque que emplea modelos de Machine Learning como fase de búsqueda global, seguidos por un ajuste fino mediante métodos de optimización local. Esta combinación garantiza que los resultados no solo se ajusten a los datos observados, sino que también respeten las leyes fundamentales del comportamiento mecánico del suelo.

Además, esta estructura modular ofrece la posibilidad de adaptarse a diferentes tipos de cimentaciones y condiciones del terreno, aportando flexibilidad y robustez al procedimiento.

#### D. Exigencias de aplicabilidad práctica y validación

La ingeniería geotécnica moderna no puede limitarse a modelos teóricos sofisticados: exige soluciones aplicables, replicables y validadas en condiciones reales. La integración de datos provenientes de instrumentación moderna y sistemas de monitoreo en tiempo real en el proceso de diseño amplía significativamente la capacidad adaptativa frente a condiciones de carga cambiantes, contribuyendo a reducir los márgenes de incertidumbre durante la vida útil de la infraestructura. La metodología propuesta permite su implementación progresiva en la práctica profesional, especialmente en proyectos con datos de auscultación, donde puede aprovecharse para mejorar decisiones de diseño o control de calidad.

#### E. Reconocimiento normativo del enfoque observacional

Una de las justificaciones más sólidas para el uso de análisis retrospectivo e instrumentación es su reconocimiento en normativas de alto nivel. La norma EN 1997-1:2024 (Diseño geotécnico) ya contemplaba en su Sección 4 y 10 el uso del Enfoque Observacional (Observational Method) como una opción válida en situaciones donde las condiciones del terreno no se conocen con precisión suficiente, siempre que se establezca un plan de acción adaptativo y se cuente con un sistema de monitoreo fiable.

Más recientemente, con la revisión de la EN 1990:2023, se afianza esta visión integradora entre diseño y evaluación en servicio. El documento reconoce expresamente el uso de datos de comportamiento real (monitorización) en el diseño y evaluación estructural y geotécnica, incluyendo su aplicación en estructuras existentes, cimentaciones y estructuras sometidas a condiciones variables.

Este enfoque también ha sido reforzado por esfuerzos internacionales como la actualización del CIRIA R185 Observational Method Guidance (Project P3295), que proporciona recomendaciones prácticas para la aplicación moderna del Enfoque Observacional, consolidando su papel como estrategia fiable y respaldada por la comunidad técnica.

Este reconocimiento normativo abre la puerta al ajuste racional de los coeficientes de seguridad, siempre y cuando se utilicen métodos de control y análisis validados. En efecto,

aunque los Eurocódigos no proporcionan una reducción explícita y generalizada de coeficientes de seguridad por el uso de instrumentación, permiten su ajuste en función del nivel de conocimiento del terreno, la calidad del control y la fiabilidad de los métodos de cálculo. Así, en casos donde se aplica un enfoque observacional bien planificado y respaldado por datos fiables, puede adoptarse un nivel de seguridad parcial más favorable, lo que implica beneficios tanto económicos como técnicos.

#### F. Evolución normativa y necesidad de adaptación

La evolución reciente del Eurocódigo 7, en particular la actualización del EN 1997-3, refuerza la necesidad de adoptar metodologías de diseño geotécnico más integradas, adaptativas y basadas en datos. Esta nueva versión (2025) introduce una visión más holística del diseño de estructuras de contención, promoviendo una integración más profunda entre la interacción suelo-estructura, los modelos específicos del terreno y los estados límite tanto últimos (ULS) como de servicio (SLS).

Se otorga especial importancia a aspectos como la gestión del nivel freático, los efectos del cambio climático, el modelado numérico avanzado, y, especialmente, la instrumentación y durabilidad, exigiendo la incorporación de planes de inspección y medidas de sostenibilidad desde las primeras fases del diseño.

En este marco normativo emergente, la propuesta de este Trabajo de Final de Máster (que integra inteligencia artificial, modelado físico y análisis retrospectivo basado en observaciones) se sitúa en consonancia con las directrices de los nuevos Eurocódigos. La necesidad de modelos que no solo se adapten al comportamiento observado en campo, sino que también optimicen los recursos, promuevan la transparencia documental y favorezcan una toma de decisiones informada en condiciones complejas, se alinea directamente con las exigencias del EN 1997-3.

#### G. Contribución a la sostenibilidad y alineación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)

La metodología propuesta en este Trabajo de Final de Máster no solo responde a la necesidad técnica de mejorar la precisión y eficiencia en la estimación de parámetros geotécnicos, sino que también se alinea con los principios de sostenibilidad que rigen la ingeniería del siglo XXI.

En concreto, se articula con varios de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) establecidos por la Agenda 2030 de Naciones Unidas, especialmente en lo relativo a la innovación, la eficiencia en el uso de recursos, la resiliencia de las infraestructuras y la mitigación del impacto ambiental de los proyectos de ingeniería civil.

Alineación con ODS específicos:

- ODS 9: Industria, innovación e infraestructura. El desarrollo de un método híbrido que combina inteligencia artificial con fundamentos físicos para estimar parámetros geotécnicos representa una clara apuesta por la innovación tecnológica aplicada a la infraestructura. Este tipo de avances permite diseñar obras más seguras, inteligentes y adaptadas al comportamiento real del terreno, incrementando su resiliencia frente a eventos inesperados o condiciones extremas.
- ODS 11: Ciudades y comunidades sostenibles. Al mejorar la predicción de asentos y optimizar el diseño de cimentaciones, la metodología contribuye a la construcción de infraestructuras urbanas más duraderas, estables y adaptadas al entorno. Esto reduce la necesidad de intervenciones correctivas, minimiza disrupciones urbanas y favorece entornos urbanos más sostenibles.
- ODS 12: Producción y consumo responsables. El enfoque de análisis retrospectivo basado en datos reales y optimización permite ajustar los diseños a condiciones verificadas, evitando sobreestimaciones de seguridad y, por tanto, el uso innecesario de materiales. Esta racionalización del diseño contribuye directamente a una utilización más eficiente de recursos como acero, hormigón y energía en las obras.
- ODS 13: Acción por el clima. La mejora de la eficiencia estructural y la reducción del sobredimensionamiento tienen un efecto indirecto en la huella de carbono de los proyectos geotécnicos. Optimizar el uso de materiales y reducir los trabajos de corrección en obra disminuyen las emisiones asociadas al ciclo de vida de la infraestructura.

La estrategia de sostenibilidad implícita en este Trabajo de Final de Máster aborda la sostenibilidad en tres dimensiones:

- Ambiental: mediante la reducción del consumo de recursos y emisiones asociadas a sobredimensionamiento y rediseños evitables.

- Económica: al permitir diseños más eficientes, ajustados a condiciones reales, lo que se traduce en ahorros de materiales, tiempo y costes asociados al ciclo de vida de las infraestructuras.
- Social: al aumentar la fiabilidad de las obras geotécnicas, se incrementa la seguridad para los usuarios y comunidades cercanas, y se favorece una mejor gestión del riesgo geotécnico.

En resumen, esta tesis se sitúa en la intersección entre el avance tecnológico, la evolución normativa y los principios de sostenibilidad que configuran la nueva ingeniería geotécnica. Su contribución no solo reside en la mejora de los procedimientos analíticos, sino en la apertura hacia un diseño más flexible, informado y conectado con la realidad de campo.

## 5. METODOLOGÍA

En este capítulo se expone la metodología desarrollada para la estimación del módulo de elasticidad del terreno mediante análisis retrospectivo (*backanalysis*), utilizando datos de monitorización de asientos y presiones bajo cimentaciones superficiales.

La estrategia metodológica se organiza en un algoritmo estructurado en un bucle de cinco fases sucesivas, tal como se muestra en la Figura 5-57. Cada una de estas etapas se describe en detalle en el apartado 5.1, donde se expone el flujo completo del proceso, desde la caracterización inicial del terreno hasta la validación de los parámetros retrocalculados en diferentes fases del proyecto.

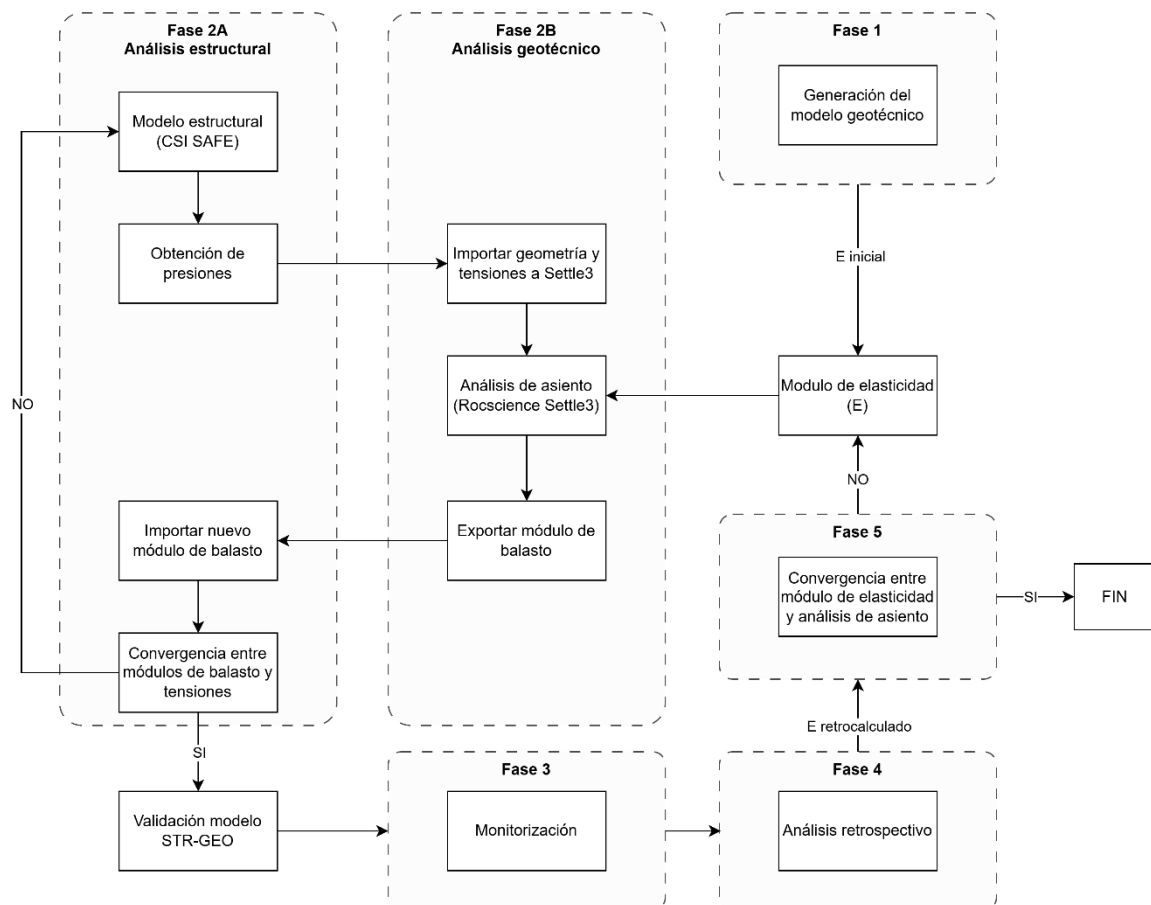


Figura 5-57 – Estructura de algoritmo de análisis retrospectivo

El proceso del análisis retrospectivo se basa en un enfoque de optimización híbrido Global-Local. En la fase de búsqueda global se emplean modelos de *Machine Learning* con capacidad



de generalización, mientras que en la búsqueda local se recurre a algoritmos clásicos de optimización no lineal, como Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt, que permiten afinar la solución con mayor precisión.

Con el objetivo de evaluar el rendimiento del algoritmo híbrido (principal contribución de este Trabajo de Fin de Máster) y, en particular, de validar la función objetivo, se ha llevado a cabo una comparación con diversos algoritmos de optimización ampliamente utilizadas en la literatura. Estos algoritmos se enumeran en el apartado 5.2.

## 5.1 Metodología de análisis retrospectivo

La estimación del módulo de elasticidad del terreno a partir de ensayos de campo y laboratorio presenta un desafío significativo en el cálculo de asientos y esfuerzos en cimentaciones superficiales. En este contexto, se propone una metodología basada en el análisis retrospectivo que permite ajustar los valores del módulo de elasticidad del suelo mediante la comparación entre los resultados de cálculo inicial y los datos obtenidos a partir de la monitorización en obra.

La estrategia desarrollada integra herramientas de *Machine Learning*, algoritmos de optimización híbrida y modelos numéricos de cálculo geotécnico y estructural, lo que permite mejorar progresivamente la caracterización del terreno conforme avanza la ejecución del proyecto. Este enfoque iterativo busca no solo retrocalcular parámetros con mayor fidelidad, sino también generar un marco metodológico aplicable a distintas fases de obra, dotando de mayor robustez al diseño y control de las cimentaciones previo a su puesta en servicio.

La estrategia metodológica que forma el algoritmo de análisis retrospectivo se estructura en un bucle formado por cinco fases sucesivas, como se puede ver en la Figura 5-57.

### 5.1.1 Fase 1 – Creación del modelo de terreno inicial

Para la creación del modelo inicial del terreno se propone el uso de campañas geotécnicas convencionales, complementadas mediante técnicas de expansión de datos (*data augmentation*) que permitan enriquecer el conjunto de información disponible. Esta ampliación de datos puede realizarse a partir de correlaciones empíricas reconocidas en la literatura, resultados de campañas anteriores, conocimiento geológico y geotécnico de la zona

de estudio, así como parámetros derivados de mediciones históricas y otras fuentes complementarias disponibles durante la etapa de caracterización.

Una vez generado este conjunto de datos enriquecido, se emplean algoritmos de *Machine Learning*, en particular redes neuronales artificiales, para construir un modelo predictivo del comportamiento del terreno. Este modelo híbrido permite integrar el conocimiento empírico y estadístico con los datos obtenidos in situ, ofreciendo una caracterización inicial del terreno más robusta y adaptable que la basada exclusivamente en métodos tradicionales.

Este modelo inicial adquiere una gran relevancia, ya que constituye el punto de partida del análisis retrospectivo en fases posteriores. En este contexto, se utiliza como base para la búsqueda global dentro del algoritmo de optimización híbrido, que será posteriormente refinada mediante técnicas de optimización local. Un modelo inicial mejor calibrado puede reducir significativamente el coste computacional y mejorar la eficiencia del proceso de ajuste.

Asimismo, se recomienda disponer de un conjunto de datos independientes, que no se hayan empleado durante el entrenamiento del modelo de *Machine Learning*, para su uso en la evaluación de precisión y capacidad predictiva, con el objetivo de validar su desempeño de forma objetiva.

### **5.1.2 Fase 2 – Análisis estructural y geotécnico**

Se propone la aplicación de esta metodología en el diseño de una cimentación directa. Para ello, se realizan dos modelos de cálculo usando los programas CSI SAFE y Rocscience Settle3D, que corresponden, de acuerdo con la Figura 5-57, a la fase 2A análisis estructural y fase 2B análisis geotécnico, respectivamente. En el programa Rocscience Settle3D se adopta una distribución de tensiones de acuerdo con la teoría de Bousinesq y se limita el análisis al asiento instantáneo, ignorándose asientos de consolidación dada la naturaleza granular del medio.

CSI SAFE es un programa de diseño estructural que utiliza como único input del terreno el módulo de balasto. Por otro lado, Rocscience Settle3D es un programa de análisis de asientos que permite indicar varios datos de entrada diferenciando si es necesario realizar un cálculo de asiento instantáneo o de consolidación (primaria y secundaria). En este caso, al limitarse la aplicación de esta metodología al estudio de terreno granulares y asientos instantáneos, a parte de la presión ejercida por la cimentación (magnitud, forma y rigidez), los parámetros geotécnicos de entrada usados en Settle3D son:

- Peso específico aparente
- Peso específico saturado
- Coeficiente de Poisson
- Módulo elástico secante  $E_s$  y de descarga  $E_u$ . Véase la Figura 3-8 para mayor aclaración de los módulos de deformación utilizados en el programa Rocscience Settle3D.

A partir de la parametrización del terreno obtenida en la fase 1, se construye el modelo geotécnico en Settle3D, mediante el cual se calcula un valor inicial del módulo de balasto. Este valor se transfiere posteriormente al modelo estructural en CSI SAFE. Ambos programas permiten una interconexión iterativa: las presiones transmitidas al terreno, calculadas en SAFE, se utilizan como entrada en Settle3D para estimar los asientos, y a su vez, los asientos obtenidos se emplean para actualizar el módulo de balasto en SAFE. Este proceso iterativo está representado esquemáticamente en el diagrama de la Figura 3-48.

El módulo de balasto considera una variación espacial conforme al método de áreas discretas descrito en el apartado 3.6.3.2. La discretización espacial de los valores del módulo de balasto considerados en cada zona se realiza mediante el proceso iterativo indicado previamente, buscándose la convergencia de presiones, asiento y módulo de balasto en las diferentes subdivisiones de la cimentación.

Esta subdivisión permite una representación más precisa de cómo el suelo responde a las cargas aplicadas, mejorando la exactitud del análisis estructural y variación espacial de los asientos y presiones de contacto.

Una vez generado el modelo estructural, se obtienen los esfuerzos de diseño, presiones transmitidas al terreno y asientos finales estimados, entre otros.

### 5.1.3 Fase 3 – Monitorización

Durante las diferentes fases de ejecución de la estructura y su puesta en carga, se realiza la monitorización mediante sensores de última generación (IoT – *Internet of Things*) capaces de proporcionar datos en tiempo real.

Es necesario disponer de registros de monitorización de los asientos (en varios puntos de la superficie y a diferentes profundidades) y presión transmitida al terreno. Una posible

propuesta de instrumentación estaría compuesta por puntos de control topográfico, galgas extensométricas, celdas de carga e inclinómetros.

Estos sensores ayudarían no solo en el análisis retrospectivo, también en la identificación de anomalías o patrones que puedan indicar riesgos. Por otro lado, también servirían en la creación de gemelos digitales que facilitarían la toma de decisiones durante el mantenimiento y futuras construcciones.

#### 5.1.4 Fase 4 – Análisis retrospectivo (búsqueda local)

El proceso del análisis retrospectivo se basa en un enfoque de optimización híbrido Global-Local.

La fase de búsqueda global se realiza en la fase 1 a través de algoritmos de *Machine Learning*, en particular redes neuronales artificiales, que permiten una búsqueda global de los módulos de elasticidad en los diferentes estratos.

En la búsqueda local se recurre a algoritmos clásicos de optimización no lineal basados en gradientes, más concretamente, Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt, que permiten afinar la solución con mayor precisión.

Los métodos basados en gradientes requieren el cálculo de derivadas de la función objetivo para determinar la dirección óptima de búsqueda.

Tanto Gauss-Newton como Levenberg-Marquardt son algoritmos de ajuste no lineal que, en su forma clásica, requiere una función objetivo basada en residuos:

$$r_i(x) = f_i(x) - y_i^{obs} \quad (193)$$

Donde  $f_i(x)$  es la salida del modelo (asiento calculado) y  $y_i^{obs}$  es el valor medido.

También es necesaria una matriz jacobiana de los residuos respecto a los parámetros de entrada:

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \quad (194)$$

No obstante, al emplearse los programas CSI SAFE y Rocscience Settle3D, no se dispone de una función objetivo y, por tanto, sus derivadas. Esto implica una adaptación práctica de la metodología mediante la estimación numérica de las derivadas, aproximando la matriz jacobiana numéricamente usando diferencias finitas haciendo pequeñas perturbaciones  $h$  sobre cada parámetro  $x_j$ .

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x_j + h) - f_i(x_j)}{h} \quad (195)$$

Se aplica el algoritmo Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt, con la Jacobiana aproximada y los residuos, para obtener una nueva estimación de los parámetros. El proceso se repite iterativamente hasta alcanzar la convergencia, entendida como la condición en la que el cambio relativo entre iteraciones consecutivas en los parámetros estimados o en el valor de la función objetivo (error) es menor que un umbral predefinido.

Este umbral se establece con base en criterios de sensibilidad numérica y precisión práctica: por un lado, debe ser lo suficientemente bajo como para garantizar que los parámetros convergen a una solución estable y no a una oscilación numérica; por otro, no debe ser excesivamente estricto, para evitar un número innecesario de iteraciones que apenas mejoren el ajuste. En este trabajo, el valor del umbral se ha fijado empíricamente tras observar la estabilización del error y la variación marginal de los parámetros, asegurando así un equilibrio entre precisión y eficiencia computacional.

### 5.1.5 Fase 5 – Convergencia del módulo de elasticidad

A medida que avanza la ejecución de la estructura y se producen las distintas etapas de carga, los datos obtenidos a través de la monitorización son evaluados de forma continua. Con base en esta información actualizada, se repite el análisis retrospectivo del módulo de elasticidad, adaptándolo a las condiciones reales observadas en cada fase constructiva.

Este proceso iterativo permite verificar la consistencia y robustez de los parámetros recalculados, al contrastarlos en diferentes momentos del desarrollo de la obra. De este modo, se refuerza la fiabilidad del modelo geotécnico empleado y se mejora progresivamente la calibración del comportamiento del terreno.

## **5.2 Algoritmos empleados en el análisis comparativo**

En este apartado se enumeran los diferentes algoritmos de optimización que se han empleado a modo de comparación con la metodología expuesta anteriormente.

### **5.2.1 Basados en gradientes**

- Gauss-Newton
- Levenberg-Marquardt
- Multistart con Levenberg-Marquardt
- Multistart con Gauss-Newton
- Cuasi-Newton BFGS

### **5.2.2 Heurísticos y metaheurísticos - Evolutivos**

- Genéticos Simples
- Genéticos Adaptativos
- Enjambre de partículas - PSO
- Evolución Diferencial (DE)
- Recocido simulado (SA)

### **5.2.3 Búsqueda Directa**

- Nelder-Mead (Simplex) → Pattern Search o Direct Search

### **5.2.4 Surrogados**

- Optimización Bayesiana (BO)
- Procesos Gaussianos (GP)
- Modelos de superficie de respuesta - Kriging

### 5.2.5 Basados en programación matemática

- SQP (Sequential Quadratic Programming) - Programación cuadrática
- Programación No Lineal (NLP - Nonlinear Programming)

### 5.2.6 Otros

- Optimización robusta
- Optimización distribuidamente robusta

### 5.2.7 Híbridos

Cada método usa un algoritmo de búsqueda global combinado con una búsqueda local mediante Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt.

- Genético simple con GN o LN
- Genético Adaptativo con GN o LN
- PSO con GN o LN
- Evolución Diferencias (DE) con GN o LN
- Recocido simulado (SA) con GN o LN
- BO con GN o LN
- GP con GN o LN
- Kriging con GN o LN
- CMA-ES con GN o LN → Estrategias evolutivas
- Cuckoo Search con GN o LM
- Grey Wolf Optimizer + GN o LM
- Shuffled Complex Evolution (SCE) + GN o LM
- NSGA-II Multiobjetivo + GN o LM
- SPEA2 Multiobjetivo + GN o LM

## 6. CASO DE ESTUDIO

El objetivo del presente capítulo es presentar los casos de estudio sobre los que se realizará una comparación del coste computacional para llegar a un error dado y desviación de los módulos de elasticidad obtenidos del análisis inverso y asientos retrocálculos medidos en varios puntos clave que se obtienen mediante la metodología expuesta en el apartado 5.1 y los algoritmos de optimización enumerados en el apartado 5.2.

La metodología propuesta se pone en práctica en dos casos de estudio. Uno de ellos sintético, donde se conocen los datos y facilita el análisis comparativo de los treinta y dos algoritmos de optimización frente al algoritmo propuesto en este trabajo. El segundo caso de estudio consta de los datos de monitorización de un proyecto real, pero con ciertas limitaciones en la información disponible. En el caso real tan solo se aplica el algoritmo propuesto en este trabajo y los principales algoritmos de optimización híbridos.

### 6.1 Caso de estudio sintético

El caso de estudio sintético se ilustra en la Figura 6-58. Se considera una cimentación superficial de ancho  $B$  y largo  $L$  que ejerce una presión  $q$  constante en toda la superficie. La cimentación se apoya en la superficie del terreno, sin empotramiento. Se asume un medio granular, con asiento elástico (sin asiento de consolidación), formado por 4 estratos con módulo elástico  $E_{s,i}$ , de espesor  $H_i$ , homogéneos, elásticos e isotrópicos.

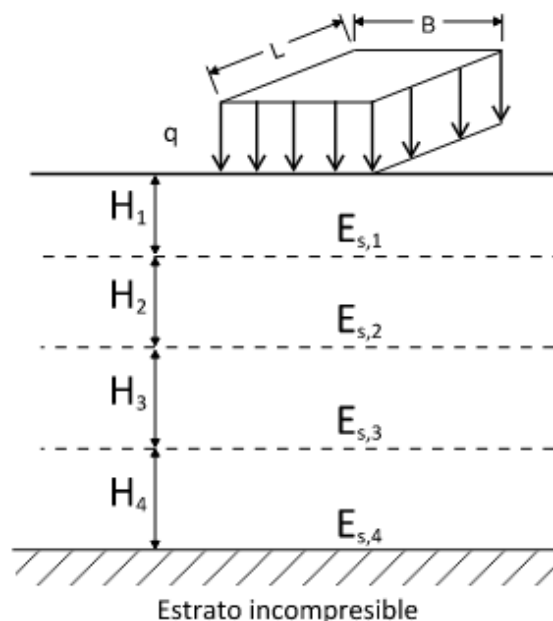


Figura 6-58 – Caso de estudio sintético



Tabla 6-4 – Valores base adoptados en el caso de estudio

Parámetro	Valor
q	150.0 kN/m <sup>2</sup>
L	2.50 m
B	1.75 m
H <sub>1</sub>	2.00 m
H <sub>2</sub>	5.50 m
H <sub>3</sub>	7.50 m
H <sub>4</sub>	15.00 m
E <sub>s1</sub>	12.5 MPa
E <sub>s2</sub>	20.0 MPa
E <sub>s3</sub>	25.0 MPa
E <sub>s4</sub>	35.0 MPa

No se considera nivel freático en este caso de estudio y, por tanto, variaciones del módulo de elasticidad debida a este.

Se consideran los datos de monitorización del asiento de la cimentación en 8 puntos ubicados a varias profundidades en el centro de la cimentación. Estos datos han sido derivados del cálculo del asiento considerando los valores del módulo de elasticidad objetivo  $E_{si}$  indicados en la Tabla 6-4.

Con el objetivo de validar la robustez del modelo predictivo frente a la incertidumbre asociada a mediciones reales, se ha introducido un ruido sintético a los datos generados numéricamente. Esta práctica permite simular condiciones de campo más realistas al considerar errores de medición similares a los que se presentan con instrumentación geotécnica.

El enfoque seguido en la introducción del ruido se fundamenta en la modelización del error como una variable aleatoria de distribución normal, con medida cero y desviación estándar  $\sigma$ , según se ha planteado en diversos estudios sobre instrumentación y retroanálisis, como los de Ledesma (1987, 1996), donde se analizan los errores en mediciones con inclinómetros y otros sensores. Esta estrategia representa adecuadamente errores aleatorios (tipo ruido blanco) sin introducir sesgo sistemático, lo cual es esencial para evaluar la fidelidad de un modelo predictivo ante datos afectados por incertidumbre.

La formulación general adoptada para la perturbación de las mediciones es la siguiente:

$$\tilde{s}_i = s_i + \epsilon_i \quad \text{con} \quad \epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2) \quad (196)$$

Donde:

- $\tilde{s}_i$  es el valor de asiento simulado con ruido en la profundidad  $z_i$
- $s_i$  es el valor de asiento original (sin ruido)
- $\epsilon_i$  es una perturbación aleatoria
- $\sigma_i$  es la desviación estándar del error en la profundidad  $z_i$

Se ha considerado que el error de medición es independiente para cada profundidad, y que la desviación estándar del error crece ligeramente con la profundidad, para reflejar posibles acumulaciones de incertidumbre en sistemas extensométricos multipunto. El modelo adoptado para  $\sigma_i$  es:

$$\sigma_i = \sigma_0 + k \cdot z_i \quad (197)$$

Donde:

- $\sigma_0$  es igual a 0.05mm y representa la desviación estándar mínima
- $k$  es igual a 0.01 mm/m y representa el incremento lineal del error con la profundidad  $z_i$ .

Los asientos sintéticos se generaron en distintos niveles de profundidad: 0.0, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0, 10.0 y 20.0 m. A cada uno de ellos se le sumó una perturbación aleatoria generada con la distribución descrita anteriormente. La generación de estos valores se realizó utilizando la función `np.random.normal` de Python, con media cero y desviación estándar  $\sigma_i$  en cada caso.

Este procedimiento permitió obtener el siguiente conjunto de datos con y sin ruido incorporado, que imita el comportamiento de mediciones reales afectadas por error experimental. Este conjunto se ha utilizado como base para evaluar el desempeño del modelo predictivo en condiciones más cercanas a las de campo, comprobando su sensibilidad ante variaciones no sistemáticas en los datos de entrada.

Tabla 6-5 – Asientos teóricos con y sin ruido

Profundidad (m)	Asiento teórico s (mm)	Asiento con ruido s ruido (mm)
0.0	23.53	23.31

Tabla 6-5 – Asientos teóricos con y sin ruido

Profundidad (m)	Asiento teórico s (mm)	Asiento con ruido s ruido (mm)
0.5	17.60	17.81
1.0	12.52	12.59
2.0	6.19	5.80
3.0	4.02	3.85
5.0	2.14	2.72
10.0	0.72	0.33
20.0	0.15	0.10

En la siguiente figura se ilustran los datos de monitorización para ambos casos, con y sin ruido.

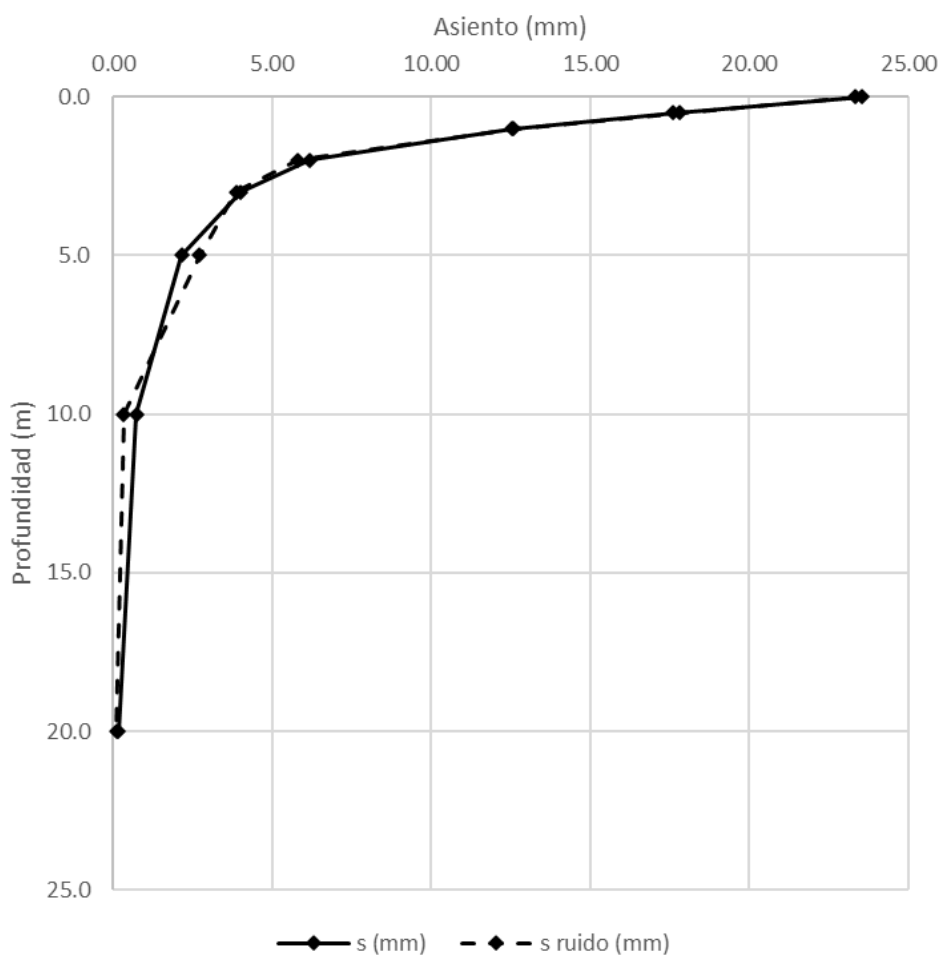


Figura 6-59 – Asiento teórico con y sin ruido

Para la aplicación del modelo de *Machine Learning* se consideran los valores del número de golpes del ensayo SPT que se presentan en la Figura 6-60, donde se muestra el resultado de campo y corregido frente a la profundidad. El perfil obtenido muestra una variación progresiva, con golpes más bajos en superficie y un incremento moderado en profundidad.

La estratigrafía adoptada asume que el terreno está formado por una arena limosa hasta los 15m de profundidad, seguida de una arena limpia hasta el fondo del sondeo.

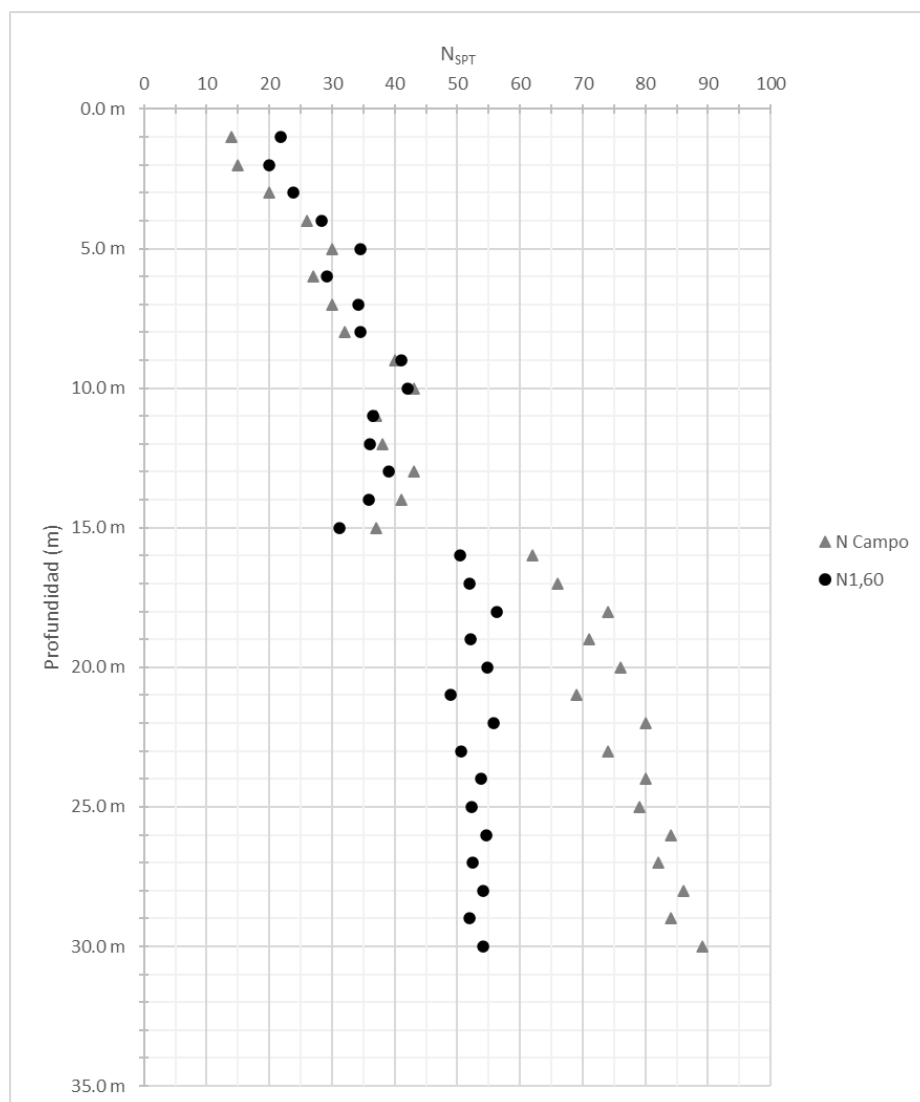


Figura 6-60 – Resultados ensayo SPT de campo y corregidos ( $N_{1,60}$ )

## 6.2 Caso de estudio real

El presente caso de estudio se basa en la instrumentación y análisis de la losa de cimentación de un edificio de gran altura. La cimentación consiste en una losa maciza de hormigón armado como se puede ver en la Figura 6-61, cuya geometría en planta se muestra en la Figura 6-62.

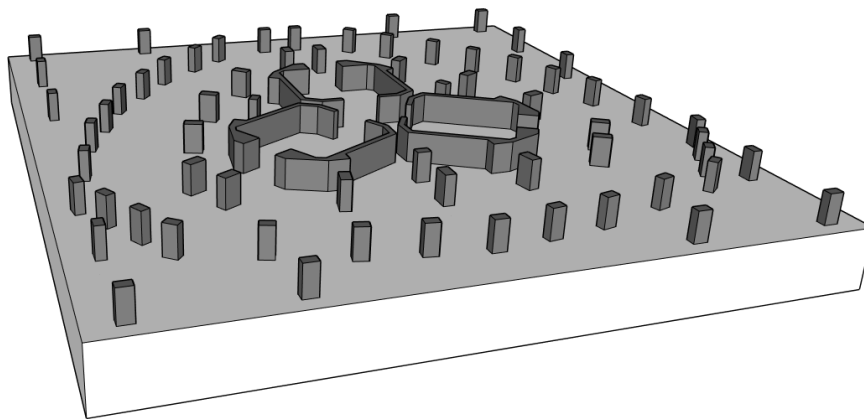


Figura 6-61 – Caso de estudio real. Losa de cimentación de edificio de gran altura. Vista 3D

La losa presenta unas dimensiones de 45 m de ancho ( $B$ ) y 47 m de largo ( $L$ ), y transmite al terreno una presión de contacto aproximadamente uniforme  $q$ , la cual varía a lo largo del tiempo conforme avanza el proceso constructivo. El sistema de monitorización implementado permite el seguimiento del comportamiento en servicio de la cimentación, concretamente mediante la medición de asientos verticales.

Se dispone de registros de asiento en 16 puntos ubicados sobre la superficie superior de la losa, todos ellos a nivel de cimentación. No obstante, no se cuenta con información de monitorización en profundidad ni sobre la respuesta del terreno en capas subyacentes. Asimismo, las mediciones comenzaron una vez alcanzada una tensión media de contacto de aproximadamente 125 KPa, por lo que se ha estimado la deformación acumulada durante la primera fase de carga. Adicionalmente, la ubicación exacta de cada punto de medición no está documentada, lo que obliga a realizar una hipótesis simplificada sobre la distribución espacial de los asientos: se asume que el punto de asiento máximo se localiza en el centro geométrico de la losa, mientras que el asiento mínimo corresponde a una de las esquinas. Esta aproximación, si bien no reproduce fielmente la distribución real, permite definir un gradiente de deformación compatible con el análisis retrospectivo planteado. En la Figura 6-63 se ilustran los registros monitorizados.

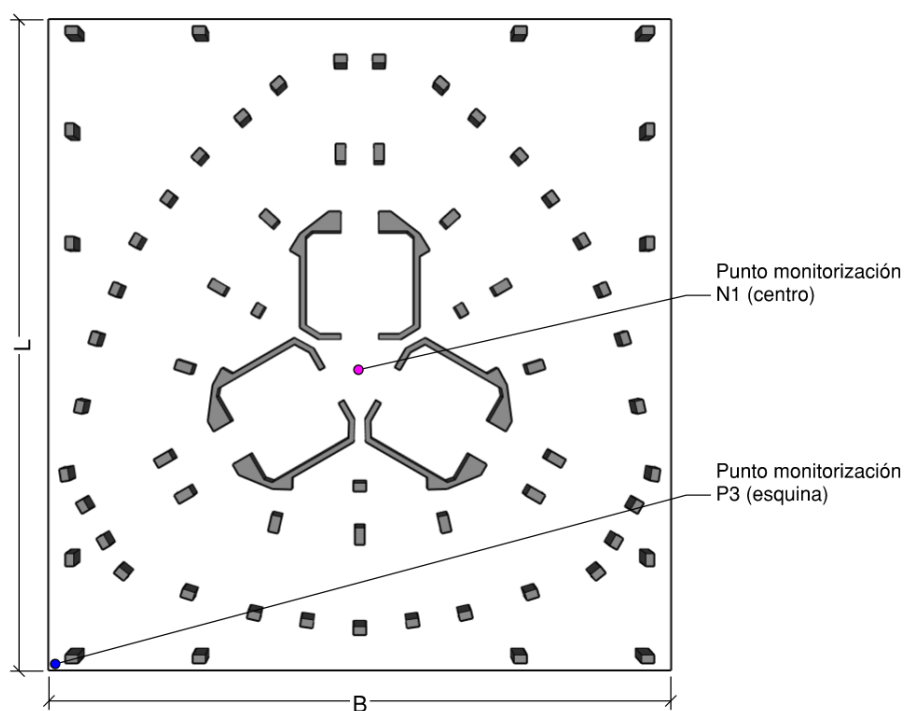


Figura 6-62 – Caso de estudio real. Losa de cimentación de edificio de gran altura. Planta.

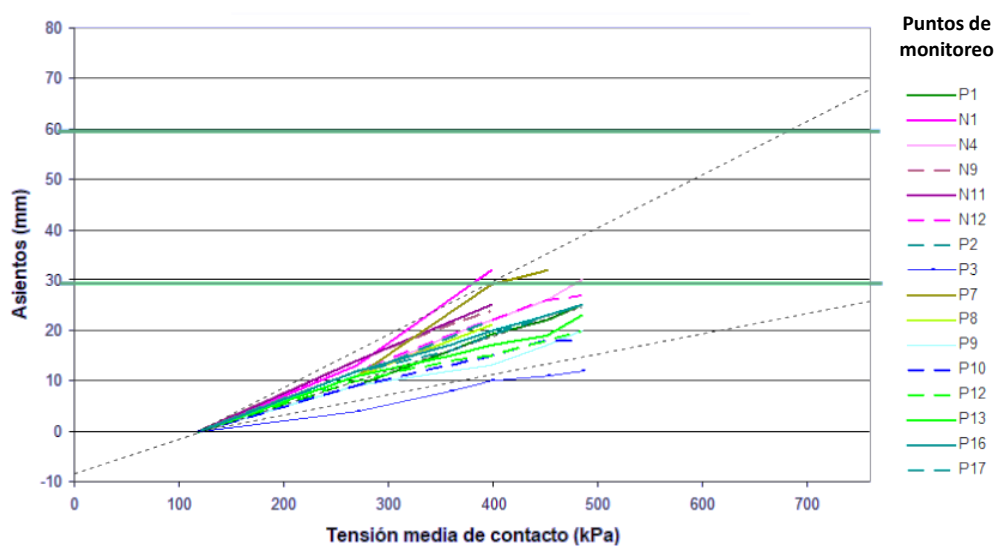


Figura 6-63 – Caso de estudio real. Evolución asiento en función de la tensión media de contacto

En la Figura 6-64 se presentan los datos de monitorización que serán empleados en el análisis retrospectivo, asumiendo que el asiento de mayor magnitud corresponde al centro geométrico de la losa, mientras que el de menor magnitud se localiza en la esquina inferior izquierda.

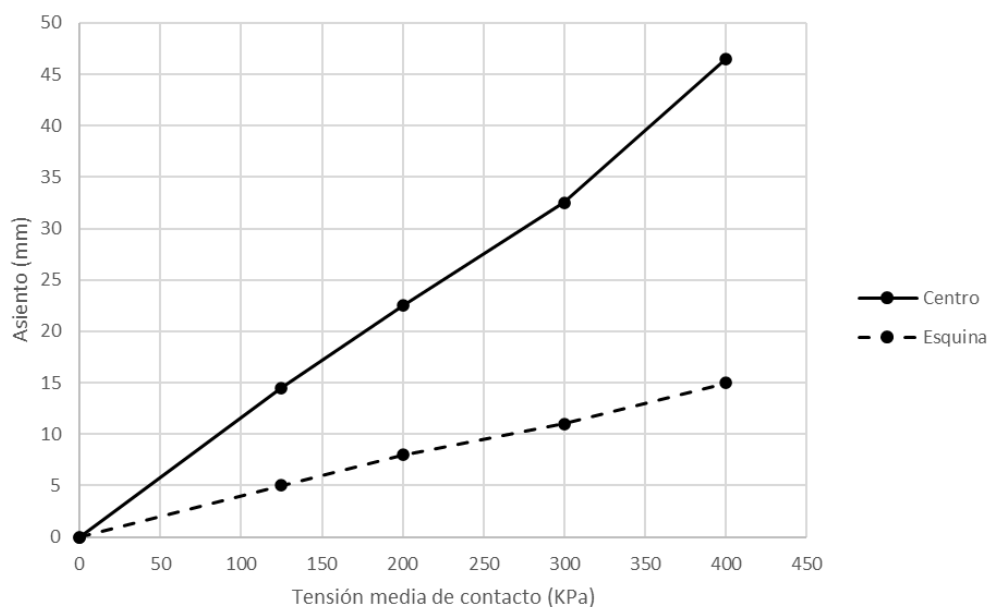


Figura 6-64 – Caso de estudio real. Evolución asiento en función de la tensión media de contacto adoptados en el análisis retrospectivo

Los valores numéricos asociados a cada punto se recogen en la Tabla 6-6. Cabe señalar que dichos valores han sido estimados de forma aproximada a partir de la Figura 6-63, mediante interpretación visual, por lo que deben considerarse como una adaptación orientativa del comportamiento observado dada la limitación de la información disponible para realizar este trabajo.

Presión (KPa)	Centro (mm)	Esquina (mm)
0.0	0.00	0.00
125.0	14.50	5.00
200.0	22.50	8.00
300.0	32.50	11.00
400.0	46.50	15.00

Para la generación del modelo de *Machine Learning* se dispone de 18 ensayos presiométricos realizados a diferentes profundidades, los cuales se han corregido para estimar el módulo de elasticidad  $E$  como se ilustra en la Figura 6-65. El perfil obtenido muestra un incremento progresivo con la profundidad. Esta información se empleará como base del algoritmo de aprendizaje automático.

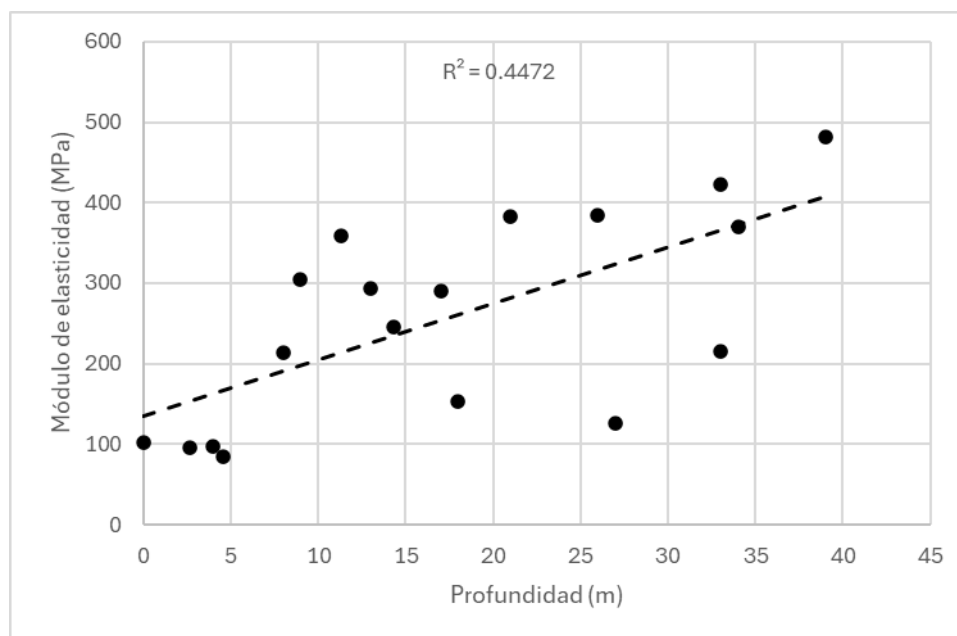


Figura 6-65 – Módulo elasticidad obtenido de ensayos presiométricos



## 7. RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos tras la aplicación de la metodología de análisis retrospectivo desarrollada en este trabajo.

En el caso de estudio sintético, la finalidad principal es evaluar la capacidad del algoritmo propuesto para estimar de forma precisa los módulos de elasticidad de los dos primeros estratos del terreno a partir de los datos de monitorización de asientos en distintas profundidades, tal y como están presentados en el capítulo 6.1. Se analizan tanto los resultados del caso sintético en condiciones ideales como los obtenidos al aplicar errores introducidos deliberadamente en los asientos teóricos emulando mediciones ruidosas. El algoritmo propuesto se compara con los treinta y dos algoritmos de optimización indicados en el apartado 5.2.

De igual forma, en el caso de estudio real, se realiza un análisis comparativo de la capacidad de precisión y coste computacional del algoritmo propuesto frente a los algoritmos híbridos que mejor resultado han obtenido en el caso de estudio sintético.

La comparación entre los asientos generados por el modelo ajustado y los datos de referencia permite cuantificar el grado de ajuste y la eficacia de los algoritmos de optimización empleados, tanto en su fase global como local.

Los resultados se organizan en tablas y gráficas para facilitar su interpretación, y se acompañan de un análisis técnico que anticipa las conclusiones discutidas en el capítulo siguiente.

### 7.1 Métricas empleadas

Las métricas empleadas para valorar la capacidad de cada método son las siguientes:

- Número de iteraciones necesarias para alcanzar una tolerancia de error igual a  $10^{-5}$  en el asiento en superficie calculado con los módulos de elasticidad retrocalculados. Esta métrica permite cuantificar el coste computacional de cada método y su eficiencia en el proceso de convergencia, estableciendo un equilibrio entre precisión y coste computacional.
- Recorrido por el mapa de soluciones de los diferentes valores de los parámetros objetivo (por ejemplo,  $E_1$  e  $E_2$  en el caso de estudio sintético) en cada iteración en función del error cuadrático normalizado. En el caso de estudio sintético, se representa gráficamente la trayectoria seguida por el algoritmo de optimización sobre un mapa de

isolíneas del error cuadrático normalizado, calculado entre los módulos de elasticidad teóricos y los retrocalculados. Esta visualización permite evaluar la eficiencia del método no solo en términos de convergencia, sino también en cuanto a su capacidad para explorar zonas del espacio de soluciones con mejor ajuste. Un desplazamiento directo y rápido hacia zonas de bajo error sugiere una estrategia de búsqueda eficiente, mientras que trayectorias erráticas o estancadas pueden indicar problemas de sensibilidad, dependencia del punto inicial o sobreajuste local.

- Error de predicción de los módulos de deformación retrocalculados respecto a los teóricos. Esta comparación permite valorar la precisión del ajuste obtenido, para ello se utilizan:
  - Error cuadrático medio (RMSE, por sus siglas en inglés): permite medir la magnitud promedio de los errores de predicción, penalizando más los errores grandes. Es una métrica robusta y ampliamente utilizada para validar modelos numéricos.
  - Coeficiente de determinación ( $R^2$ ): mide el grado de correlación entre los módulos de elasticidad calculados y los teóricos. Un valor cercano a 1 indica un buen ajuste del modelo.
- Error de predicción de los asientos respecto a los datos de monitorización: se evalúa la desviación entre los asientos teóricos calculados, a partir de los módulos de deformación retrocalculados, y los asientos registrados en obra. Esta comparación permite valorar la precisión del ajuste obtenido y la capacidad del modelo de estimar los potenciales asientos en futuras fases. Como en el caso anterior, se emplea:
  - Error cuadrático medio (RMSE, por sus siglas en inglés): permite medir la magnitud promedio de los errores de predicción, penalizando más los errores grandes.
  - Coeficiente de determinación ( $R^2$ ): mide el grado de correlación entre los asientos calculados y los observados. Un valor cercano a 1 indica un buen ajuste del modelo.

Adicionalmente, con el objetivo de dotar de transparencia al modelo de ajuste empleado en el análisis retrospectivo del módulo de elasticidad, en el caso de estudio sintético se ha

incorporado una técnica de interpretabilidad del tipo XAI (*Explainable Artificial Intelligence*), concretamente el método SHAP (*SHapley Additive exPlanations*).

SHAP se fundamenta en la teoría de juegos cooperativos, y en particular en el concepto de valores de *Shapley*. En este contexto, cada variable de entrada del modelo se interpreta como un “jugador” cuya aportación marginal al resultado final (la predicción del asiento) puede cuantificarse. El algoritmo SHAP traduce esta lógica al ámbito de la modelización predictiva, asignando a cada entrada un valor numérico que refleja su contribución individual a la predicción realizada por el modelo. De este modo, es posible descomponer la respuesta global del modelo en una suma de efectos atribuibles a cada variable.

En el contexto del análisis inverso propuesto, SHAP permite interpretar el papel que desempeña cada parámetro de entrada ( $E_1$ ,  $E_2$ , etc.) en la estimación final del asiento superficial retrocalculado. Este análisis es especialmente útil en un entorno tipo *caja negra*, donde la función de ajuste no es explícita ni derivada analíticamente, como ocurre cuando el modelo está gobernado por relaciones numéricas o empíricas integradas en un software de simulación.

Las ventajas específicas del uso de SHAP en este trabajo son:

- Identificación de variables clave: permite determinar cuáles de los módulos de elasticidad tienen mayor peso en la predicción, lo que puede relacionarse con la profundidad o rigidez relativa de los estratos.
- Coherencia geotécnica: facilita la validación cualitativa del modelo, al verificar si las variables más influyentes coinciden con los conocimientos teóricos (por ejemplo, mayor sensibilidad del asiento superficial respecto a los módulos de capas someras).
- Robustez interpretativa: proporciona una base para analizar si el modelo está capturando correctamente las interacciones entre parámetros, o si existen posibles falsas correlaciones que puedan inducir a conclusiones incorrectas.
- Aplicabilidad iterativa: al repetir el proceso en distintas fases constructivas, SHAP puede evidenciar cómo cambia la sensibilidad del modelo respecto a cada variable conforme se acumulan nuevos datos de monitorización.

## 7.2 Resultados numéricos de los algoritmos de optimización

### 7.2.1 Caso de estudio sintético

A continuación, se presentan los resultados numéricos obtenidos tras la aplicación de los diferentes algoritmos de optimización considerados en este trabajo. Cada algoritmo se analiza según las métricas definidas en el apartado anterior 7.1, con el objetivo de comparar su eficacia, precisión y coste computacional en la estimación de los módulos de elasticidad  $E_1$  &  $E_2$ .

Para realizar una evaluación rigurosa, se analizan el caso de estudio expuesto en el apartado 6.1, diferenciándose un caso ideal (sin ruido añadido a los asientos de referencia) y, el segundo, considerando mediciones con ruido moderado añadido deliberadamente para simular incertidumbres realistas que aporten un mayor valor a este caso sintético. Los asientos monitorizados con y sin ruido se encuentra en la Tabla 6-5.

En primer lugar, en la Tabla 7-7 se presentan los resultados obtenidos por cada algoritmo indicado en el apartado 5.2, junto a la propuesta metodológica indicada en el apartado 5.1 (Modelo híbrido de *Machine Learning* con Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt) en la predicción de los módulos de elasticidad  $E_1$  &  $E_2$  para el caso sintético sin ruido. Posteriormente, en la Tabla 7-8 se muestran estos mismos resultados, pero considerando la presencia de ruido en las mediciones de referencia.

En ambas tablas se incluyen los siguientes parámetros para una mejor valoración comparativa:

- Número de iteraciones necesarias para alcanzar un error igual a  $10^{-5}$  en el asiento en superficie calculado a partir de los módulos de elasticidad retrocalculados. Este indicador permite evaluar el coste computacional y la eficacia de convergencia de cada algoritmo.
- Valores retrocalculados de los módulos de elasticidad  $E_1$  &  $E_2$ , obtenidos por cada método, permitiendo valorar la precisión del proceso de optimización.
- Error cuadrático medio (RMSE) y coeficiente de determinación ( $R^2$ ) de los módulos retrocalculados respecto a los módulos teóricos utilizados como referencia. Estas métricas proporcionan una visión cuantitativa del grado de ajuste del modelo numérico respecto a la solución esperada.

Finalmente, en la Tabla 7-9 se presentan el error cuadrático medio (RMSE) y el coeficiente de determinación ( $R^2$ ) obtenidos al comparar los asientos estimados mediante los módulos de

elasticidad retrocalculados con los asientos observados (con y sin ruido). Esto permite evaluar, además de la exactitud en la estimación de parámetros geotécnicos, la capacidad predictiva real del modelo.

Tabla 7-7 – Número de iteraciones y error de predicción del módulo de elasticidad  $E_1$  &  $E_2$  derivados de mediciones sin ruido

Algoritmo	Iteraciones	$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	RMSE (KPa)	$R^2$
Gauss-Newton (GN)	11	12.500	20.062	44.1	1.000
Levenberg-Marquardt (LM)	14	12.500	20.000	0.1	1.000
Multistart con LM	13	12.500	20.002	1.6	1.000
Multistart con GN	11	12.499	20.014	10.0	1.000
Cuasi-Newton BFGS	45	12.936	18.026	1429.8	0.855
Genéticos Simples	54	11.714	26.792	4834.4	-0.662
Genéticos Adaptativos	57	12.413	18.796	853.3	0.948
Enjambre de partículas - PSO	59	12.500	20.000	0.2	1.000
Evolución Diferencial (DE)	119	12.497	20.048	34.2	1.000
Recocido simulado (SA)	250	12.411	19.442	399.6	0.989
Nelder-Mead (Simplex)	302	12.500	20.000	0.3	1.000
Optimización Bayesiana (BO)	200	11.287	28.953	6388.6	-1.902
Procesos Gaussianos (GP)	300	12.090	19.873	303.4	0.993
Kriging	300	12.156	20.162	268.5	0.995
Programación cuadrática (SQP)	45	12.936	18.026	1429.8	0.855
Programación No Lineal (NLP)	50	12.647	19.174	593.1	0.975
Optimización robusta	59	12.512	20.089	63.5	1.000
Optimización distribuidamente robusta	45	12.557	19.779	161.5	0.998
Genético simple + GN o LM	10+4	12.500	20.241	170.3	0.998
Genético Adaptativo + GN o LM	10+11	12.500	20.002	1.6	1.000
PSO + GN o LM	10+7	12.500	20.002	1.6	1.000
Evolución Diferencial + GN o LM	10+10	12.500	20.002	1.6	1.000
Recocido simulado + GN o LM	10+9	12.500	20.002	1.6	1.000
BO + GN o LM	20+18	12.501	19.980	14.3	1.000
GP + GN o LM	10+10	12.501	19.969	22.2	1.000
Kriging + GN o LM	10+10	12.500	20.010	7.1	1.000
CMA-ES + GN o LM	10+13	12.500	20.000	0.3	1.000
Cuckoo Search + GN o LM	10+11	12.500	20.000	0.3	1.000
Grey Wolf Optimizer + GN o LM	10+7	12.500	19.996	2.9	1.000
Shuffled Complex Evolution + GN o LM	10+9	12.498	20.052	37.0	1.000
NSGA-II Multiobjetivo + GN o LM	10+9	12.502	19.958	29.6	1.000
SPEA2 Multiobjetivo + GN o LM	10+6	12.499	20.028	19.8	1.000
Machine Learning + GN	4	12.500	19.997	2.3	1.000
Machine Learning + LM	10	12.500	20.000	0.1	1.000

Tabla 7-8 – Número de iteraciones y error de predicción del módulo de elasticidad  $E_1$  &  $E_2$  derivados de mediciones con ruido

Algoritmo	Iteraciones	$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	RMSE (KPa)	$R^2$
Gauss-Newton (GN)	11	12.339	22.514	1781.4	0.774
Levenberg-Marquardt (LM)	15	12.502	18.308	1196.4	0.898
Multistart con LM	13	12.502	18.308	1196.4	0.898
Multistart con GN	10	12.339	22.515	1781.9	0.774
Cuasi-Newton BFGS	40	12.492	20.070	50.1	1.000
Genéticos Simples	53	12.803	16.453	2517.0	0.549
Genéticos Adaptativos	53	13.483	17.992	1581.2	0.822
Enjambre de partículas - PSO	59	12.502	18.308	1196.5	0.898
Evolución Diferencial (DE)	120	12.439	19.723	200.4	0.997
Recocido simulado (SA)	250	12.723	17.955	1454.7	0.850
Nelder-Mead (Simplex)	241	12.439	19.725	199.3	0.997
Optimización Bayesiana (BO)	200	12.558	17.539	1740.7	0.785
Procesos Gaussianos (GP)	300	12.975	17.008	2142.4	0.674
Kriging	300	11.911	21.994	1470.3	0.846
Programación cuadrática (SQP)	40	12.492	20.070	50.1	1.000
Programación No Lineal (NLP)	48	12.628	19.391	440.0	0.986
Optimización robusta	64	12.266	21.303	936.4	0.938
Optimización distribuidamente robusta	78	12.362	22.389	1692.0	0.796
Genético simple + GN o LM	10+6	12.339	22.514	1781.1	0.774
Genético Adaptativo + GN o LM	10+13	12.502	18.308	1196.4	0.898
PSO + GN o LM	10+11	12.502	18.308	1196.4	0.898
Evolución Diferencial + GN o LM	10+15	12.502	18.308	1196.4	0.898
Recocido simulado + GN o LM	10+14	12.502	18.308	1196.4	0.898
BO + GN o LM	10+11	12.339	22.512	1779.9	0.775
GP + GN o LM	10+13	12.339	22.515	1782.0	0.774
Kriging + GN o LM	10+18	12.339	22.515	1781.7	0.774
CMA-ES + GN o LM	10+10	12.339	22.515	1782.3	0.774
Cuckoo Search + GN o LM	10+14	12.339	22.515	1782.1	0.774
Grey Wolf Optimizer + GN o LM	10+16	12.339	22.515	1782.2	0.774
Shuffled Complex Evolution + GN o LM	10+14	12.339	22.515	1782.1	0.774
NSGA-II Multiobjetivo + GN o LM	10+17	12.339	22.515	1782.3	0.774
SPEA2 Multiobjetivo + GN o LM	10+16	12.339	22.512	1780.2	0.775
Machine Learning + GN	6	12.346	22.290	1622.7	0.813
Machine Learning + LM	13	12.502	18.308	1196.4	0.898

Tabla 7-9 – Error de predicción del asiento mediante  $E_1$  &  $E_2$  retrocalculados

Algoritmo	Sin ruido		Con ruido	
	RMSE (mm)	R <sup>2</sup>	RMSE (mm)	R <sup>2</sup>
Gauss-Newton (GN)	0.01	1.000	0.20	0.999
Levenberg-Marquardt (LM)	0.00	1.000	0.29	0.999
Multistart con LM	0.00	1.000	0.29	0.999
Multistart con GN	0.00	1.000	0.20	0.999
Cuasi-Newton BFGS	0.24	0.999	0.15	1.000
Genéticos Simples	0.32	0.999	0.32	0.999
Genéticos Adaptativos	0.23	0.999	0.27	0.999
Enjambre de partículas - PSO	0.00	1.000	0.29	0.999
Evolución Diferencial (DE)	0.00	1.000	0.22	0.999
Recocido simulado (SA)	0.07	1.000	0.24	0.999
Nelder-Mead (Simplex)	0.00	1.000	0.22	0.999
Optimización Bayesiana (BO)	0.95	0.988	0.36	0.998
Procesos Gaussianos (GP)	0.18	1.000	0.31	0.999
Kriging	0.15	1.000	0.78	0.992
Programación cuadrática (SQP)	0.24	0.999	0.15	1.000
Programación No Lineal (NLP)	0.09	1.000	0.15	1.000
Optimización robusta	0.05	1.000	0.23	0.999
Optimización distribuidamente robusta	0.03	1.000	0.19	1.000
Genético simple + GN o LM	0.03	1.000	0.20	0.999
Genético Adaptativo + GN o LM	0.00	1.000	0.29	0.999
PSO + GN o LM	0.00	1.000	0.29	0.999
Evolución Diferencial + GN o LM	0.00	1.000	0.29	0.999
Recocido simulado + GN o LM	0.00	1.000	0.29	0.999
BO + GN o LM	0.00	1.000	0.20	0.999
GP + GN o LM	0.01	1.000	0.20	0.999
Kriging + GN o LM	0.00	1.000	0.20	0.999
CMA-ES + GN o LM	0.00	1.000	0.20	0.999
Cuckoo Search + GN o LM	0.00	1.000	0.20	0.999
Grey Wolf Optimizer + GN o LM	0.00	1.000	0.20	0.999
Shuffled Complex Evolution + GN o LM	0.01	1.000	0.20	0.999
NSGA-II Multiobjetivo + GN o LM	0.01	1.000	0.20	0.999
SPEA2 Multiobjetivo + GN o LM	0.01	1.000	0.20	0.999
Machine Learning + GN	0.00	1.000	0.18	1.000
Machine Learning + LM	0.00	1.000	0.29	0.999

### 7.2.2 Caso de estudio real

En la Tabla 7-10 se presentan los resultados numéricos obtenidos tras la aplicación de los principales algoritmos de optimización frente a la metodología propuesta en este trabajo.

Se analizan la precisión para estimar el asiento superficial en base al módulo de elasticidad retrocalculado y el coste computacional asociado.

Tabla 7-10 – Error de predicción del asiento mediante parámetros retrocalculados

Algoritmo de optimización	Iteraciones	RMSE (mm)	R <sup>2</sup>
Genético simple + GN o LM	10+2	0.285	0.998
Genético Adaptativo + GN o LM	10+2	0.286	0.998
PSO + GN o LM	10+2	0.287	0.998
ML + GN	4	0.285	0.998
ML + LM	14	0.285	0.998

El error cuadrático medio (RMSE, por sus siglas en inglés) y coeficiente de determinación ( $R^2$ ) es similar en todos los casos porque todos los métodos alcanzan la misma solución. No obstante, el coste computacional, representado como número de iteraciones, es diferente para cada método.

En el apartado 7.5 se analizan los resultados en detalle, incluyendo gráficas y figuras que completan los resultados expuestos anteriormente.



### 7.3 Interpretación del modelo mediante SHAP en el caso de estudio sintético

Con el objetivo de proporcionar transparencia al modelo empleado en el análisis retrospectivo del caso de estudio sintético, se ha aplicado la técnica SHAP (*Shapley Additive exPlanations*). Los resultados obtenidos con esta técnica se presentan en esta sección.

El análisis mediante SHAP permite interpretar mejor que mediciones de asientos tienen mayor relevancia a la predicción de cada módulo de elasticidad  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  y  $E_4$ .

Los valores SHAP pueden ser positivos o negativos, lo que indica si una determinada medición de asiento contribuye a aumentar o disminuir la predicción del módulo de elasticidad con respecto al valor medio del modelo. Esta interpretación direccional permite entender la lógica interna del modelo, incluso cuando actúa como una caja negra, y ayuda a verificar si las relaciones aprendidas son coherentes con el comportamiento mecánico esperado del suelo.

Los resultados se muestran en gráficos de tipo *SHAP Beeswarm* y diagramas de barras, una representación gráfica común en la interpretabilidad de modelos de *machine learning* con SHAP. El objetivo de este tipo de gráficos es ilustrar cómo y cuánto influye cada variable (*feature*) en la predicción del modelo, para todos los datos de una manera compacta y visual.

Las gráficos tipo *Beeswarm* listan en el eje vertical las variables de entrada (mediciones de asiento a distintas profundidades), mientras que el eje horizontal representa los valores SHAP de cada observación, los cuales indican el impacto de cada variable en la salida del modelo. Los valores de SHAP pueden ser positivos o negativos, lo que indica que la variable de entrada contribuya a aumentar o disminuir, respectivamente, la predicción del modelo. Por ejemplo, una alta densidad de puntos alejados del eje vertical (alto valor SHAP), especialmente en color rojo y en la zona positiva, indica una alta contribución positiva de esa variable en la predicción del módulo de elasticidad.

Los diagramas de barras resumen gráficamente la importancia relativa de cada variable, representando el valor medio absoluto de los valores SHAP. En el eje vertical se indican las variables de entrada (mediciones de asiento), y el eje horizontal muestra cuánto contribuye cada variable, en promedio, a la predicción del modelo, sin importar la dirección del impacto (positivo o negativo).

El análisis realizado mediante SHAP ha permitido entender qué profundidades son más determinantes en el cálculo retrospectivo de los módulos de elasticidad del terreno. Las mediciones superficiales han demostrado tener un impacto transversal relevante en todos los módulos estudiados, especialmente significativo en módulos superficiales ( $E_1$  y  $E_2$ ). Por otra

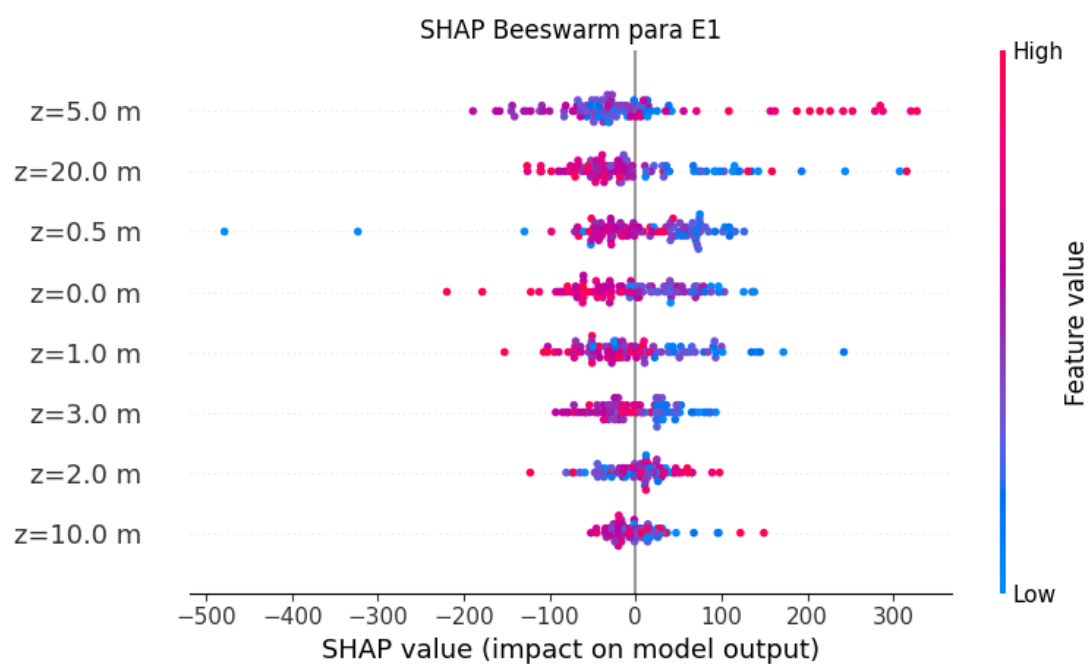
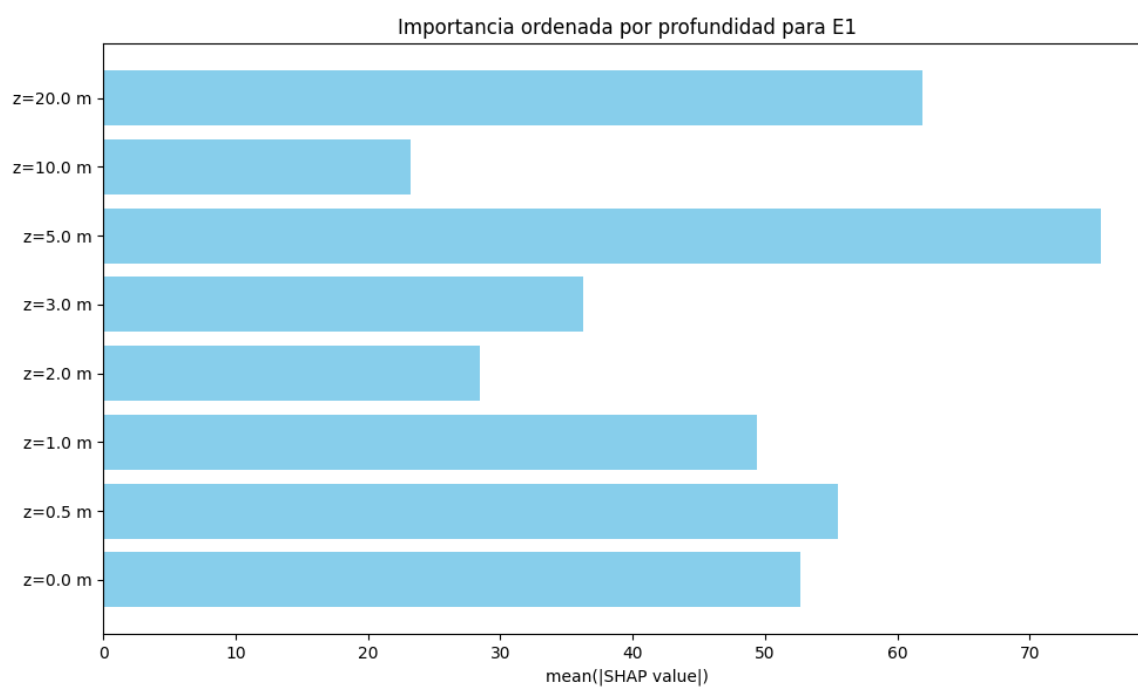
parte, mediciones profundas (a partir de 10 m) se vuelven cada vez más críticas conforme se calibran módulos correspondientes a capas más profundas ( $E_3$  y  $E_4$ ).

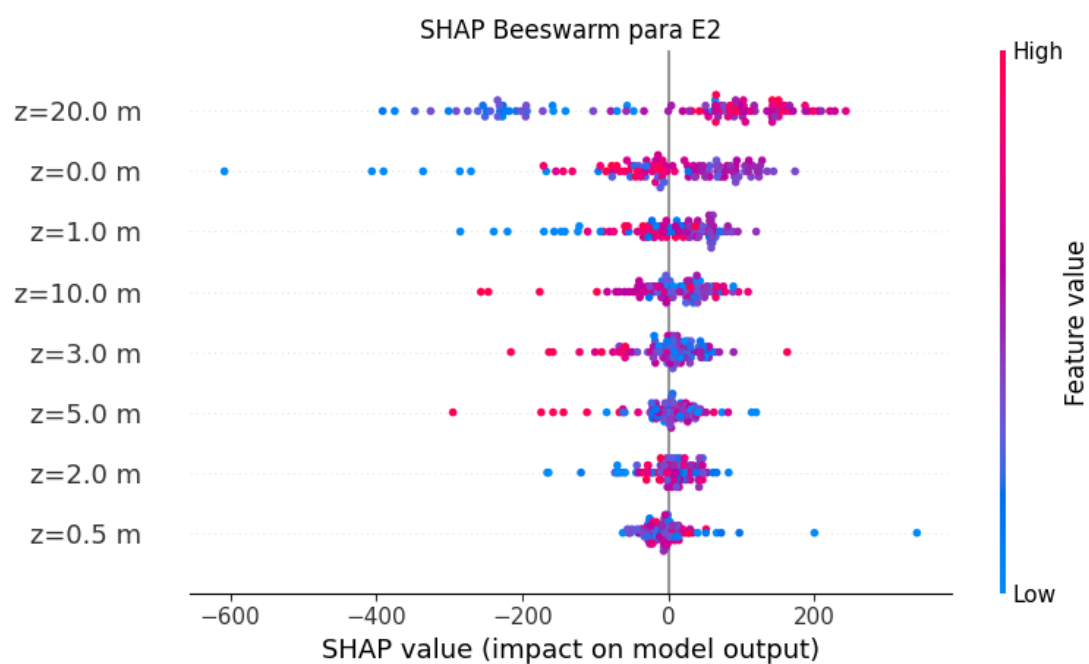
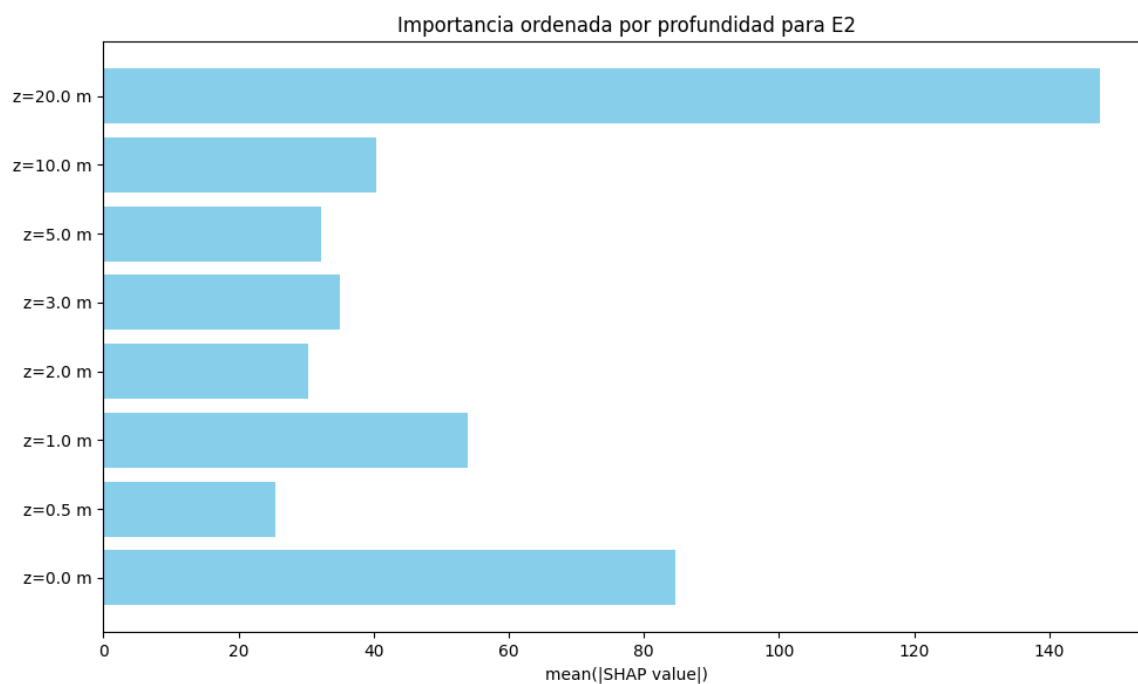
El módulo de elasticidad  $E_1$  está claramente asociado con las capas superficiales del terreno. De acuerdo con la Figura 7-66 y la Figura 7-67, los valores de SHAP más altos aparecen en profundidades superficiales (0.0 m, 0.5 m y 1.0 m), confirmando que estos datos son críticos para calibrar correctamente  $E_1$ . Mediciones más profundas tienen menor impacto, lo que corrobora la lógica geotécnica del problema.

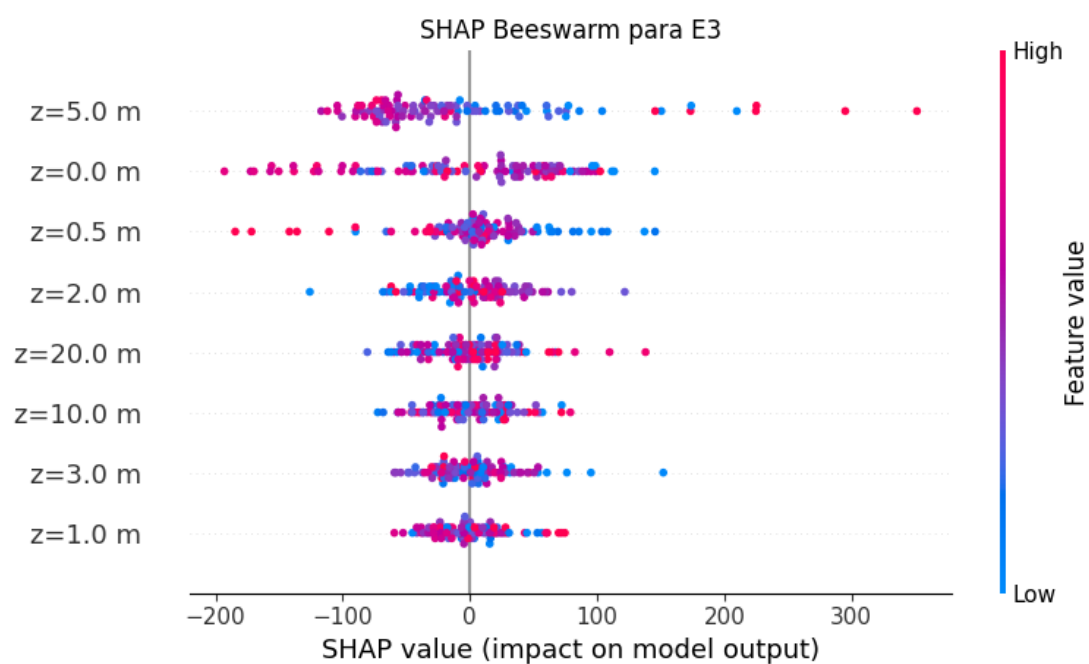
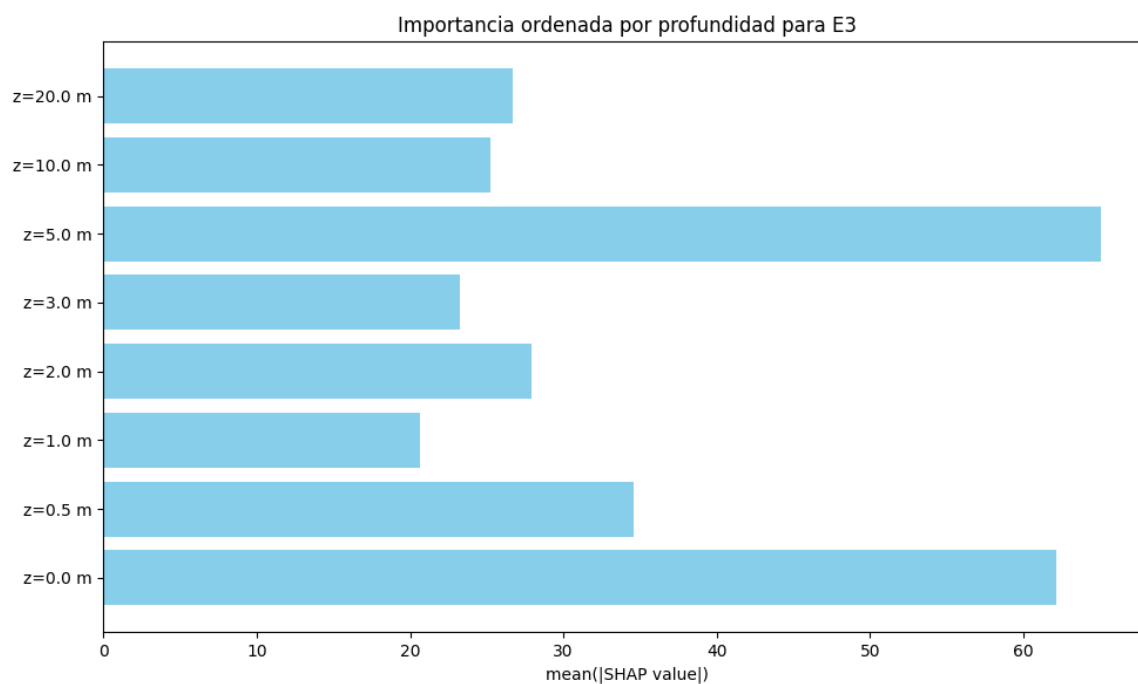
El módulo de elasticidad  $E_2$  representa un estrato intermedio (2.0 a 7.5 m). Los gráficos correspondientes al módulo de elasticidad del segundo estrato se pueden encontrar en la Figura 7-68 y la Figura 7-69. Resulta significativo que tanto las mediciones superficiales ( $z=0$  m y  $z=1$  m) como las profundas ( $z=20$  m) muestran alta importancia. Esto sugiere que para la correcta calibración de  $E_2$  es necesario considerar tanto los datos superficiales (posiblemente por interacción estructural directa) como profundos (por influencia acumulada). Por otra parte, los limitados datos de monitorización por debajo de los 5m de profundidad, limitándose a 10m y 20m de profundidad, hacen que el análisis retrospectivo tenga que apoyarse de los datos disponibles a mayor profundidad.

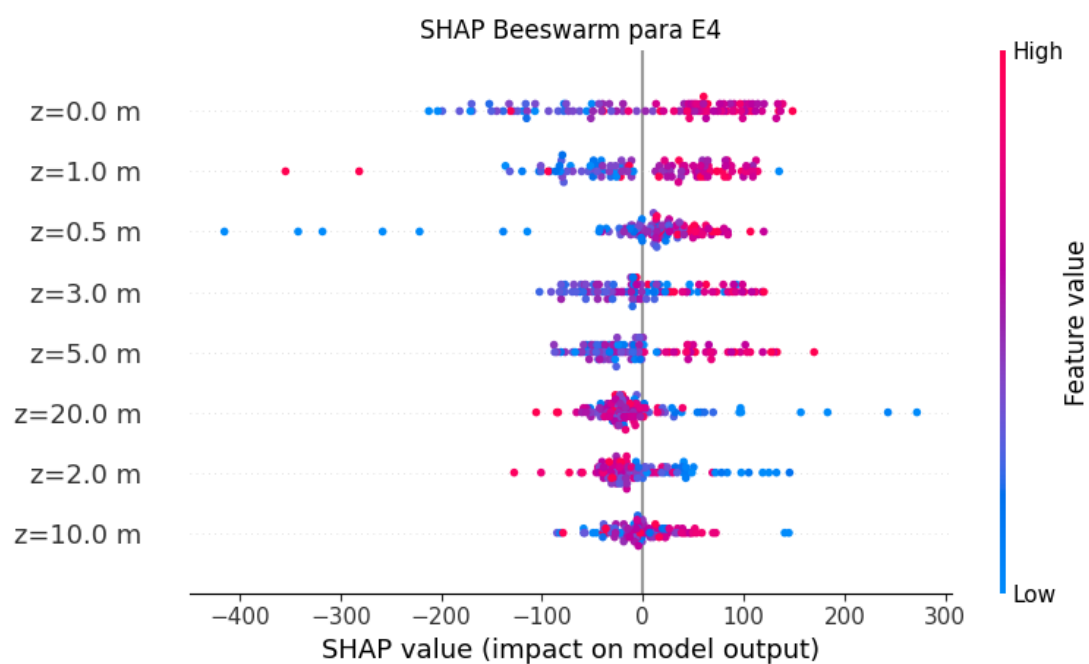
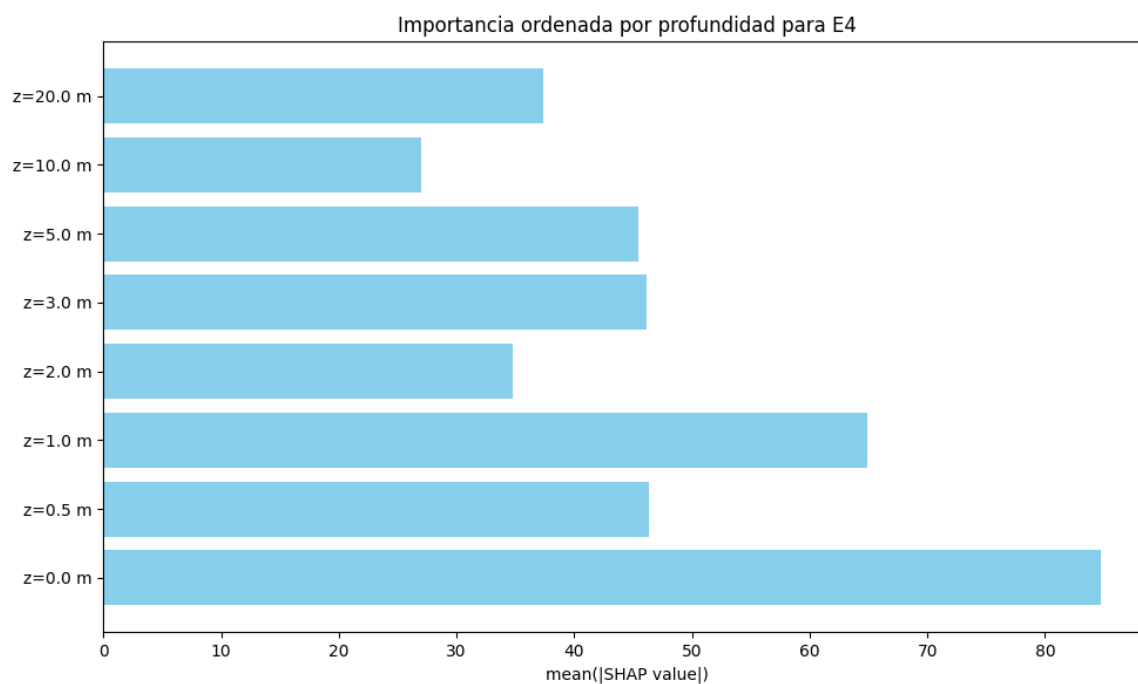
El módulo de elasticidad  $E_3$  corresponde a un estrato más profundo (7.5 a 15.0 m). Los gráficos correspondientes al módulo de elasticidad del segundo estrato se pueden encontrar en la Figura 7-70 y la Figura 7-71. Los resultados indican que los asientos superficiales (especialmente  $z=5.0$  m y  $z=0$  m) continúan siendo influyentes, probablemente debido a efectos acumulativos, mientras que mediciones intermedias ( $z=10$  m) muestran una influencia menor, aunque también importante. La profundidad de 5.0 m muestra la máxima influencia, posiblemente por su ubicación cercana al inicio del estrato correspondiente.

El módulo de elasticidad  $E_4$  representa las capas más profundas (15 a 30 m). Los gráficos correspondientes al módulo de elasticidad del segundo estrato se pueden encontrar en la Figura 7-72 y la Figura 7-73. Resulta llamativo que, aunque se esperaría que profundidades grandes fuesen las más determinantes, la superficie (0.0 m) sigue ejerciendo una influencia considerable. Las mediciones en 0.0 m y 0.5 m tienen alta relevancia, destacando la importancia del efecto acumulativo del asiento superficial en la calibración de módulos muy profundos. Mediciones a 10.0 m y 20.0 m también muestran una influencia relevante, pero algo menor, lo que es esperable en la lógica geotécnica del problema.

Figura 7-66 – SHAP Beeswarm para  $E_1$ Figura 7-67 – SHAP value para  $E_1$

Figura 7-68 – SHAP Beeswarm para  $E_2$ Figura 7-69 – SHAP value para  $E_2$

Figura 7-70 – SHAP Beeswarm para  $E_3$ Figura 7-71 – SHAP value para  $E_3$

Figura 7-72 – SHAP Beeswarm para  $E_4$ Figura 7-73 – SHAP value para  $E_4$

Con el fin de sintetizar los resultados obtenidos mediante la técnica SHAP y facilitar su interpretación, se ha elaborado la Tabla 7-11, donde se resume la influencia relativa de cada medición de asiento en la estimación de los diferentes módulos de elasticidad del terreno ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  y  $E_4$ ).

La tabla clasifica la importancia de cada profundidad en cuatro niveles cualitativos (muy baja, baja, media, alta), en función del valor medio absoluto de SHAP obtenido para cada variable. Esta clasificación permite visualizar de forma rápida qué mediciones tienen mayor impacto en la predicción de cada parámetro, lo que resulta especialmente útil para orientar decisiones en futuras campañas de instrumentación o para priorizar sensores en contextos con limitaciones de monitorización.

Este resumen evidencia, por ejemplo, que las mediciones superficiales ( $z = 0.0\text{--}1.0$  m) son determinantes en la estimación de  $E_1$ , mientras que las más profundas ( $z = 10.0\text{--}20.0$  m) cobran mayor relevancia progresivamente en la predicción de  $E_3$  y  $E_4$ . También permite observar que ciertas profundidades intermedias, como  $z = 5.0$  m, mantienen una relevancia transversal en todos los módulos, probablemente debido a su ubicación estratégica en la transición entre estratos.

Tabla 7-11 – Resumen influencia SHAP por módulo elástico

Profundidad (m)	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
0.0	Alta	Alta	Media	Alta
0.5	Alta	Media	Media	Media
1.0	Alta	Media	Baja	Media
2.0	Media	Alta	Media	Media
3.0	Baja	Media	Media	Baja
5.0	Baja	Media	Alta	Media
10.0	Muy baja	Media	Media	Media
20.0	Muy baja	Alta	Media	Media

Los patrones identificados mediante SHAP proporcionan una base objetiva y visualmente interpretativa para discutir la validez y limitaciones del modelo en el capítulo 8 y abren la puerta a estudios futuros para explorar los puntos de monitorización óptimos en un análisis inverso.

## 7.4 Análisis detallado de los resultados del caso de estudio sintético

A continuación, se presentan los resultados más relevantes obtenidos tras la aplicación de los distintos métodos de optimización en el caso de estudio sintético, poniendo el foco en aquellos que han mostrado un comportamiento destacado, ya sea por su eficiencia computacional o por la precisión alcanzada en la estimación de los módulos de elasticidad.

Este apartado incluye una selección representativa de los algoritmos aplicados, con el fin de ilustrar los patrones observados y justificar su rendimiento comparativo. Los resultados detallados para cada uno de los algoritmos de optimización evaluados, tal como se describen en el apartado 5.2, se recogen íntegramente en el ANEJO A.

### 7.4.1 Métodos basados en gradientes

La Figura 7-74 y la Figura 7-75 muestran la evolución del error cuadrático medio durante el proceso iterativo de los métodos de Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente, comparando los casos sin ruido (gráfica izquierda) y con ruido (gráfica derecha).

En el caso de Gauss-Newton, la convergencia ocurre rápidamente en ambos escenarios. Para datos sin ruido, el error se reduce casi a cero en la octava iteración, lo que evidencia la alta eficiencia del algoritmo en condiciones ideales. En presencia de ruido, el número de iteraciones necesarias es similar (once iteraciones), aunque el error residual final es mayor debido a la incertidumbre inherente a los datos, lo cual es coherente con lo esperado.

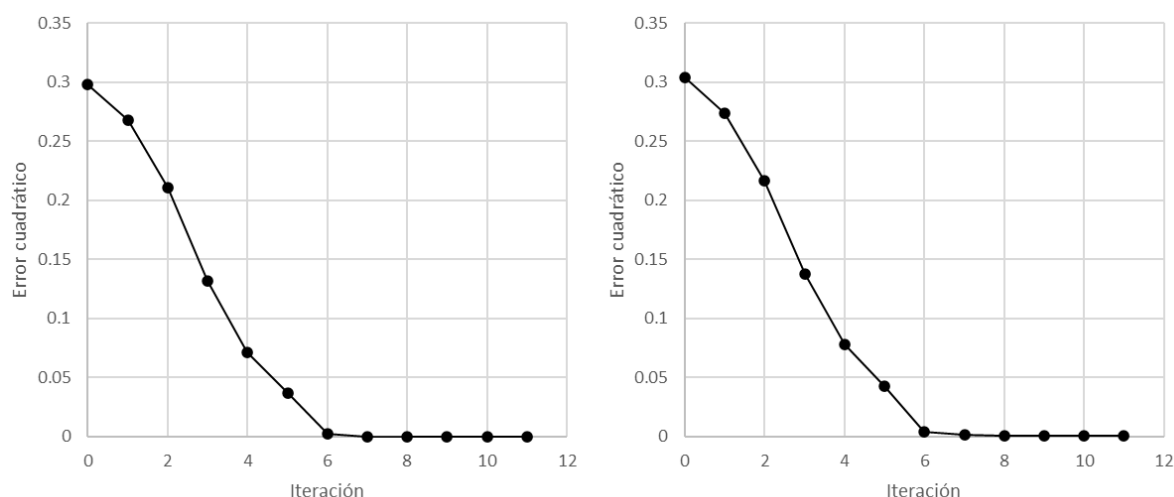


Figura 7-74 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)



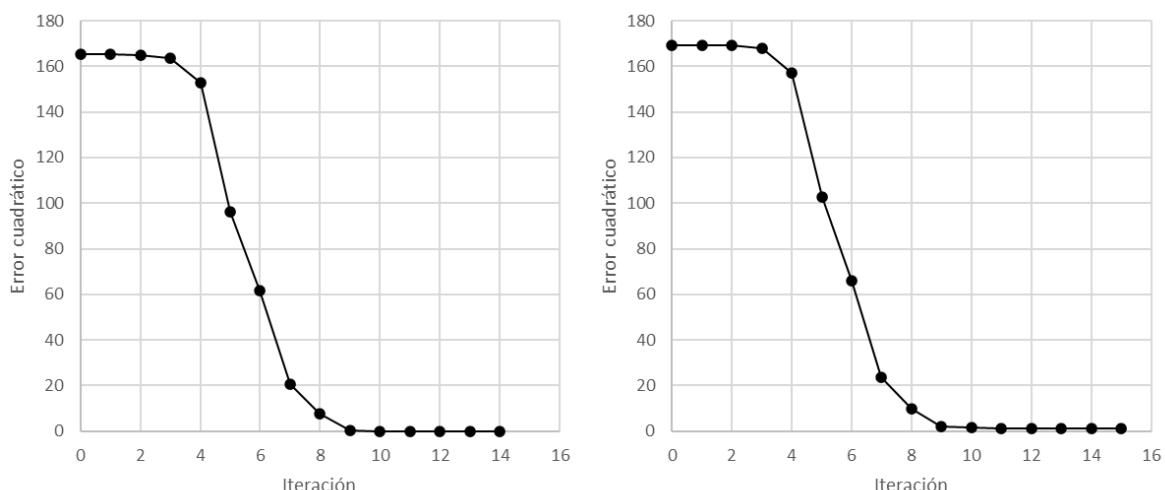


Figura 7-75 – No. Iteraciones para convergencia según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido)

Por su parte, el método de Levenberg-Marquardt requiere más iteraciones para converger. En el caso sin ruido, alcanza el criterio de parada en la iteración catorce, mientras que con ruido se necesitan hasta quince iteraciones. Al igual que en Gauss-Newton, se observa un error residual más elevado en el escenario con ruido, reflejando la sensibilidad del modelo a la calidad de los datos de entrada.

La Figura 7-76 y la Figura 7-77 representan la evolución del proceso de optimización en el espacio de soluciones delimitado por los módulos E1 y E2 para los métodos de Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente. En ambas figuras se muestra tanto el caso sin ruido (izquierda) como el con ruido (derecha).

La trayectoria seguida por los algoritmos parte de un punto inicial (resaltado en azul) y progresa iterativamente hasta alcanzar una solución final (círculo verde). La posición del mínimo teórico se indica mediante un círculo rojo.

En ambos métodos se observa un comportamiento estable y dirigido al óptimo, sin evidencia de estancamiento en mínimos locales, lo que demuestra una buena capacidad de exploración del espacio de búsqueda. No obstante, al introducir ruido en los datos, el punto de convergencia se desplaza ligeramente respecto al óptimo ideal, como resultado de la incertidumbre en la información observada. Este efecto es coherente con la sensibilidad de los métodos de ajuste frente a perturbaciones en las mediciones y refleja la robustez relativa de ambos algoritmos ante ruido.

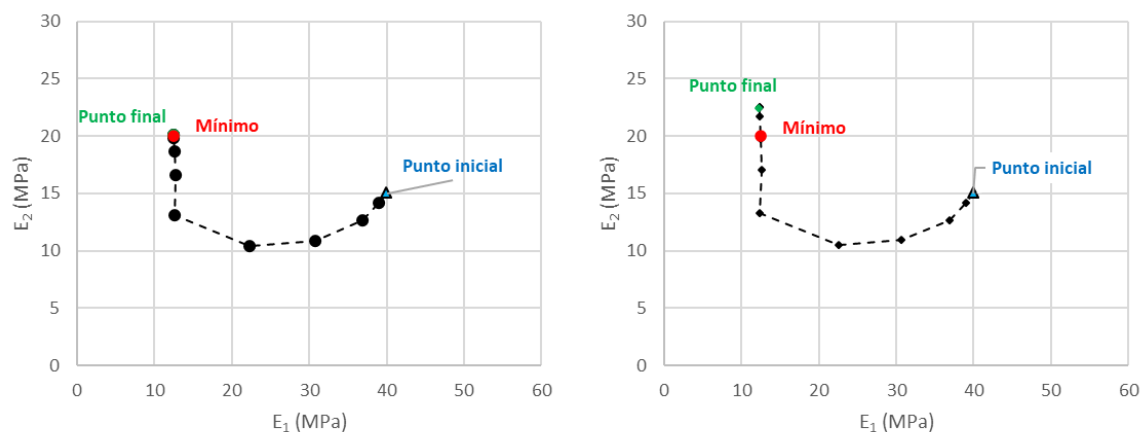


Figura 7-76 – Mapa trayectoria  $E_1$  y  $E_2$  para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

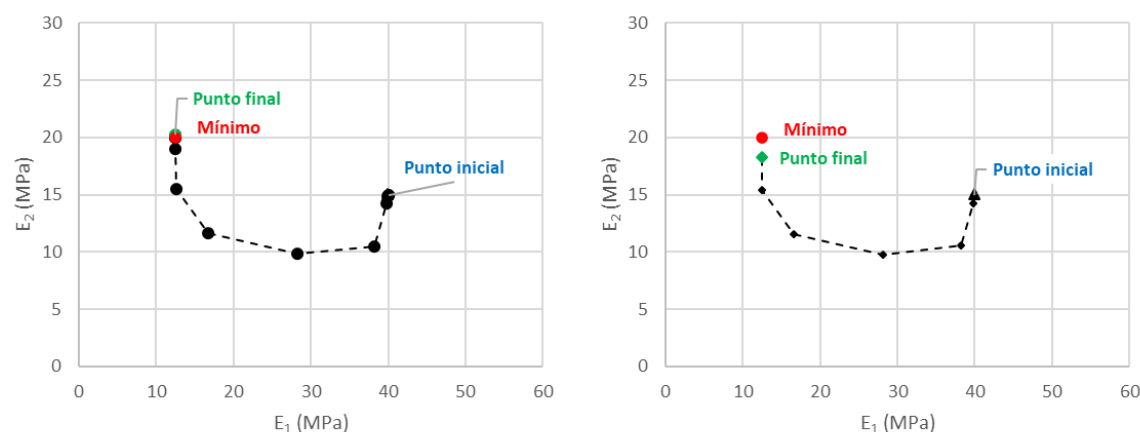


Figura 7-77 – Mapa trayectoria  $E_1$  y  $E_2$  para cada iteración según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido)

La Figura 7-78 y la Figura 7-79 muestran la comparación entre los perfiles de deformación teóricos y los perfiles ajustados obtenidos mediante el retrocálculo de los módulos de elasticidad, tanto para el caso ideal (sin ruido) como para el caso con ruido. En cada figura, se presentan los resultados correspondientes al método de Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente.

Se representa el asiento acumulado frente a la profundidad, comparando la curva obtenida con los módulos teóricos (curva negra discontinua) y la generada a partir de los módulos calibrados por optimización (curva negra continua). En ambos métodos se observa un ajuste excelente en

el caso sin ruido, donde las curvas prácticamente se solapan, lo que valida la capacidad del modelo para recuperar los parámetros originales.

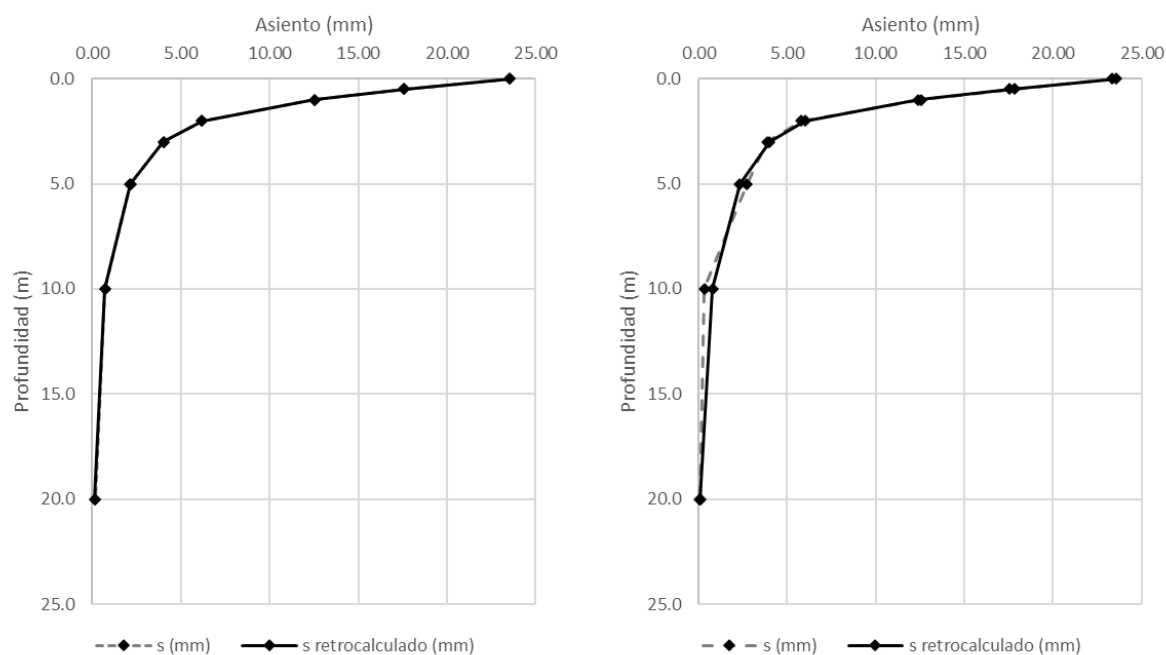


Figura 7-78 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

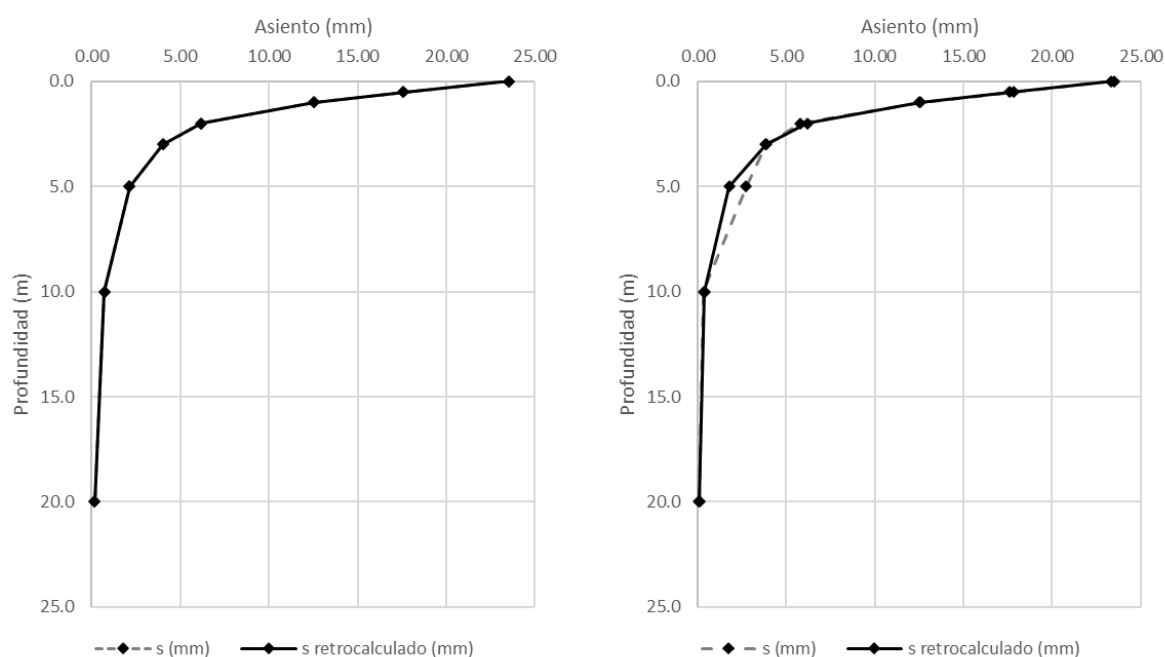


Figura 7-79 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido)

En el caso con ruido, aunque se aprecia una ligera desviación por debajo de los 5m de profundidad, el modelo sigue proporcionando una aproximación razonable, lo que evidencia su robustez frente a datos con incertidumbre. Esta visualización permite verificar gráficamente la bondad del ajuste global y ofrece una interpretación directa de la coherencia geotécnica del retroanálisis realizado.

## 7.4.2 Heurísticos y metaheurísticos – Evolutivos

### 7.4.2.1 Algoritmo Genético Simple

La aplicación del algoritmo genético simple (SGA) para la calibración de los módulos de elasticidad ha permitido evaluar el comportamiento poblacional en distintas generaciones, así como analizar la evolución del ajuste a los datos observados en función de la presencia o ausencia de ruido.

El algoritmo considera una población fija de 75 individuos, que evolucionan de manera iterativa a través de operadores genéticos clásicos (selección, cruce y mutación). El número de generaciones no está predefinido, sino que se prolonga hasta alcanzar un error cuadrático medio inferior al umbral adoptado como criterio de convergencia.

En primer lugar, la Figura 7-80 muestra la evolución del reemplazo generacional hasta alcanzar la convergencia. A la izquierda se representa el caso sin ruido y, a la derecha, el caso con ruido. En ambas simulaciones se observa un descenso inicial abrupto del reemplazo generacional, correspondiente a la fase de convergencia rápida del algoritmo hacia zonas prometedoras del espacio de búsqueda. A medida que avanzan las generaciones, el reemplazo se estabiliza en torno a un valor medio, señal de que la población ha alcanzado un equilibrio evolutivo. En el caso con ruido, el reemplazo tiende a valores más bajos, lo cual indica una mayor dificultad para mantener diversidad genética en presencia de incertidumbre.

La Figura 7-82 (sin ruido) y la Figura 7-83 (con ruido) muestran la evolución de la población en el espacio de búsqueda definido por los parámetros  $E_1$  y  $E_2$ . Se representan distintas generaciones clave (1, 5, 10, 20, 30, 40 y 50), donde cada punto negro corresponde a un individuo y el punto rojo representa la solución objetivo (mínimo). Puede observarse que, en ambos casos, la población se va concentrando progresivamente en una región óptima del espacio. Sin embargo, en presencia de ruido, los individuos presentan una mayor dispersión en las generaciones intermedias, reflejo del efecto del ruido sobre la precisión del ajuste.

Finalmente, la Figura 7-81 muestra la comparación entre los asientos medidos y los asientos calculados con los módulos de elasticidad retrocalculados. A la izquierda se presenta el caso sin ruido y a la derecha con ruido. En ambos casos se observa un buen ajuste general, si bien el modelo con ruido presenta una ligera desviación en las zonas intermedias de profundidad. Este efecto es consistente con el comportamiento observado en otros algoritmos y refuerza la necesidad de considerar métodos robustos ante incertidumbre en datos experimentales.

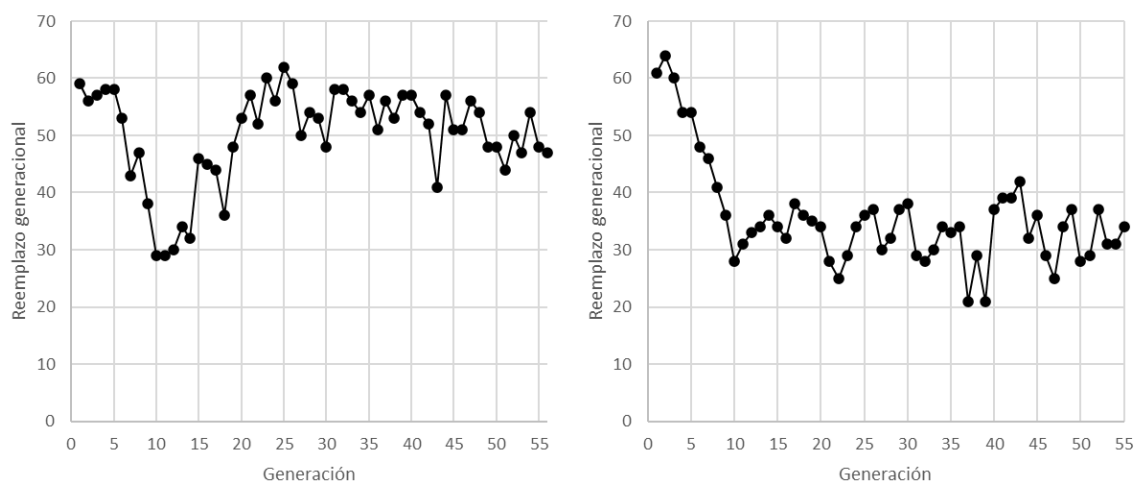


Figura 7-80 – Reemplazo generacional en algoritmo genético simple (sin ruido – con ruido)

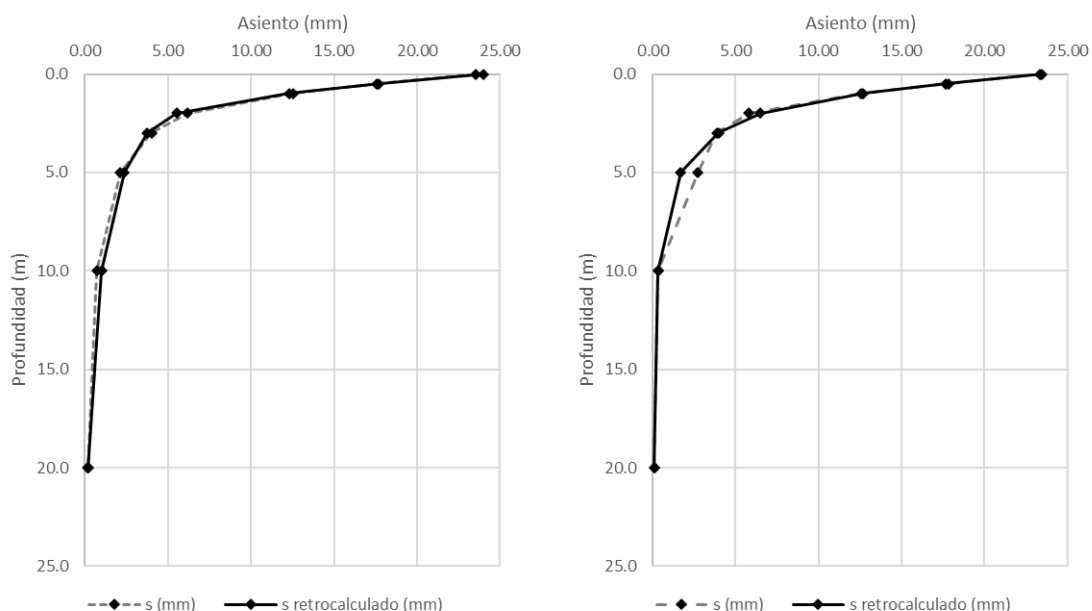


Figura 7-81 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según algoritmo genético simple (sin ruido – con ruido)

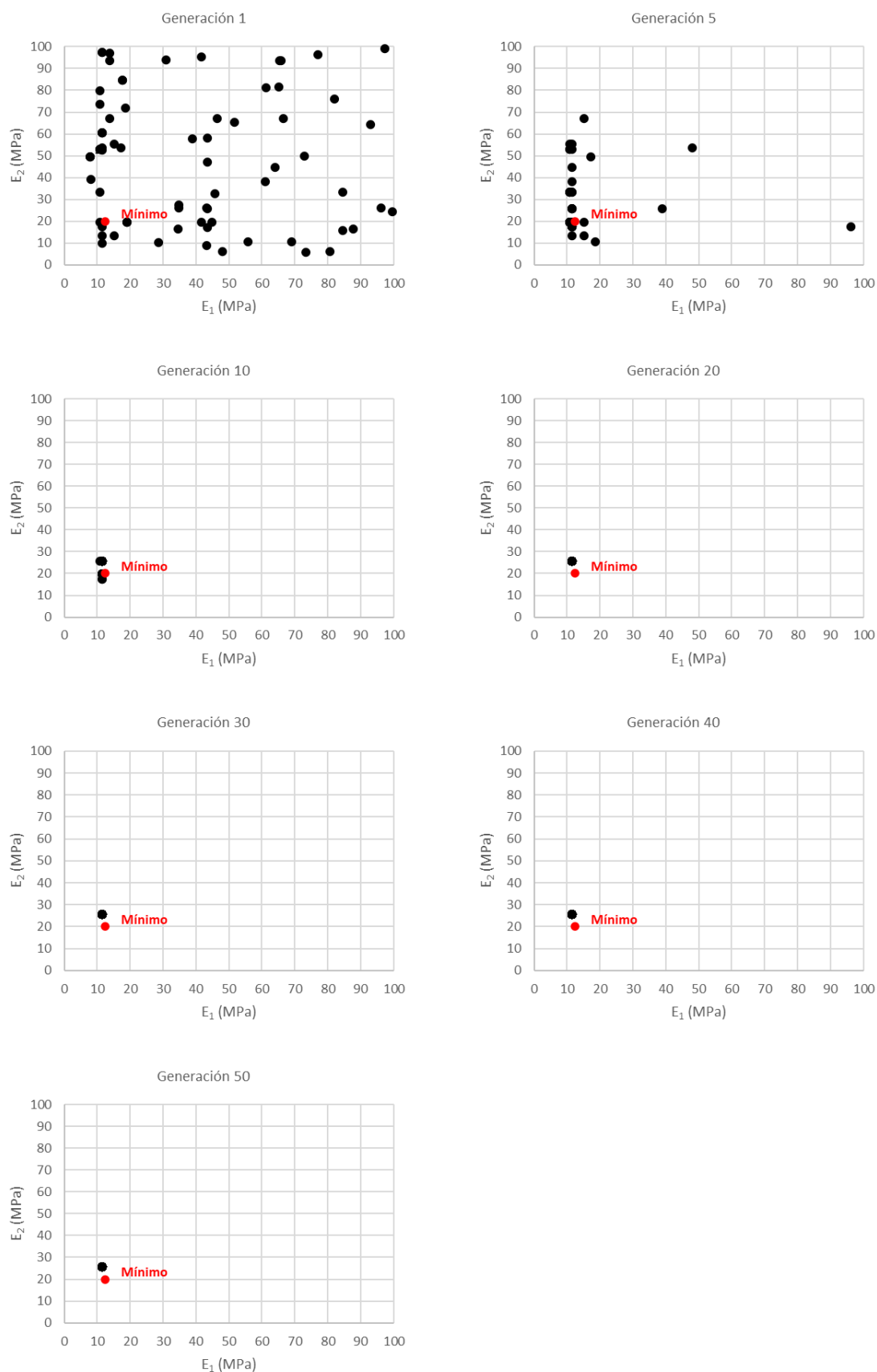


Figura 7-82 – Evolución población en algoritmo genético simple (sin ruido)

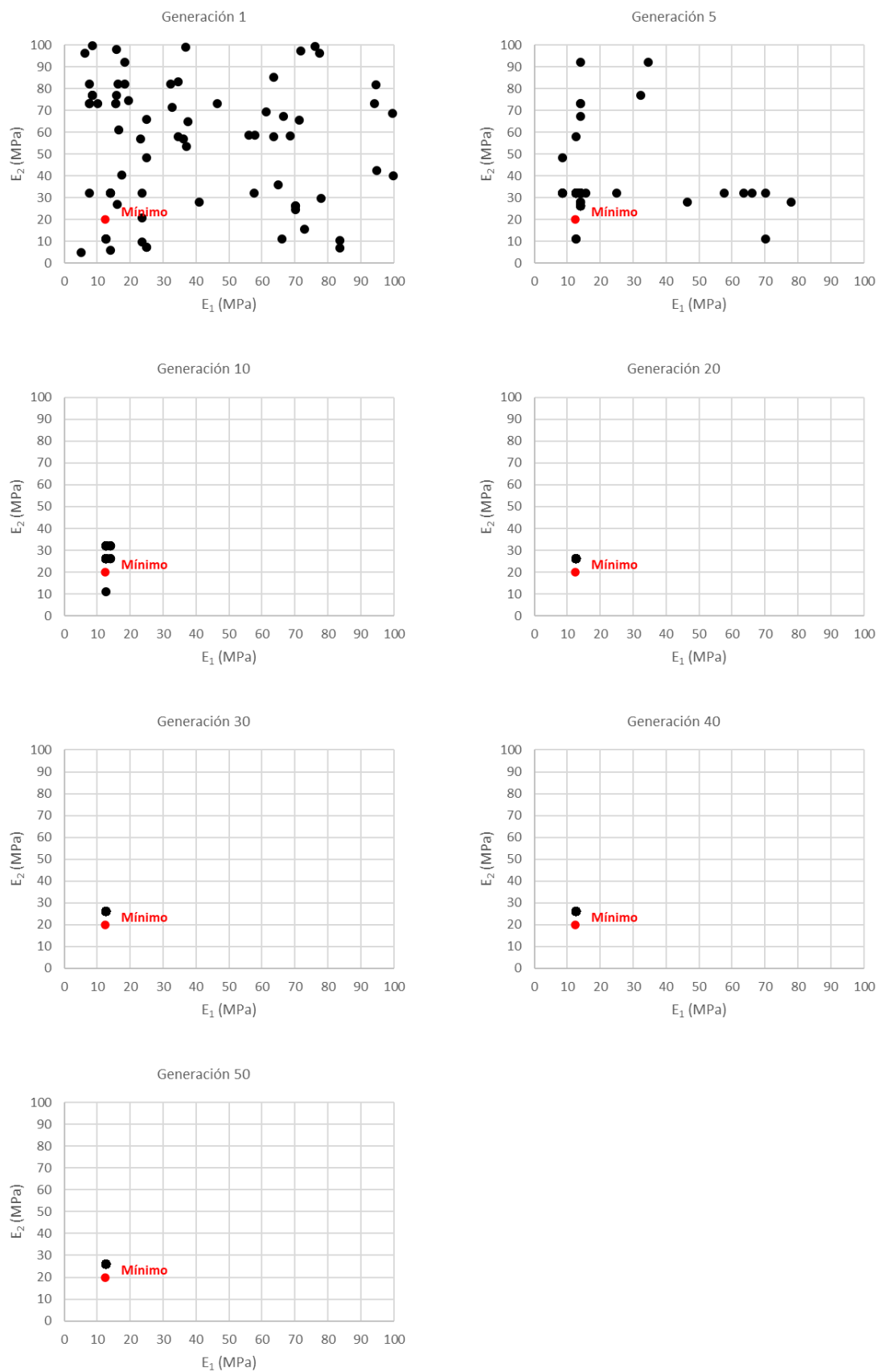


Figura 7-83 – Evolución población en algoritmo genético simple (con ruido)

#### 7.4.2.2 Algoritmo Genético Adaptativo

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante la aplicación del algoritmo genético adaptativo, una variante mejorada del enfoque genético clásico que ajusta dinámicamente sus parámetros para optimizar el proceso de búsqueda.

Como en el caso anterior, el algoritmo considera una población fija de 75 individuos, que evolucionan de manera iterativa a través de operadores genéticos clásicos (selección, cruce y mutación). El número de generaciones no está predefinido, sino que se prolonga hasta alcanzar un error cuadrático medio inferior al umbral adoptado como criterio de convergencia. Estas bases implican que se priorice la precisión sobre la rapidez computacional. Esta estrategia ha demostrado ser particularmente útil en escenarios con incertidumbre, ya que permite una adaptación continua sin necesidad de intervención manual.

La Figura 7-84 muestra la evolución del número de individuos reemplazados en cada generación, tanto para el caso sin ruido (izquierda) como con ruido (derecha). Puede observarse una tendencia descendente en las primeras generaciones, donde el algoritmo explora activamente nuevas soluciones. Posteriormente, el número de reemplazos se estabiliza, indicando que la población ha convergido hacia regiones prometedoras del espacio de soluciones. En comparación con el algoritmo genético simple, el comportamiento del reemplazo es más eficiente y menos oscilante, lo cual sugiere una mayor estabilidad del algoritmo adaptativo.

La evolución de la población en el espacio de soluciones se representa en las Figura 7-86 (sin ruido) y Figura 7-87 (con ruido). En ambas se aprecia cómo, a lo largo de las generaciones, los individuos se agrupan progresivamente en torno al mínimo global, indicado en rojo. El proceso es más eficiente que en el caso anterior: desde las primeras generaciones, se observa una concentración de soluciones hacia un entorno muy próximo al mínimo, y esta tendencia se mantiene incluso en presencia de ruido, lo que evidencia la robustez del algoritmo frente a datos inciertos.

Por último, la Figura 7-85 compara el perfil de asientos retrocalculado con el perfil teórico, tanto en el caso sin ruido (izquierda) como con ruido (derecha). El ajuste logrado es muy acertado en ambos escenarios, aunque, como es esperable, el caso con ruido presenta una ligera desviación en las mediciones profundas.



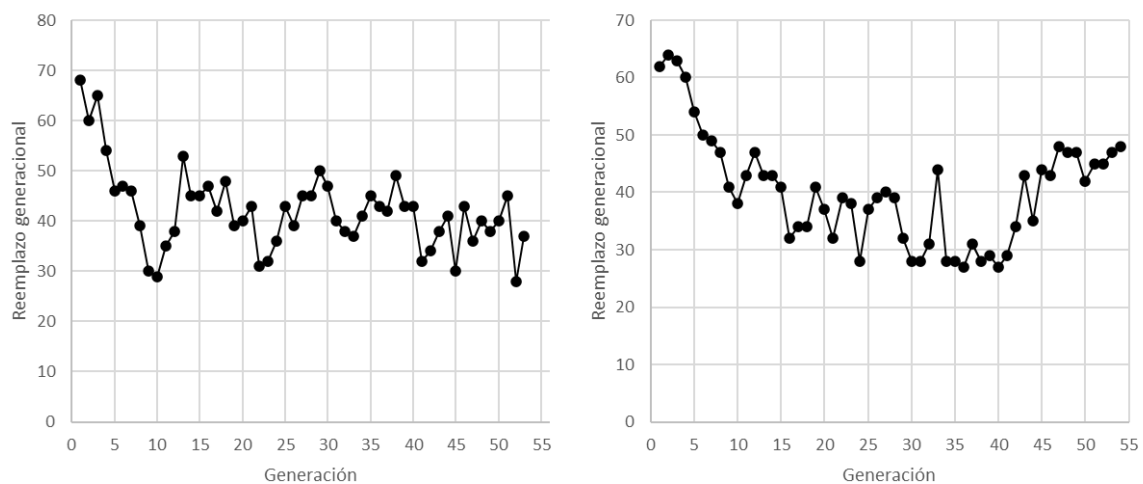


Figura 7-84 – Reemplazo generacional en algoritmo genético adaptativo (sin ruido – con ruido)

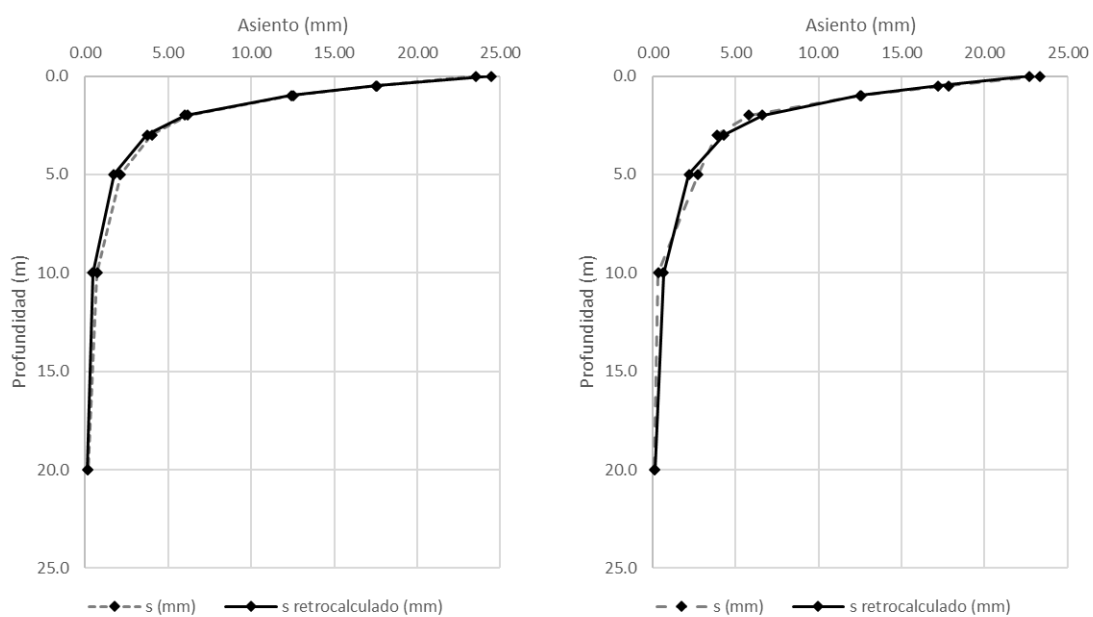


Figura 7-85 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según algoritmo genético adaptativo (sin ruido – con ruido)

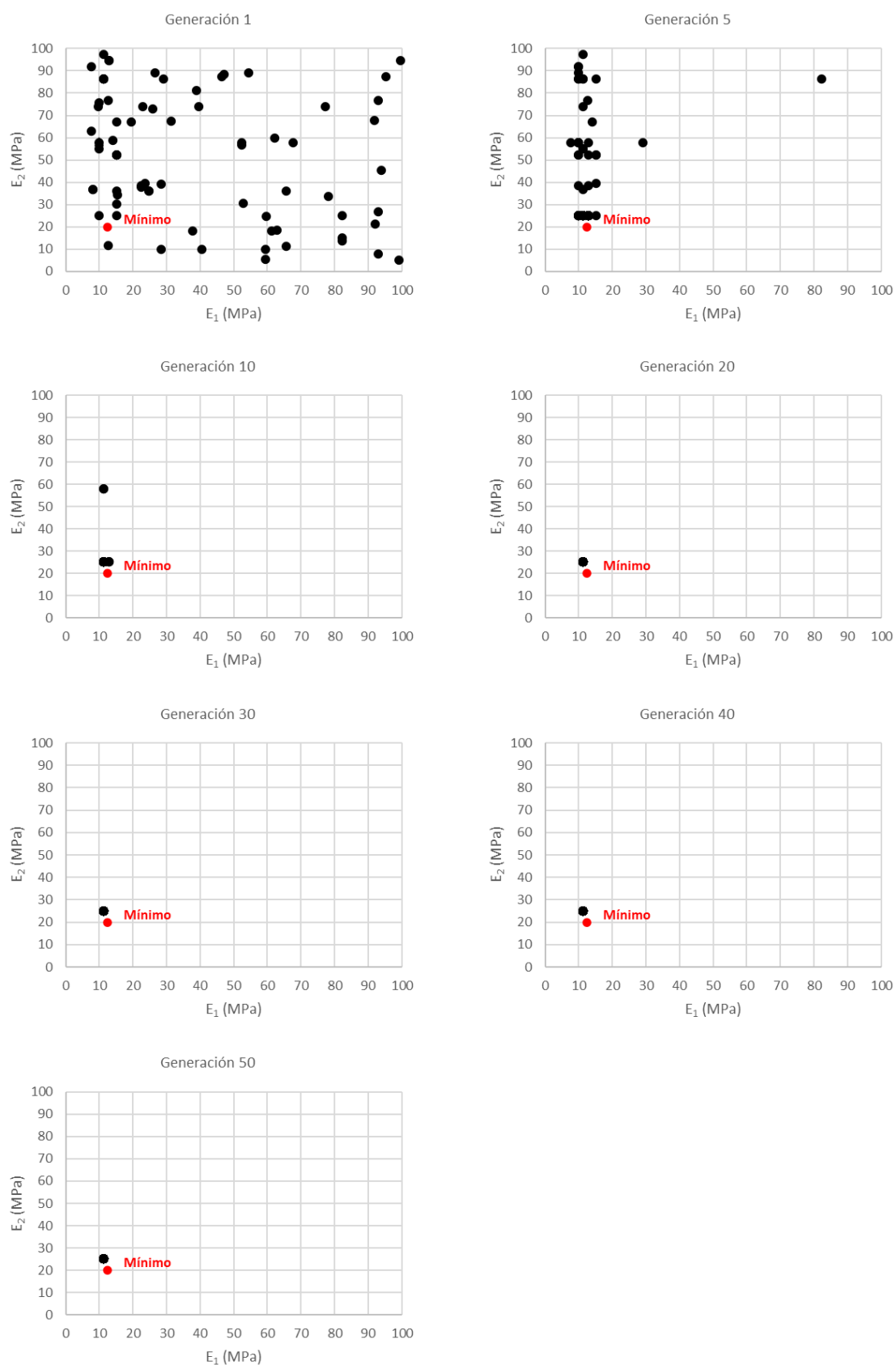


Figura 7-86 – Evolución población en algoritmo genético adaptativo (sin ruido)

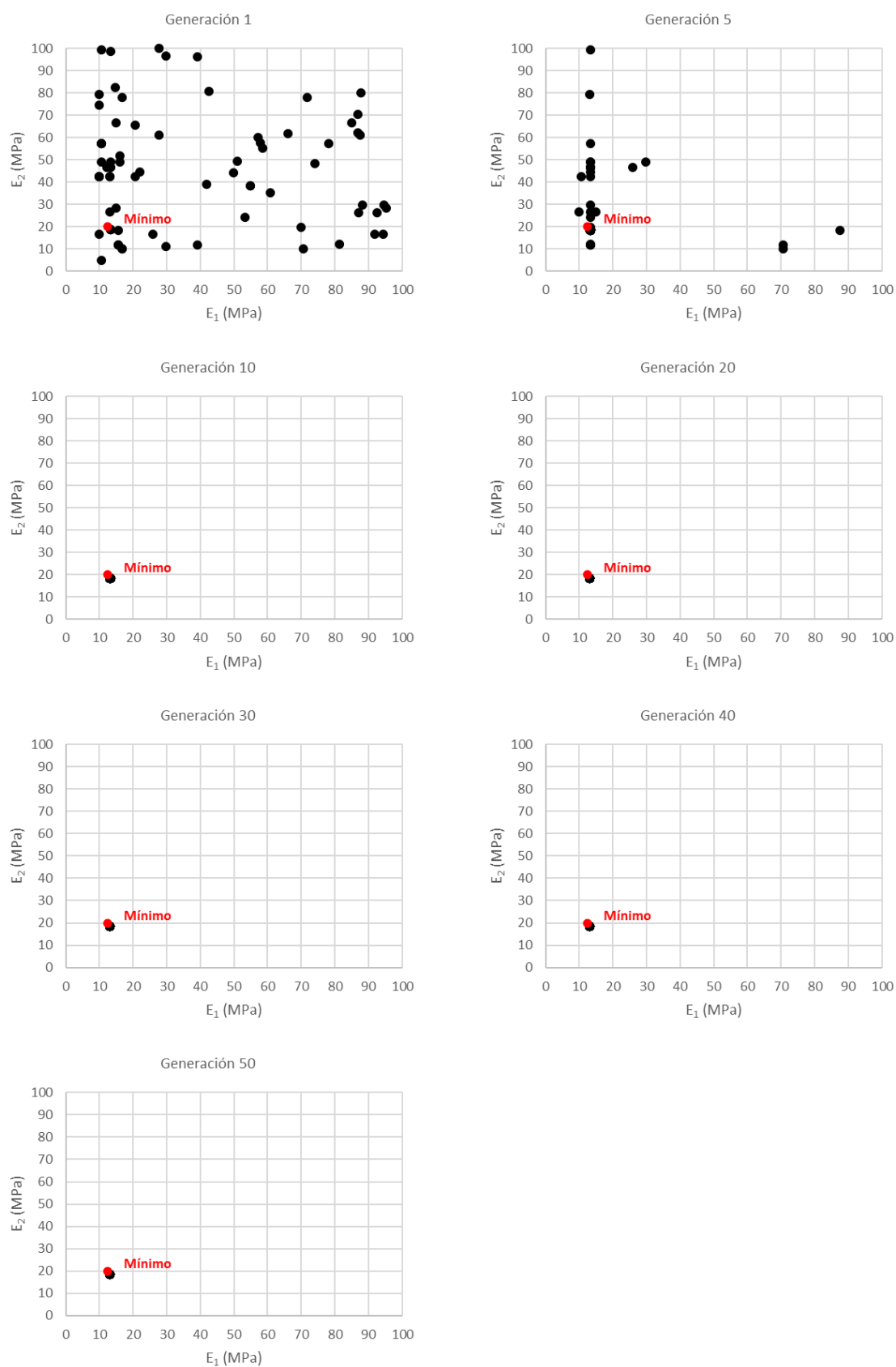


Figura 7-87 – Evolución población en algoritmo genético adaptativo (con ruido)

### 7.4.2.3 Enjambre de partículas

A continuación, se presentan los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo Particle Swarm Optimization (PSO – Enjambre de partículas) para la estimación de los módulos de elasticidad. Este método utiliza una población de 75 partículas que se desplazan en el espacio de búsqueda simulando el comportamiento colectivo de un enjambre. A diferencia de los algoritmos genéticos, en PSO no se produce reemplazo generacional, sino que cada partícula ajusta su posición y velocidad en función de su experiencia individual y la del conjunto del enjambre, permitiendo una exploración continua y cooperativa del espacio de soluciones.

Las siguientes gráficas muestran la evolución de la posición de las partículas a lo largo de distintas iteraciones (Iteración 1, 5, 10, 20, 30, 40 y 50), tanto para el caso ideal (Figura 7-88) como para el caso con ruido (Figura 7-89). En ambos escenarios, se observa una rápida convergencia hacia la región óptima del espacio de búsqueda, con una reducción progresiva en la dispersión de las soluciones. En las primeras generaciones, las partículas exploran un rango amplio de valores de  $E_1$  y  $E_2$ , pero hacia la generación 20 la mayoría se agrupa en torno al mínimo, destacando la eficiencia del algoritmo para identificar regiones prometedoras.

Incluso en presencia de ruido, el enjambre muestra un comportamiento robusto, aunque se detecta una ligera desviación respecto al óptimo teórico, el conjunto de partículas logra localizar soluciones próximas al mínimo global sin evidencias de estancamiento prematuro ni convergencia hacia óptimos locales irrelevantes.

En la Figura 7-90 se observa la comparación entre los asientos medidos y los asientos calculados con los parámetros óptimos obtenidos. Tanto en el caso sin ruido (izquierda) como con ruido (derecha), el algoritmo logra reproducir con alta precisión el perfil teórico de deformaciones, especialmente en las zonas más críticas de la curva. El ajuste es particularmente bueno en la superficie y los primeros metros de profundidad, se mantiene aceptable hasta los 20 metros.

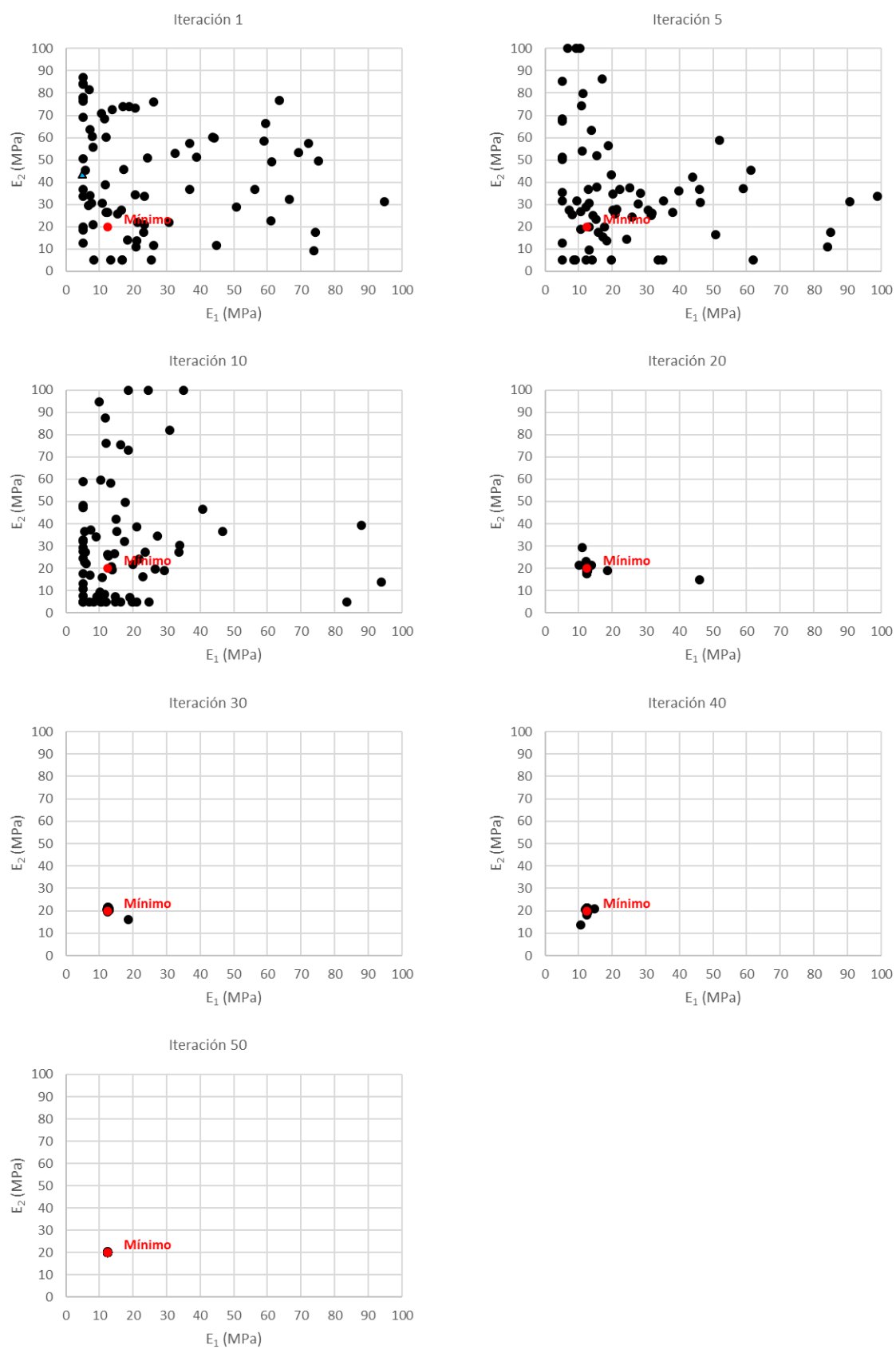


Figura 7-88 – Evolución partículas en enjambre de partículas (sin ruido)

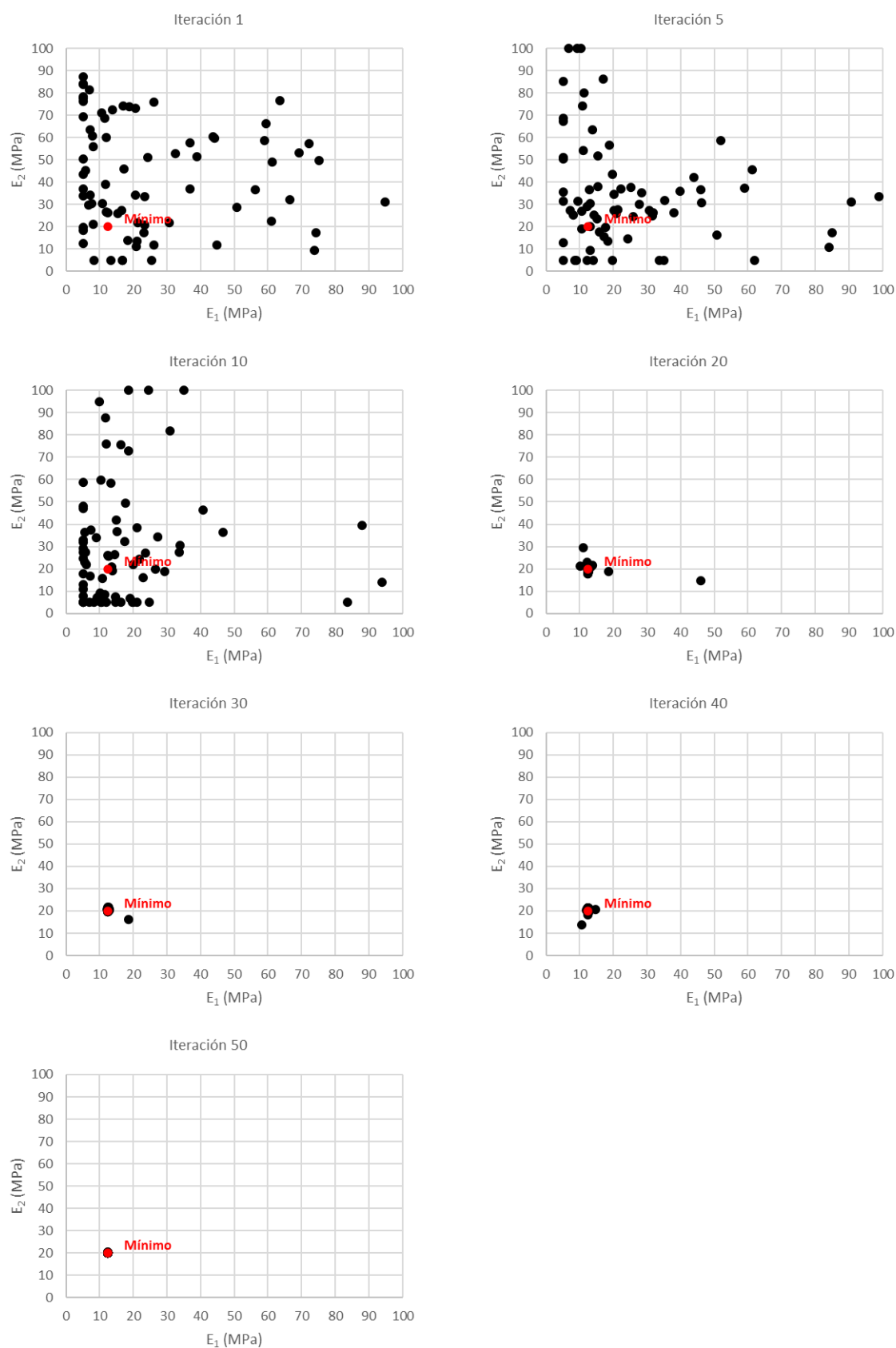


Figura 7-89 – Evolución partículas en enjambre de partículas (con ruido)

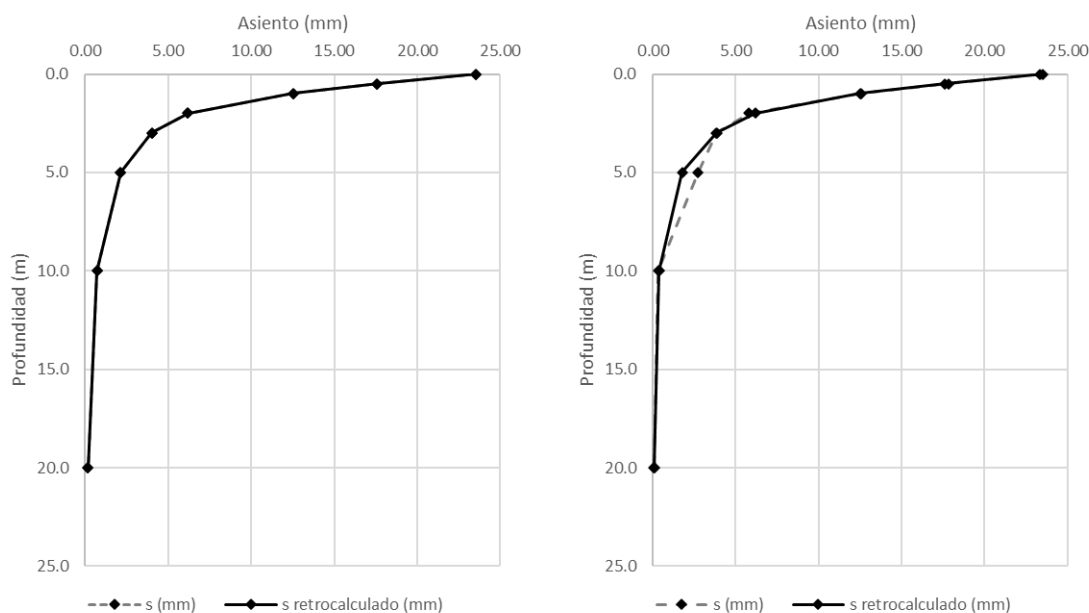


Figura 7-90 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según enjambre de partículas (sin ruido – con ruido)

### 7.4.3 Métodos híbridos

#### 7.4.3.1 Algoritmo genético simple y Gauss-Newton

En este apartado se recogen los resultados del modelo híbrido que combina una búsqueda global, mediante un algoritmo genético simple, y una búsqueda local con el método Gauss-Newton. Los resultados se presentan para ambas etapas.

De acuerdo con los resultados de los métodos evolutivos expuestos en el punto anterior, la evolución de reemplazo generacional hasta alcanzar la convergencia requiere de más de 50 generaciones. No obstante, como se puede ver en la Figura 7-80, se observa un descenso inicial abrupto del reemplazo generacional, correspondiente a la fase de convergencia rápida del algoritmo hacia zonas prometedoras del espacio de búsqueda. A medida que avanzan las generaciones, el reemplazo se estabiliza en torno a un valor medio, señal de que la población ha alcanzado un equilibrio evolutivo.

La fase de convergencia rápida suele darse en 10 generaciones, por lo que se ha configurado la búsqueda global para que el algoritmo genético se ejecuta durante 10 generaciones, empleando una población de 50 individuos, lo que permite una exploración amplia del espacio de

soluciones. La Figura 7-91 ilustra cómo evoluciona la población a lo largo de las generaciones, observándose una clara convergencia hacia una región del espacio de parámetros donde se sitúa el mínimo global. Este punto actúa como valor inicial para la segunda fase del modelo.

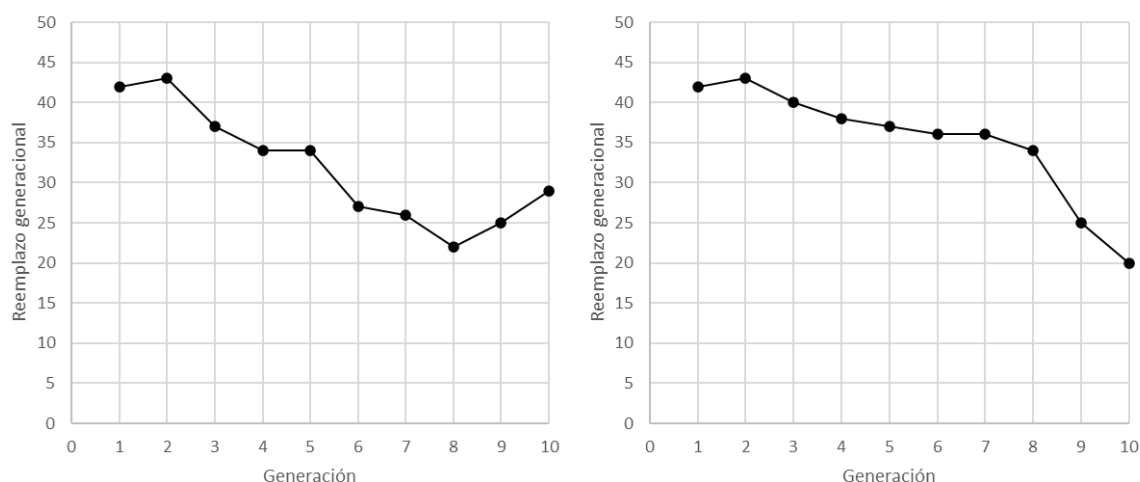


Figura 7-91 – Reemplazo generacional en algoritmo genético simple (sin ruido – con ruido)

La Figura 7-92 (sin ruido) y la Figura 7-93 (con ruido) muestran la evolución de la población en el espacio de búsqueda definido por los parámetros  $E_1$  y  $E_2$ . Se representan distintas generaciones clave (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 10), donde cada punto negro corresponde a un individuo y el punto rojo representa la solución objetivo (mínimo). Puede observarse que, en ambos casos, la población se va concentrando progresivamente en una región óptima del espacio, sin alcanzar una convergencia dentro del error admisible. Sin embargo, en presencia de ruido, los individuos presentan una mayor dispersión en las generaciones intermedias, reflejo del efecto del ruido sobre la precisión del ajuste.



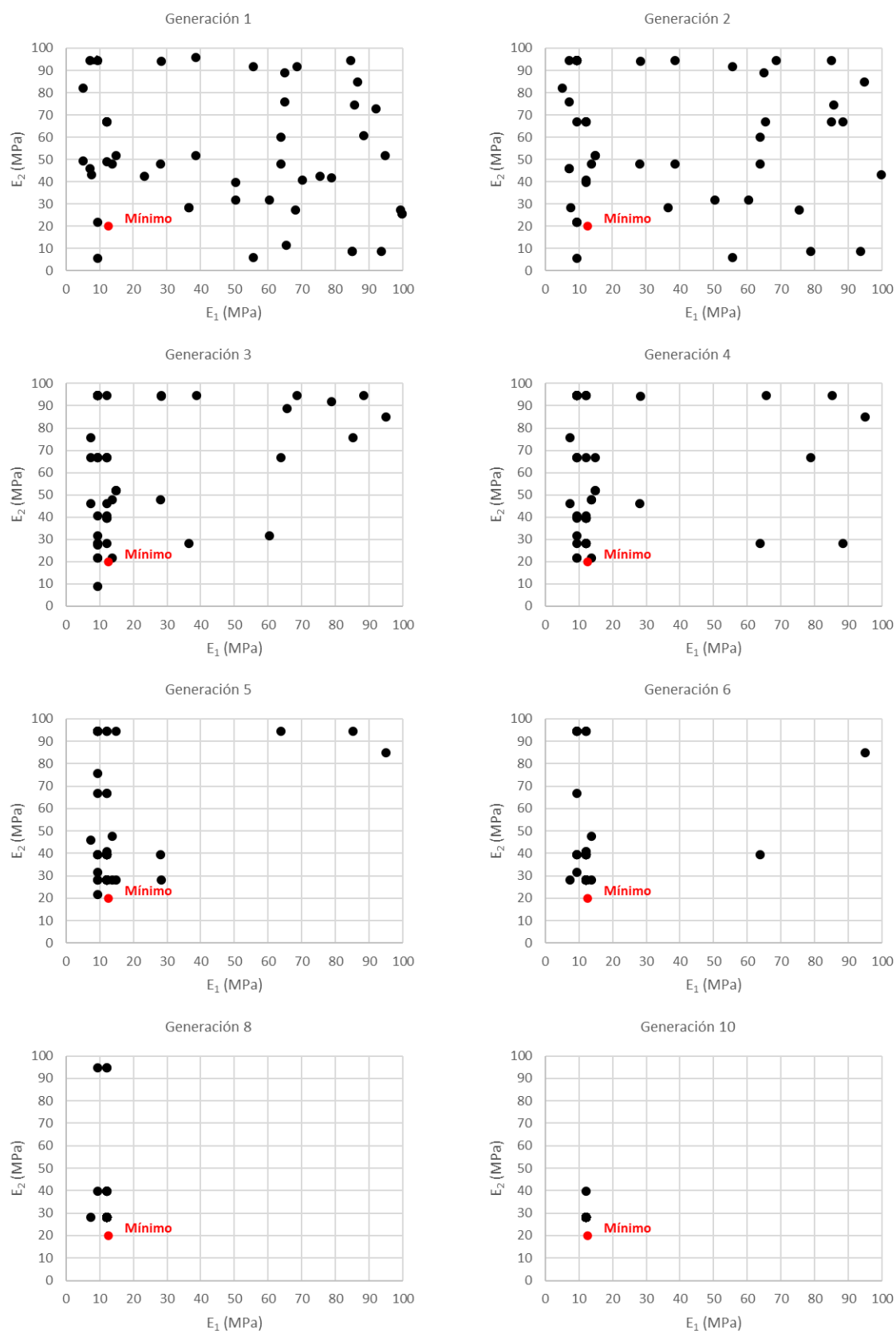


Figura 7-92 – Evolución población en algoritmo genético simple (sin ruido)

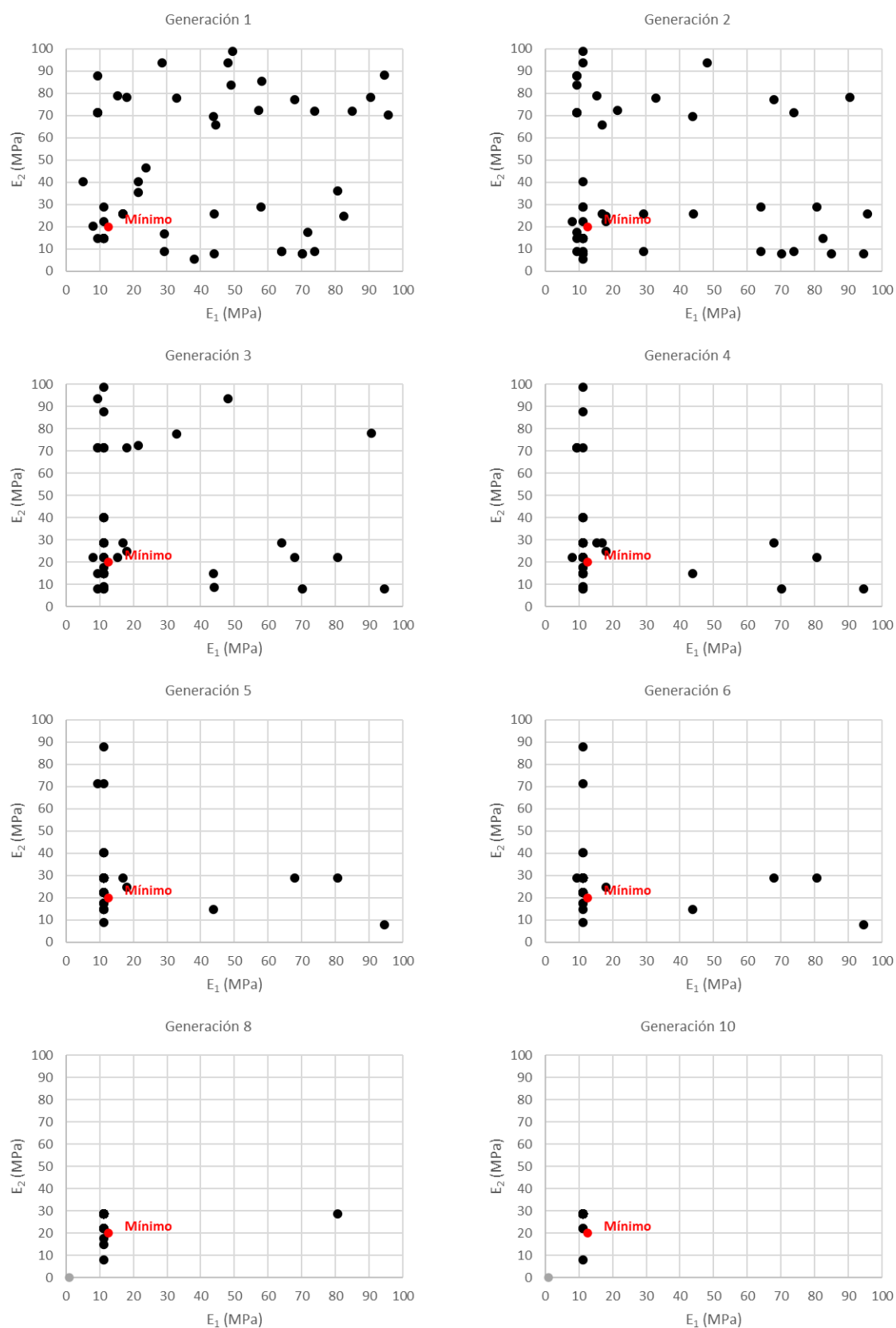


Figura 7-93 – Evolución población en algoritmo genético simple (con ruido)

Posteriormente, se aplica el método Gauss-Newton utilizando como punto de partida la mejor solución obtenida en la fase evolutiva. Tal y como se muestra en la Figura 7-94, esta fase permite una rápida reducción del error cuadrático medio, convergiendo en muy pocas iteraciones a una solución óptima.

La Figura 7-95 resume gráficamente el proceso, donde se observa la evolución del error desde el punto inicial (tras la fase genética) hasta la solución final optimizada mediante Gauss-Newton.

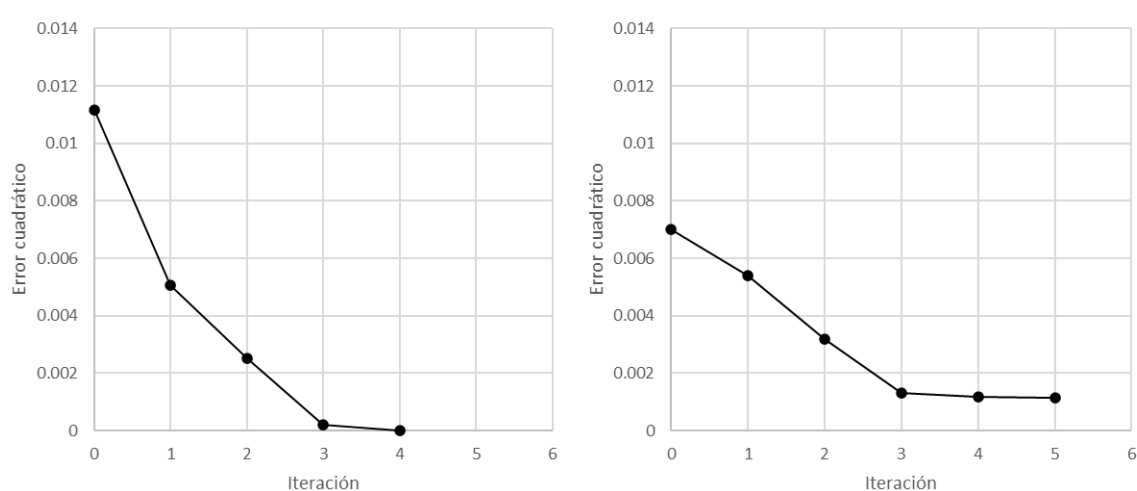


Figura 7-94 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

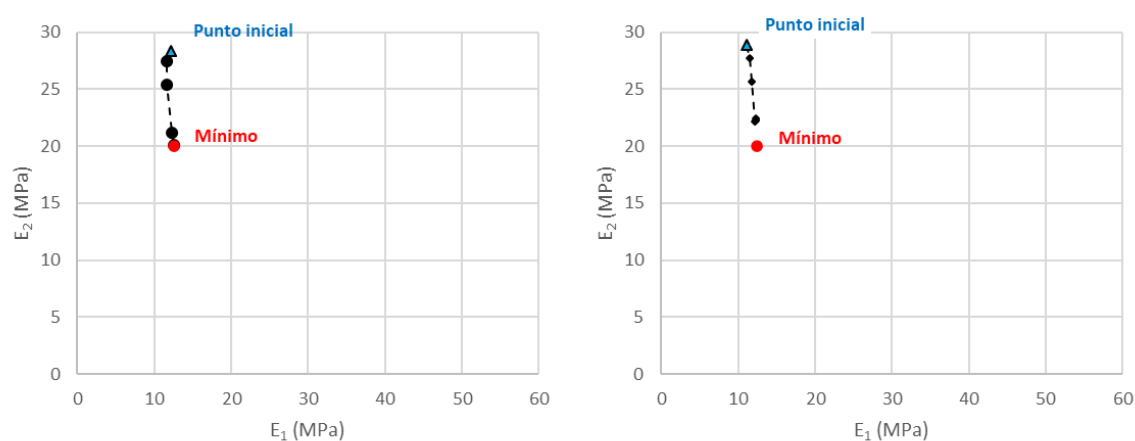


Figura 7-95 – Mapa trayectoria  $E_1$  y  $E_2$  para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

Finalmente, la Figura 7-96 muestra el excelente ajuste entre los valores medidos de asiento y los retrocalculados a partir de los parámetros obtenidos con este enfoque híbrido.

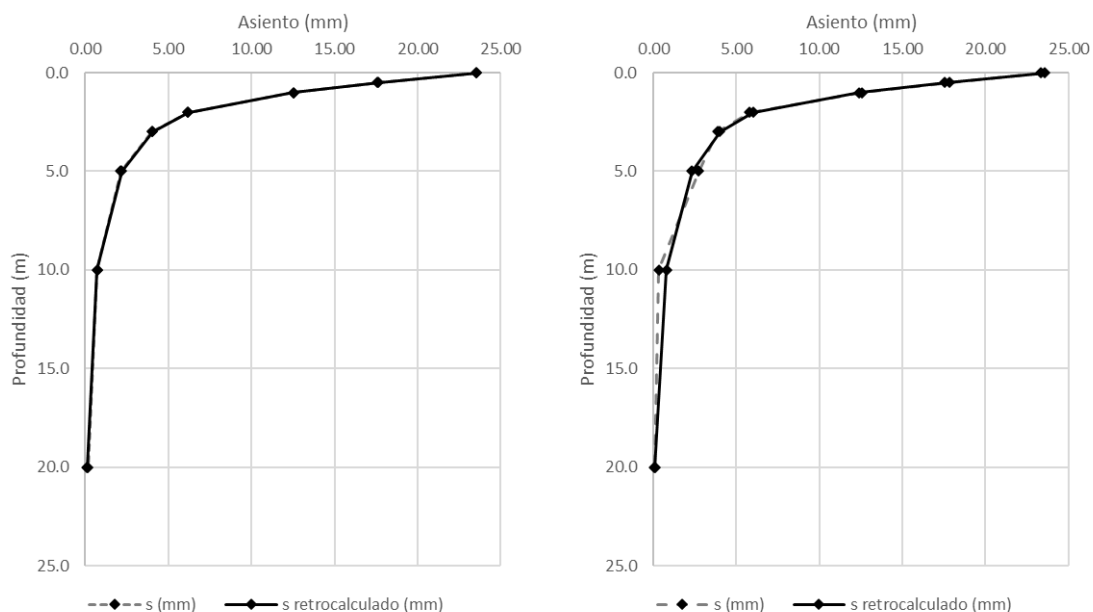


Figura 7-96 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según Genético Simple y Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

#### 7.4.3.2 Algoritmo genético adaptativo y Gauss-Newton

En esta sección se presentan los resultados del modelo híbrido que integra una primera fase de exploración global mediante algoritmo genético adaptativo, seguida de una optimización local mediante el método Gauss-Newton. Esta combinación permite beneficiarse de la capacidad exploratoria del algoritmo genético adaptativo y de la rápida convergencia del método de mínimos cuadrados.

De acuerdo con los resultados de los métodos evolutivos expuestos en el punto anterior, la evolución de reemplazo generacional hasta alcanzar la convergencia requiere de más de 50 generaciones. No obstante, como se puede ver en la Figura 7-84, se observa un descenso inicial abrupto del reemplazo generacional, correspondiente a la fase de convergencia rápida del algoritmo hacia zonas prometedoras del espacio de búsqueda. A medida que avanzan las generaciones, el reemplazo se estabiliza en torno a un valor medio, señal de que la población ha alcanzado un equilibrio evolutivo.

La fase de convergencia rápida suele darse en 10 generaciones, por lo que se ha configurado la búsqueda global para que el algoritmo genético se ejecuta durante 10 generaciones, empleando una población de 50 individuos, lo que permite una exploración amplia del espacio de soluciones. La Figura 7-97 ilustra cómo evoluciona la población a lo largo de las generaciones, observándose una clara convergencia hacia una región del espacio de parámetros donde se sitúa el mínimo global. Este punto actúa como valor inicial para la segunda fase del modelo.

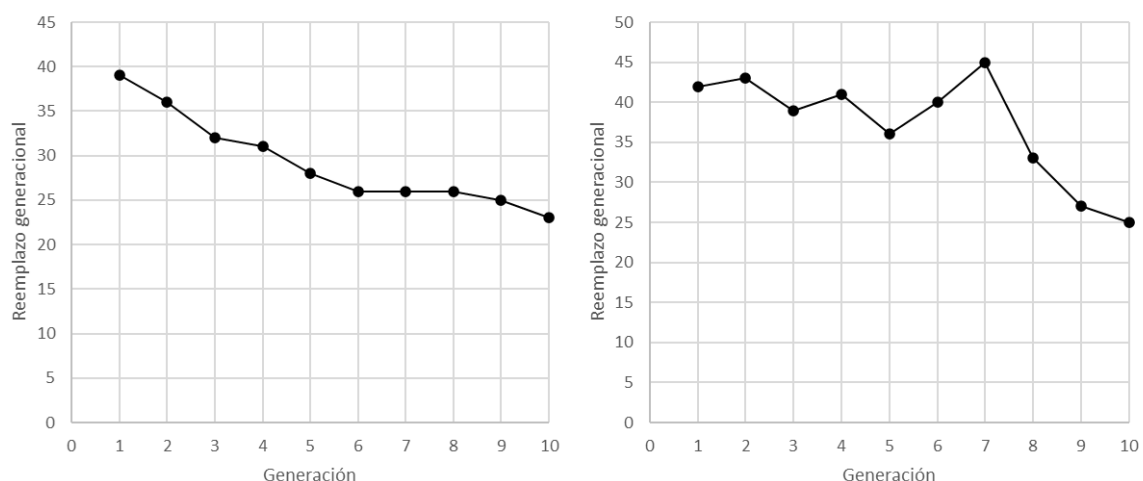


Figura 7-97 – Reemplazo generacional en algoritmo genético adaptativo (sin ruido – con ruido)

La Figura 7-98 (sin ruido) y la Figura 7-99 (con ruido) muestran la evolución espacial de la población en el plano definido por los parámetros  $E_1$  y  $E_2$ . A medida que avanza el proceso evolutivo, los individuos tienden a concentrarse en zonas cada vez más cercanas al mínimo global. No obstante, el ruido en los datos induce una ligera dispersión adicional en las generaciones intermedias, lo que pone de manifiesto la robustez del algoritmo para mantener el enfoque en soluciones viables. Se representan distintas generaciones clave (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 10), donde cada punto negro corresponde a un individuo y el punto rojo representa la solución objetivo (mínimo).

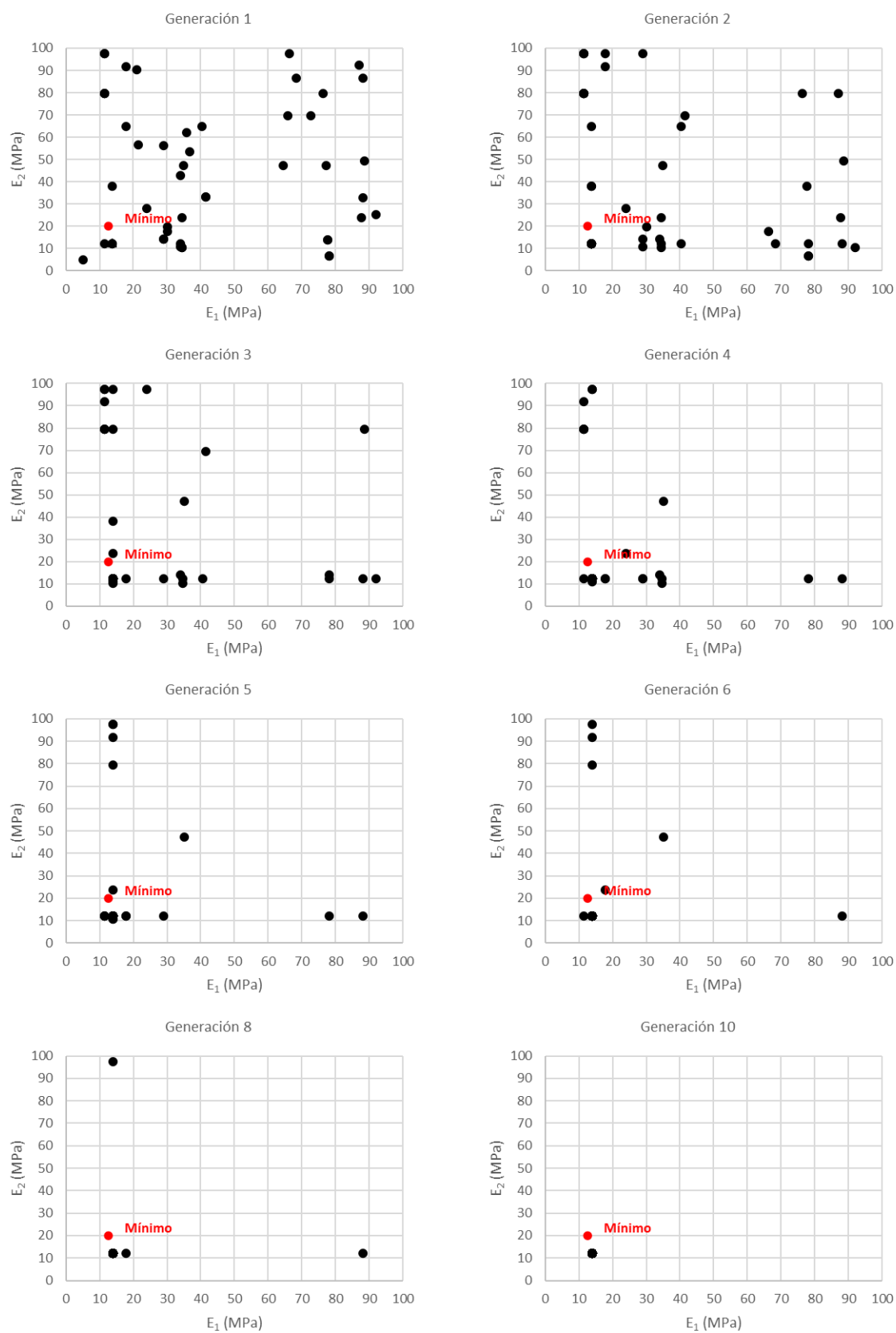


Figura 7-98 – Evolución población en algoritmo genético adaptativo (sin ruido)

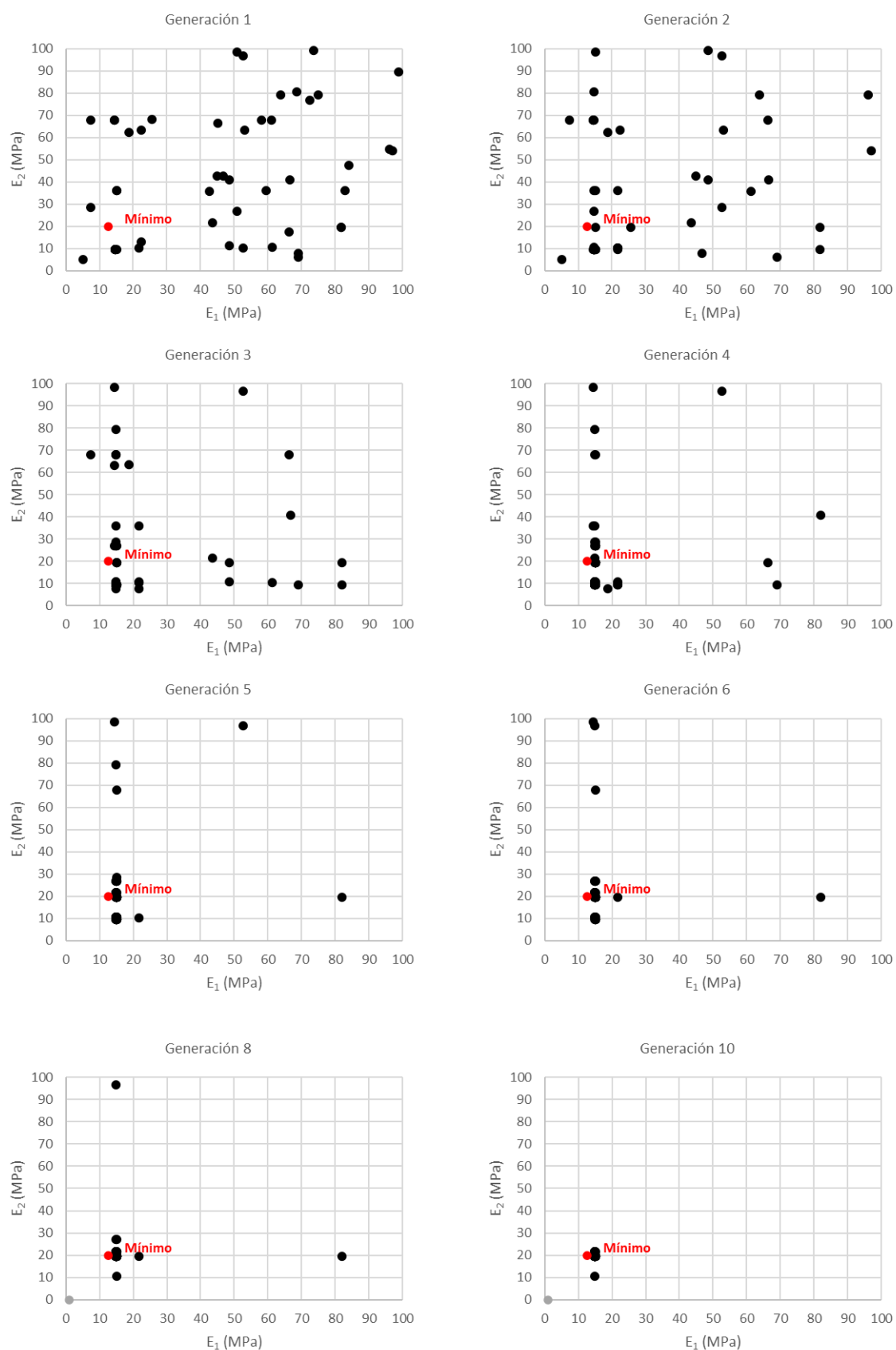


Figura 7-99 – Evolución población en algoritmo genético adaptativo (con ruido)

Concluida la etapa evolutiva, se aplica el método Gauss-Newton tomando como punto inicial el mejor individuo obtenido por el algoritmo genético. Como se muestra en la Figura 7-100, la convergencia es rápida y eficaz, logrando una reducción significativa del error cuadrático medio en nueve iteraciones.

La Figura 7-101 resume gráficamente el proceso, donde se observa la evolución del error desde el punto inicial (tras la fase genética) hasta la solución final optimizada mediante Gauss-Newton. En ambos escenarios (con y sin ruido), se aprecia una aproximación directa al mínimo, con una mejora sustancial respecto al punto de partida.

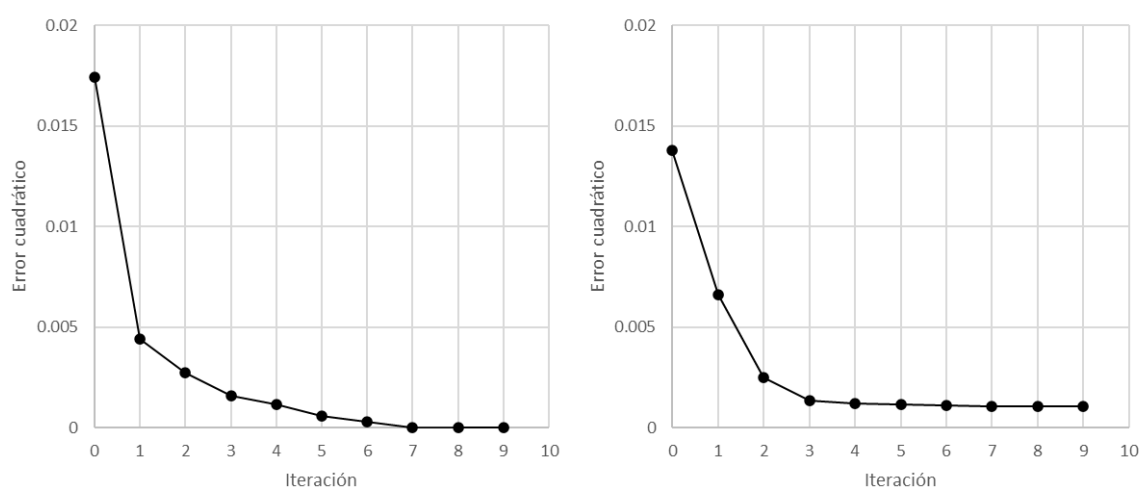


Figura 7-100 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

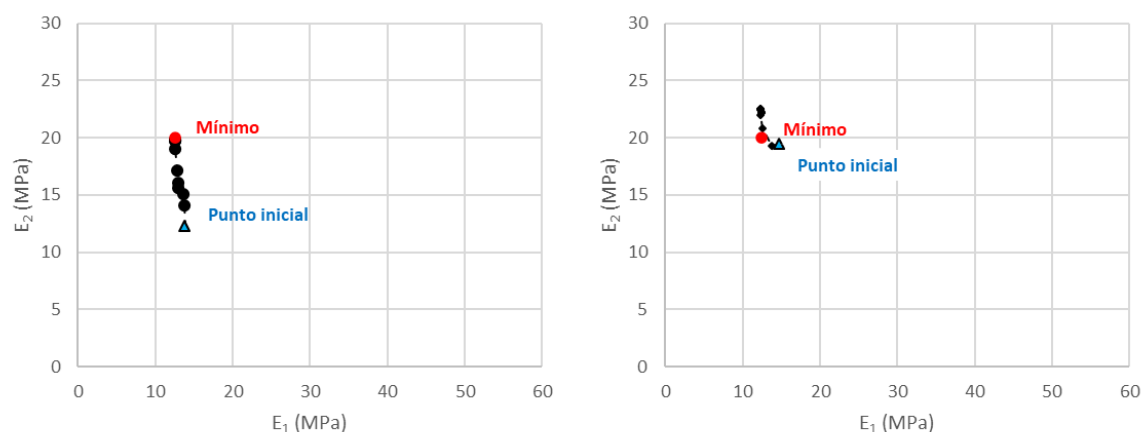


Figura 7-101 – Mapa trayectoria  $E_1$  y  $E_2$  para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)



Finalmente, la Figura 7-102 evidencia el ajuste entre los valores de asiento medidos y aquellos obtenidos con los módulos  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados mediante este modelo híbrido. Tanto en condiciones ideales como en presencia de ruido, el ajuste es muy preciso.

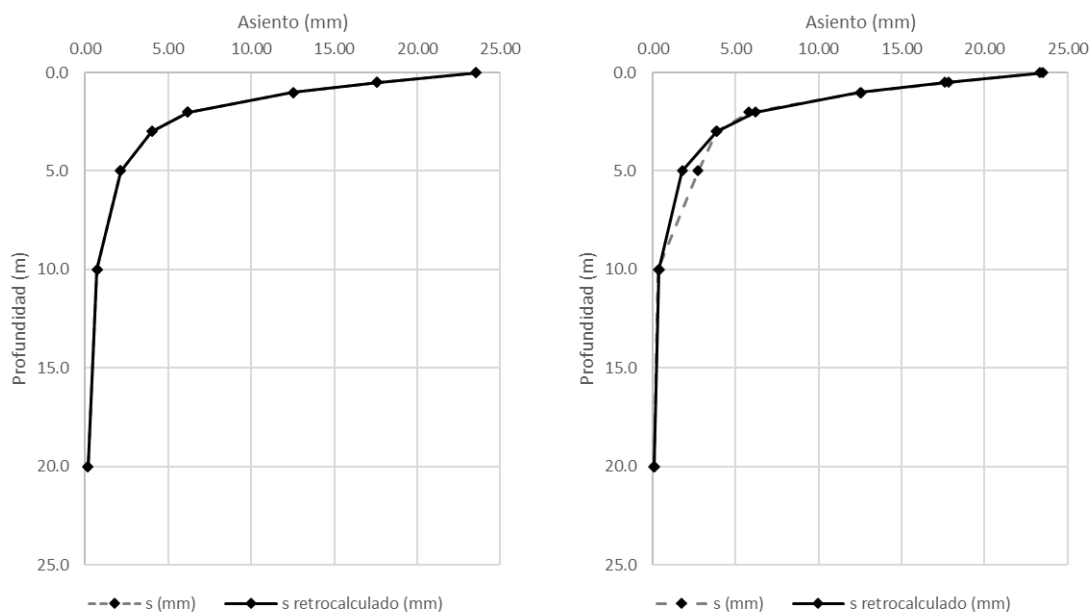


Figura 7-102 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según Genético Simple y Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

#### 7.4.3.3 Enjambre de partículas y Gauss-Newton

En este apartado se presentan los resultados correspondientes a la técnica híbrida que combina una exploración global mediante *Particle Swarm Optimization* (enjambre de partículas) y una fase de refinamiento local utilizando el método Gauss-Newton.

La búsqueda global se realiza con una población de 50 partículas, que actualizan su posición y velocidad en función de su mejor experiencia personal y la de sus compañeras. Con base en los resultados de este método como único algoritmo de optimización, es necesario realizar 59 iteraciones hasta alcanzar la convergencia optima, pero el acercamiento al mínimo es más significativo en las primeras 20 iteraciones. Con el fin de poder comparar los métodos híbridos utilizados, se considera que la búsqueda global está compuesta por 10 iteraciones (como en los dos casos anteriores), a pesar de que el resultado de la búsqueda global pueda ser menos prometedor que en los casos anteriores.

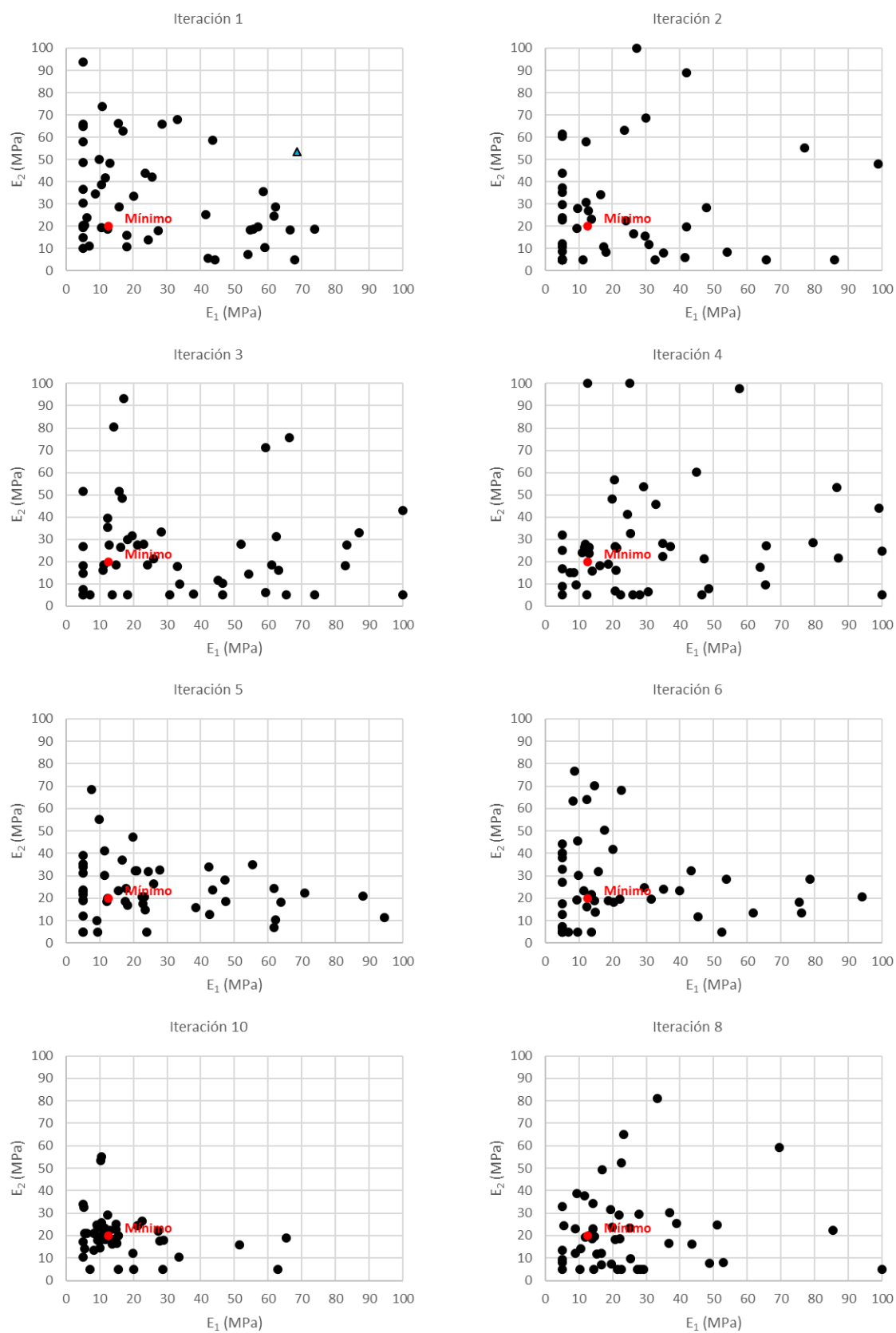


Figura 7-103 – Evolución partículas en enjambre de partículas (sin ruido)

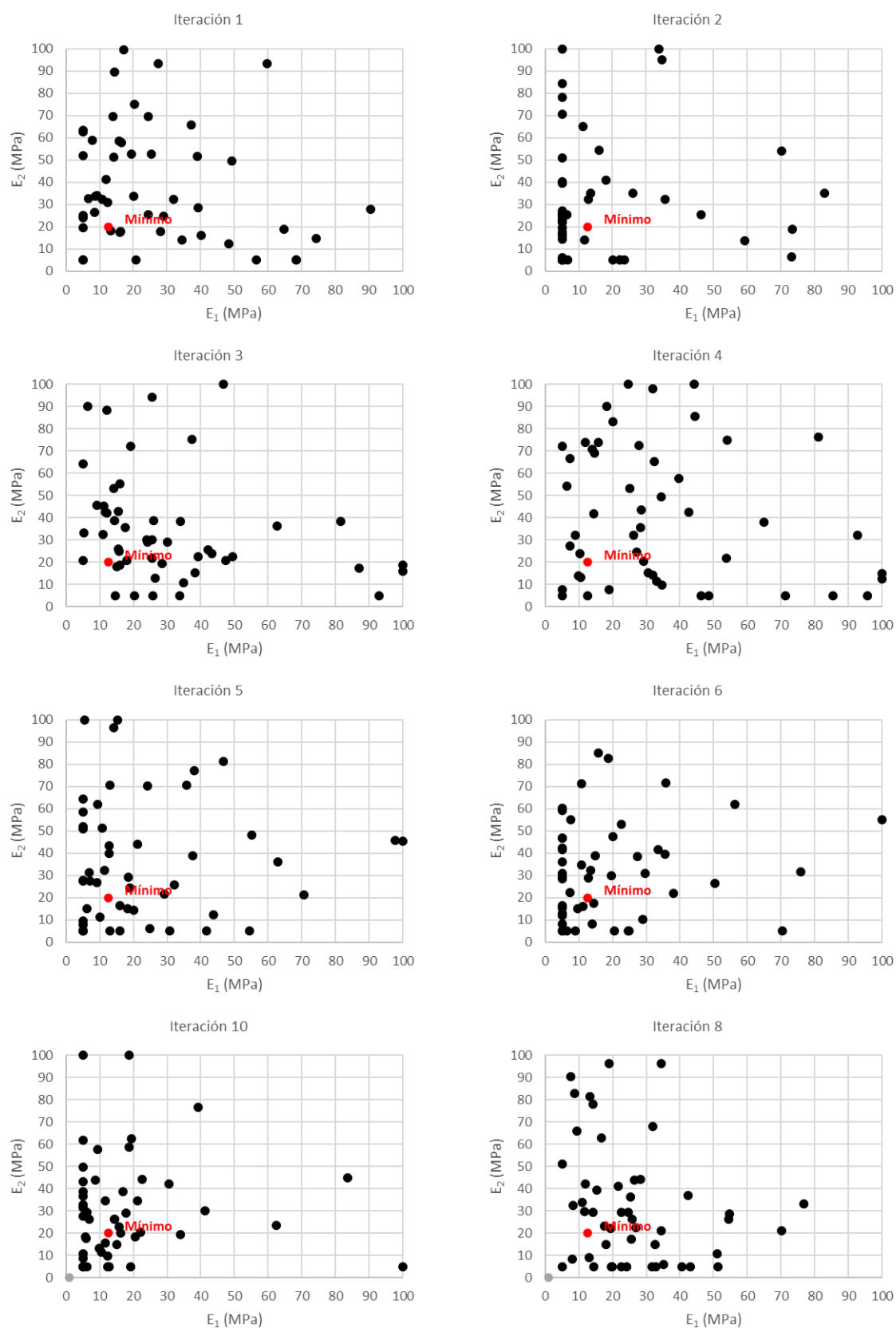


Figura 7-104 – Evolución partículas en enjambre de partículas (con ruido)

En la Figura 7-103 (sin ruido) y la Figura 7-104 (con ruido) se muestran la evolución de las partículas en el espacio de búsqueda definido por los parámetros  $E_1$  y  $E_2$ . Se representan distintas iteraciones clave (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 10), entendidas aquí como instantes discretos de actualización colectiva, donde cada punto negro corresponde a una partícula y el punto rojo representa la solución objetivo (mínimo). En dichas figuras se observa una progresiva concentración de las partículas hacia la región óptima, tanto en el caso sin ruido como con ruido, aunque en este último se aprecia mayor dispersión intermedia debido a la incertidumbre de los datos.

El método Gauss-Newton se aplica a continuación, tomando como punto de partida el mejor resultado obtenido por el algoritmo evolutivo. La Figura 7-105 muestra la evolución del error cuadrático medio durante esta fase. La convergencia es rápida, alcanzándose el mínimo en siete iteraciones. En presencia de ruido son necesarias hasta 10 iteraciones, adicionalmente, el error final es ligeramente superior, pero sigue siendo aceptable.

La Figura 7-106 resume gráficamente el proceso, donde se observa la evolución de los módulos de elasticidad calculados para cada iteración desde el punto inicial (tras la fase de búsqueda global) hasta la solución final optimizada mediante Gauss-Newton. En ambos escenarios (con y sin ruido), se aprecia una aproximación directa al mínimo, con una mejora sustancial respecto al punto de partida.

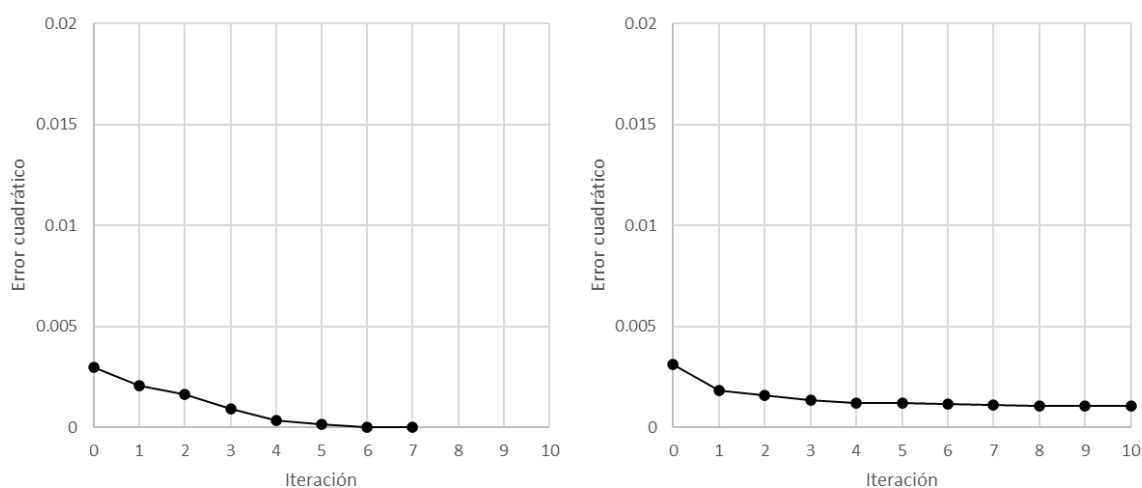


Figura 7-105 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

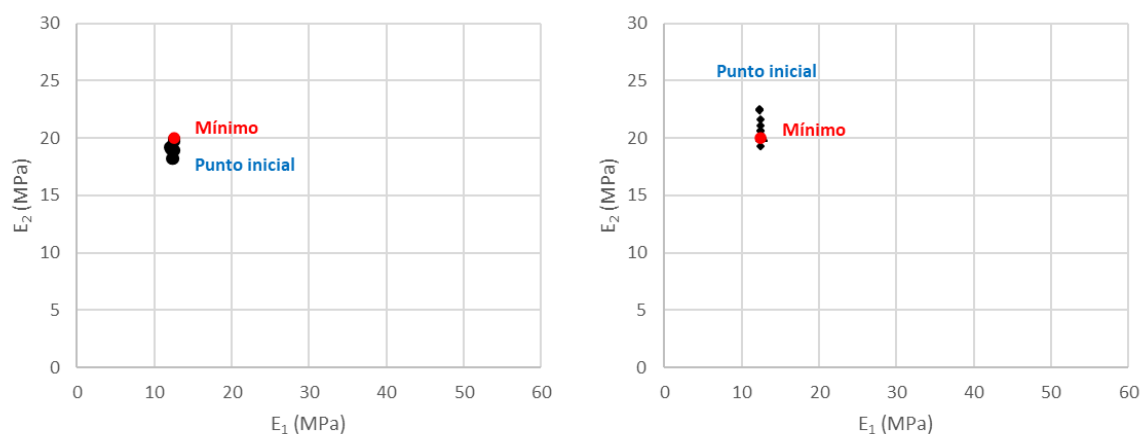


Figura 7-106 – Mapa trayectoria  $E_1$  y  $E_2$  para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

Finalmente, la Figura 7-107 compara los perfiles de asentamiento medidos y retrocalculados a partir de los valores estimados de los módulos de elasticidad. En ambos casos (sin ruido y con ruido), el modelo reproduce con gran precisión el comportamiento del terreno, destacando el buen acoplamiento de esta técnica híbrida. En comparación con otros enfoques, este método ha demostrado un mejor ajuste final que la combinación genética simple + Gauss-Newton o incluso genética adaptativa + Gauss-Newton.

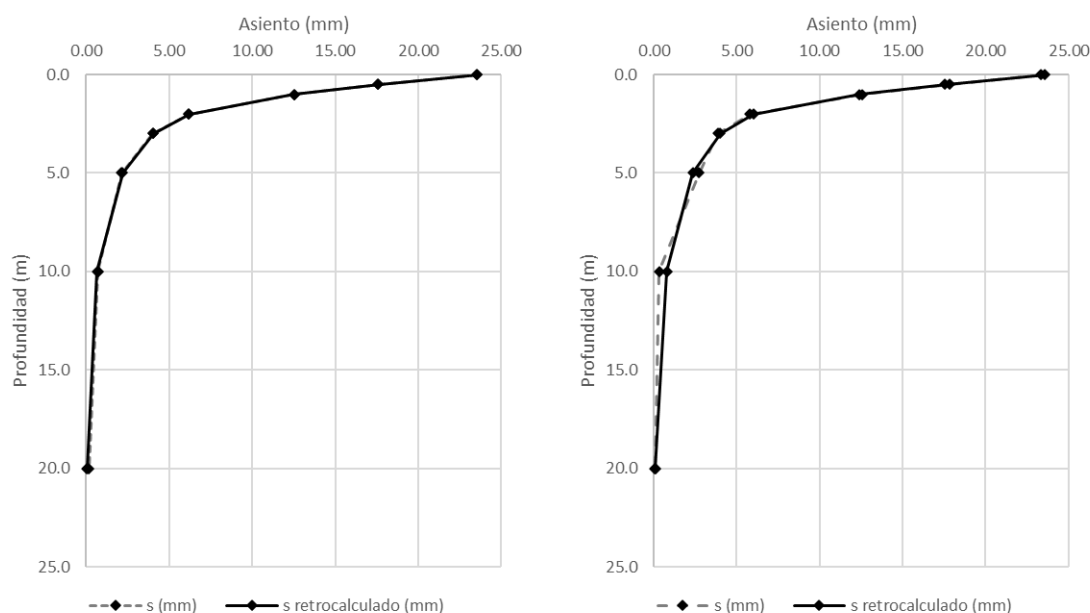


Figura 7-107 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según enjambre de partículas y Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

#### 7.4.3.4 Machine Learning y Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt

En este apartado se presentan los resultados obtenidos con la metodología híbrida propuesta en este Trabajo Final de Máster, la cual constituye una de las principales contribuciones del trabajo. A diferencia de los enfoques híbridos expuestos anteriormente, los cuales combinan algoritmos evolutivos en la fase de búsqueda global, se plantea aquí una estrategia basada en la combinación de técnicas de *Machine Learning* (redes neuronales artificiales) para la búsqueda global, junto con el método de Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt como optimización local.

Esta propuesta se fundamenta en la capacidad de los modelos neuronales para capturar relaciones complejas entre variables geotécnicas, proporcionando un punto de partida robusto, y de bajo coste computacional, para la fase de ajuste local.

A nivel conceptual, la diferencia fundamental respecto a metodologías previas radica en que el modelo inicial no se define arbitrariamente ni mediante búsquedas aleatorias, sino que se entrena con datos de campo y sintéticos generados mediante correlaciones empíricas entre los resultados del ensayo SPT corregido  $N_{1,60}$ , la profundidad del estrato, la distribución granulométrica y el módulo de elasticidad  $E$ .

Se emplea una red neuronal tipo *Multilayer Perceptron* (MLP), con una configuración tipo *feedforward* de una única capa oculta con 10 neuronas. La función de activación empleada en la capa oculta es la función sigmoide, mientras que en la capa de salida se emplea una función lineal, habitual en modelos de regresión.

El modelo se ha entrenado empleando como datos de entrada el número de golpes corregido del ensayo SPT ( $N_{1,60}$ ) y el tipo de suelo (arenas limosas, arenas limpias o arenas con gravas). La variable de salida del modelo es el módulo de elasticidad. Para ello se ha utilizado el algoritmo Levenberg-Marquardt, particularmente útil en redes pequeñas y con conjuntos de datos de tamaño moderado, como es el caso de estudio.

La división del conjunto de datos se realiza automáticamente por MATLAB en tres subconjuntos:

- 70% para entrenamiento
- 15% para validación (Control del sobreajuste durante el entrenamiento)
- 15% para test (evaluación independiente de rendimiento)

Este reparto permite evitar sobreajuste y comprobar que el modelo mantiene su capacidad predictiva con datos no vistos durante el entrenamiento.

En la Figura 7-108 se presenta la evolución del error cuadrático medio (MSE) a lo largo de las 69 épocas empleadas durante el entrenamiento de la red neuronal mediante el algoritmo Levenberg-Marquardt. El gráfico muestra los errores correspondientes a los conjuntos de entrenamiento (azul), validación (verde) y prueba (rojo), así como la mejor iteración del modelo (línea discontinua vertical y círculo). Se observa que el modelo converge rápidamente en las primeras épocas, alcanzando una región estable de error mínimo en torno a la época 61, momento en el cual se registra el mejor rendimiento de validación con un  $MSE \approx 0.03$ . La curva de validación se mantiene por debajo de la de entrenamiento durante la mayor parte del proceso, lo que indica una buena capacidad de generalización del modelo y ausencia de sobreajuste. El error de prueba permanece también próximo al de entrenamiento, lo que sugiere que el modelo tiene un comportamiento coherente sobre datos no vistos.

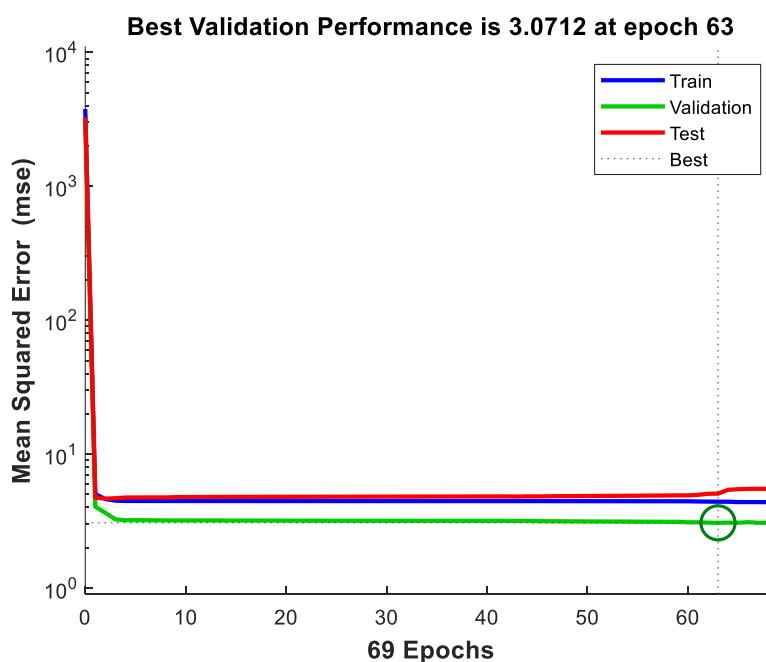


Figura 7-108 – Curva de aprendizaje red neuronal

En la Figura 7-109 se representa el histograma del error de predicción de la red neuronal para los tres subconjuntos (entrenamiento, validación y prueba). La distribución es simétrica y

centrada en torno al error cero, con una alta concentración de errores pequeños, lo que indica un buen ajuste general del modelo en todas las fases.

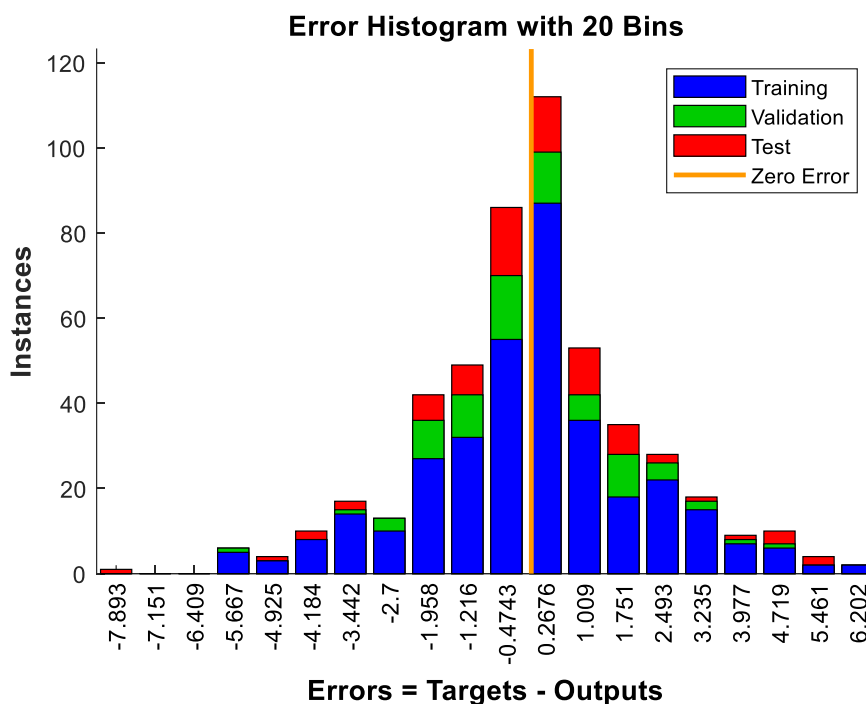


Figura 7-109 – Histograma del error de predicción de la red neuronal

En la Figura 7-111 se ilustran las curvas de evolución del gradiente, el parámetro de actualización  $\mu$  del algoritmo Levenberg-Marquardt, y el número de fallos de validación. El descenso del gradiente y la estabilización de  $\mu$  indican que el modelo ha aprendido progresivamente hasta alcanzar la convergencia. Los fallos de validación son escasos, lo cual valida aún más la estabilidad del modelo.

En la Figura 7-111 se representa la comparación entre los valores reales del módulo de elasticidad y las estimaciones proporcionadas por el modelo para todo el conjunto de datos. La nube de puntos sigue fielmente la bisectriz, lo que indica una alta precisión del modelo y la ausencia de sesgos sistemáticos relevantes.



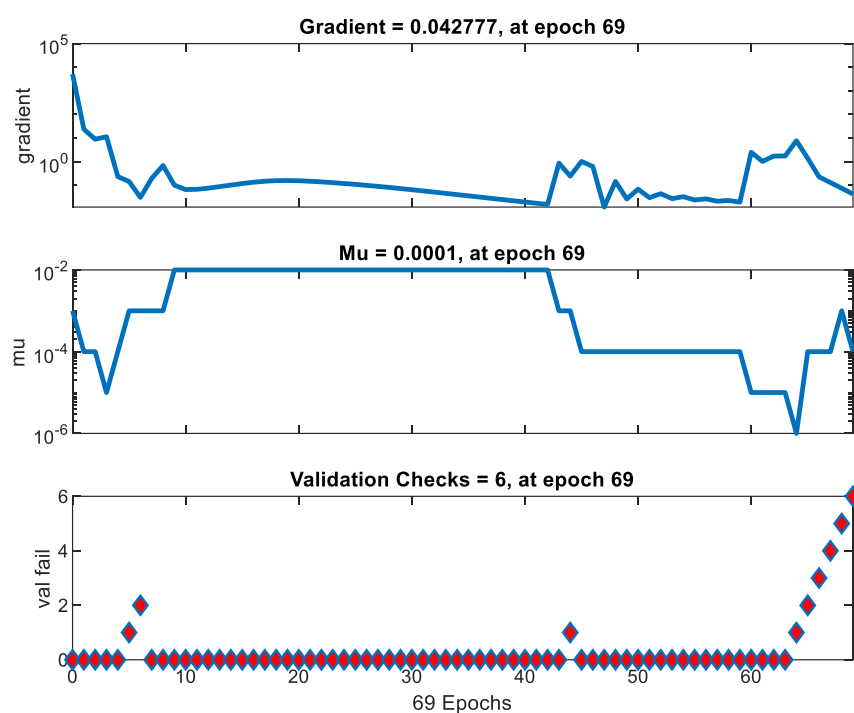


Figura 7-110 – Curvas de gradiente, parámetro de ajuste y fallos de validación

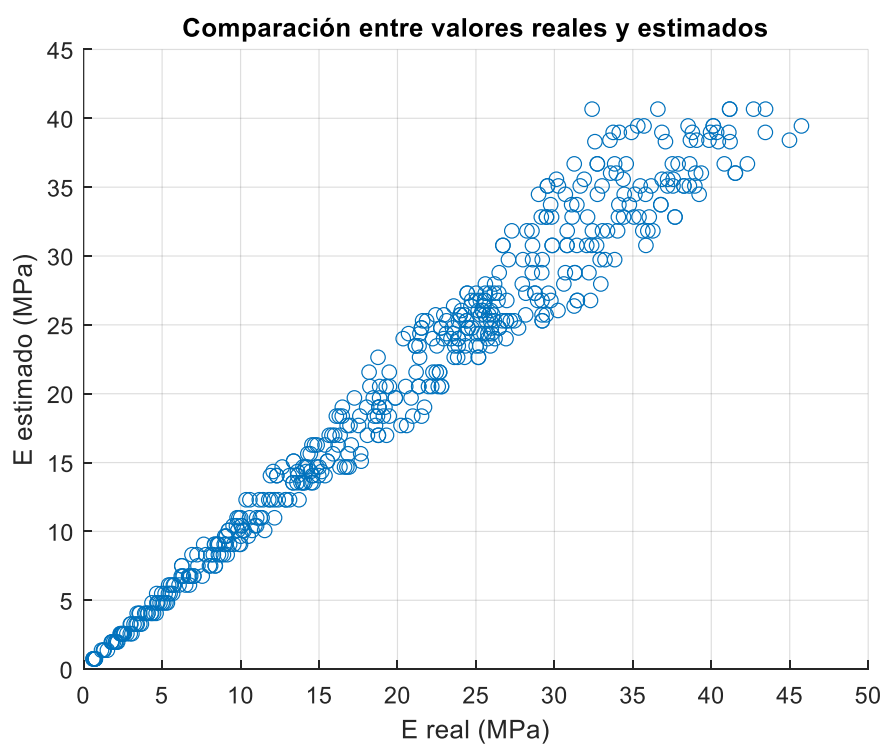


Figura 7-111 – Comparación valores reales y estimados por red neuronal

En la Figura 7-112 se muestra una visión desglosada del ajuste entre datos reales y predichos para cada subconjunto (entrenamiento, validación, test y conjunto completo), con las correspondientes rectas de regresión. En todos los casos se obtienen coeficientes de correlación superiores a 0.97, lo cual indica un alto grado de ajuste en todas las fases.

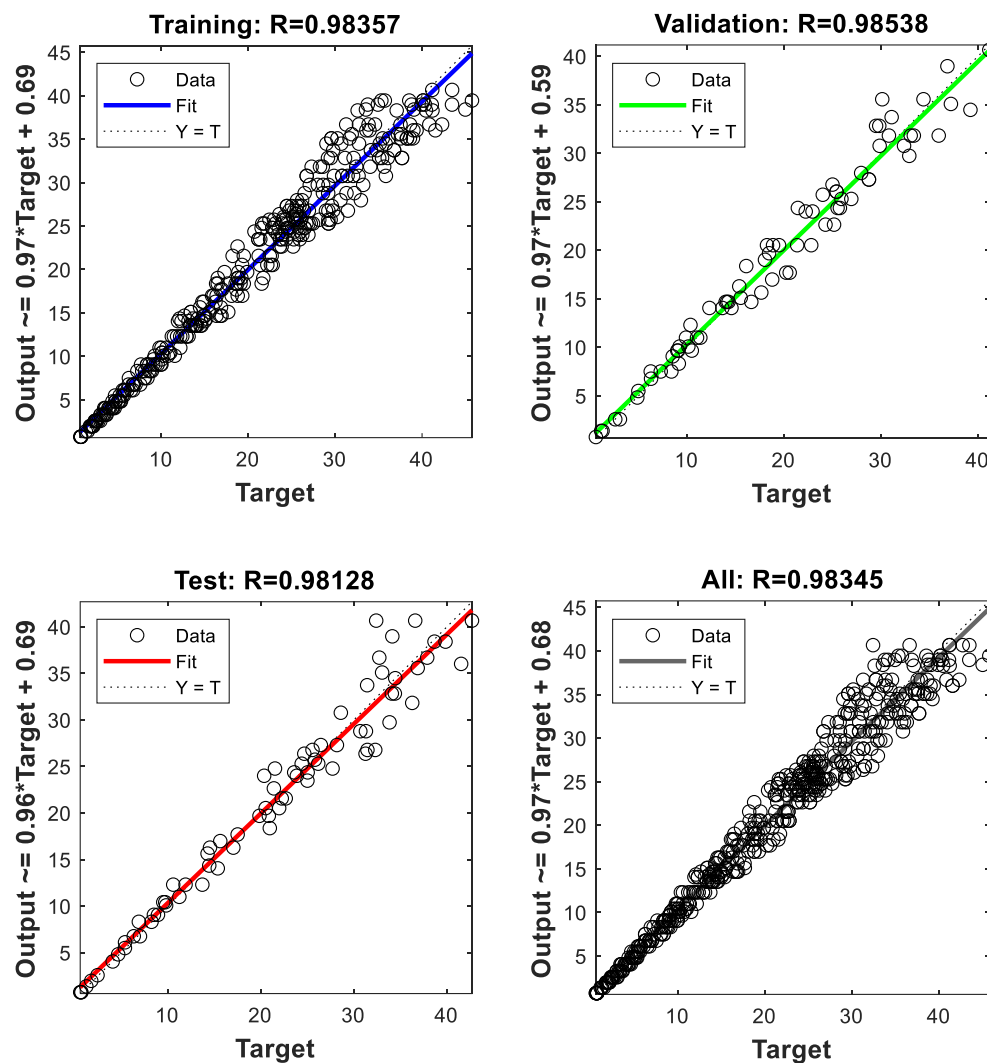


Figura 7-112 – Representación de correlación por subconjuntos

Finalmente, la Figura 7-113 muestra un análisis de sensibilidad en el que se evalúa la respuesta del modelo ante variaciones de  $N_{1,60}$  para un tipo de suelo fijo (arena limosa). Se observa una relación creciente prácticamente lineal, coherente con las correlaciones empleadas para el entrenamiento, lo que valida la capacidad del modelo para generalizar correctamente.

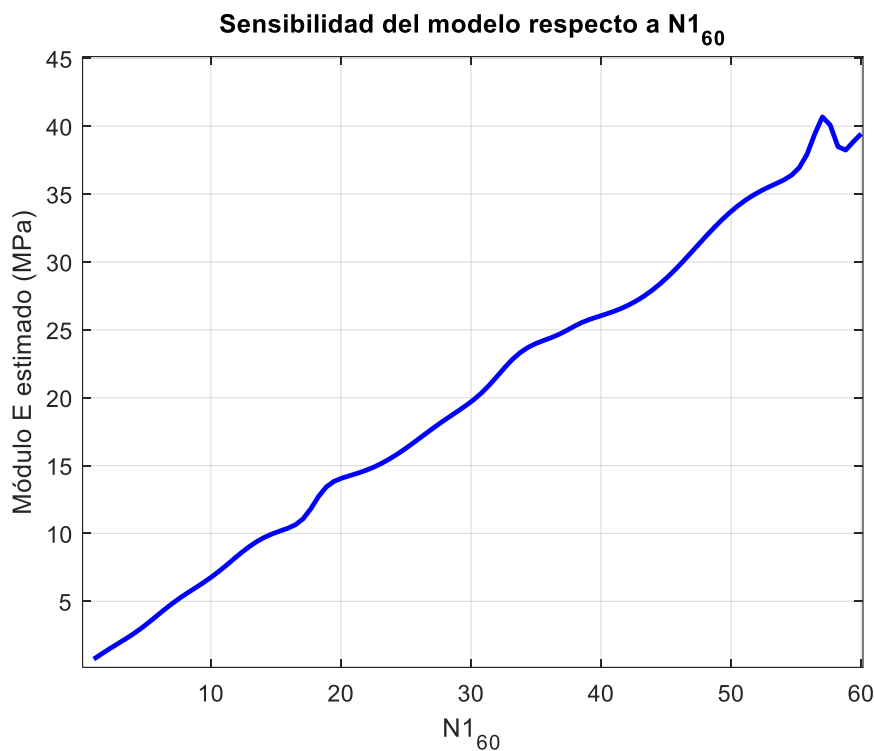


Figura 7-113 – Sensibilidad modelo red neuronal respecto a  $N_{1,60}$

El modelo entrenado ha sido utilizado para estimar el módulo de elasticidad del caso de estudio sintético. Los valores de entrada utilizados fueron los siguientes:

- Valores de  $N_{1,60}$
- Profundidad: entre 1 y 30m
- Tipo de suelo: clasificado como arena limosa (primeros 15m) o arena limpia (por debajo de 15m).

Los valores del número de golpes del ensayo SPT se presentan en la Figura 7-114, donde se muestra el resultado de campo y corregido frente a la profundidad. El perfil obtenido muestra una variación progresiva, con golpes más bajos en superficie (arena limosa) y un incremento moderado en profundidad (arena limpia).

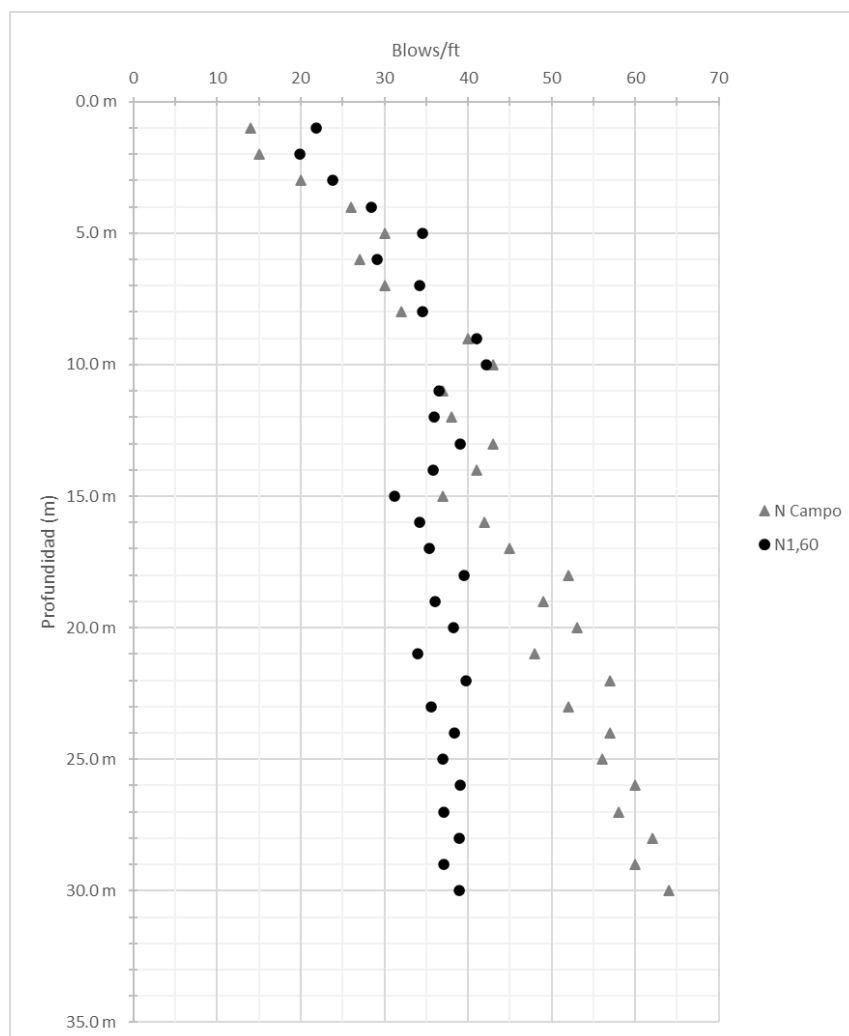


Figura 7-114 – Resultados ensayo SPT de campo y corregidos ( $N_{1,60}$ )

El resultado de esta predicción se presenta en la Figura 7-115, donde se muestra el perfil del módulo de elasticidad estimado frente a la profundidad. El perfil obtenido muestra una variación progresiva, con módulos más bajos en superficie (arena limosa) y un incremento moderado en profundidad (arena limpia).

Este perfil se emplea como base para la creación del modelo inicial del terreno en el análisis retrospectivo, adoptando los valores indicados por la línea roja discontinua para cada estrato.

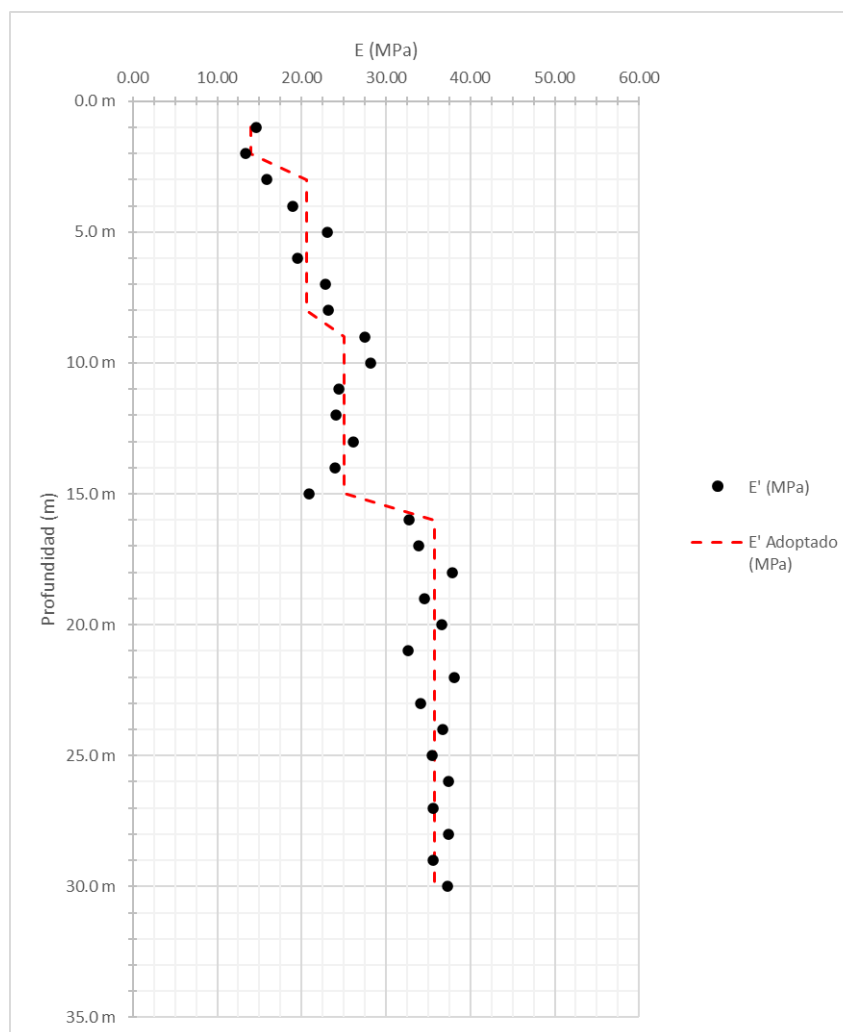


Figura 7-115 – Resultados módulos elasticidad obtenidos del modelo de *Machine Learning*

El método Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt se aplica a continuación, tomando como punto de partida los módulos de elasticidad obtenidos por el modelo de redes neuronales. La Figura 7-116 y la Figura 7-117 muestran la evolución del error cuadrático medio durante esta fase. La convergencia es rápida, alcanzándose el mínimo en cuatro iteraciones en el caso de Gauss-Newton y diez iteraciones en el caso de Levenberg-Marquardt. En presencia de ruido son necesarias hasta 6 y 13 iteraciones, adicionalmente, el error final es ligeramente superior, pero sigue siendo aceptable.

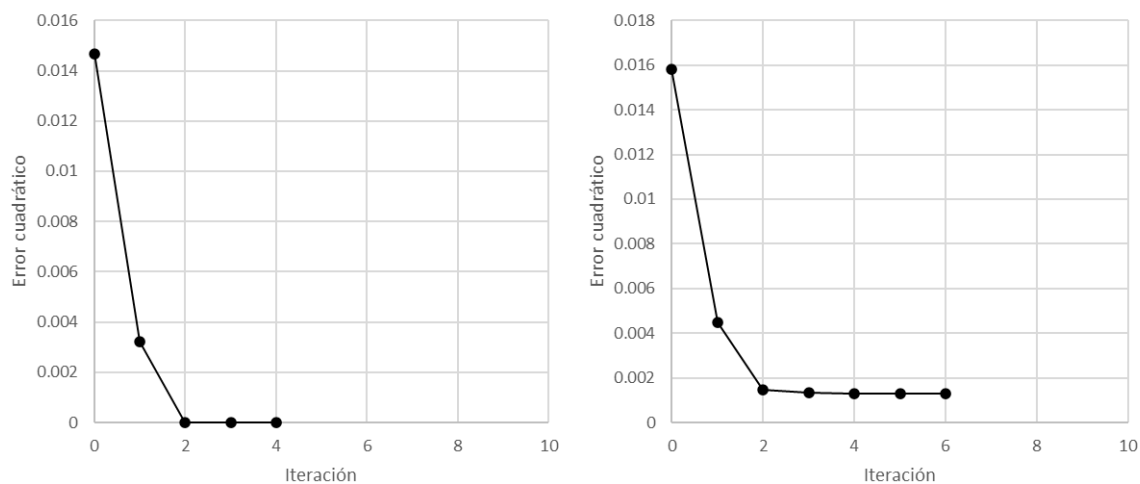


Figura 7-116 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

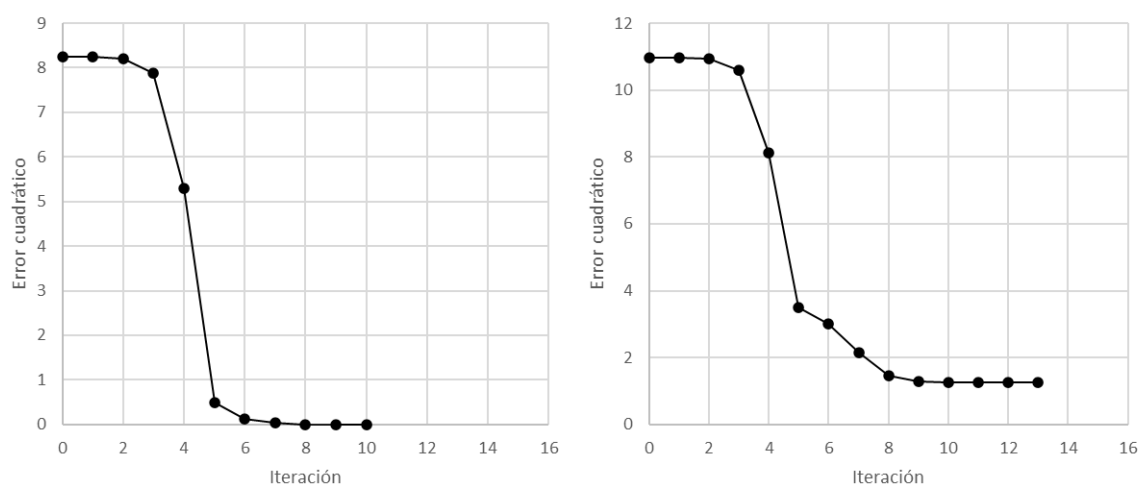


Figura 7-117 – No. Iteraciones para convergencia según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido)

La Figura 7-118 y la Figura 7-119 resumen gráficamente el proceso, donde se observa la evolución de los módulos de elasticidad calculados para cada iteración desde el punto inicial (tras la fase de búsqueda global) hasta la solución final optimizada mediante Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt. En ambos escenarios (con y sin ruido), se aprecia una aproximación directa al mínimo, con una mejora sustancial respecto al punto de partida.

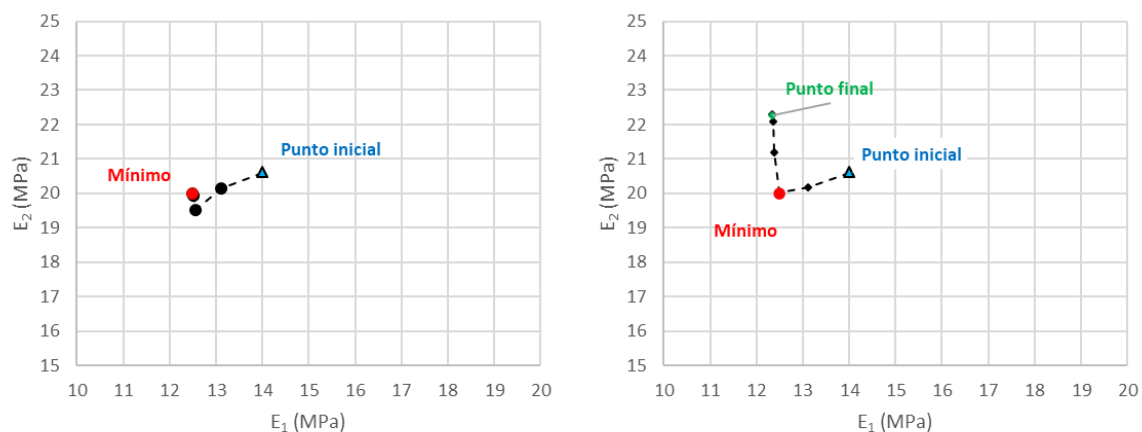


Figura 7-118 – Mapa trayectoria  $E_1$  y  $E_2$  para cada iteración según Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

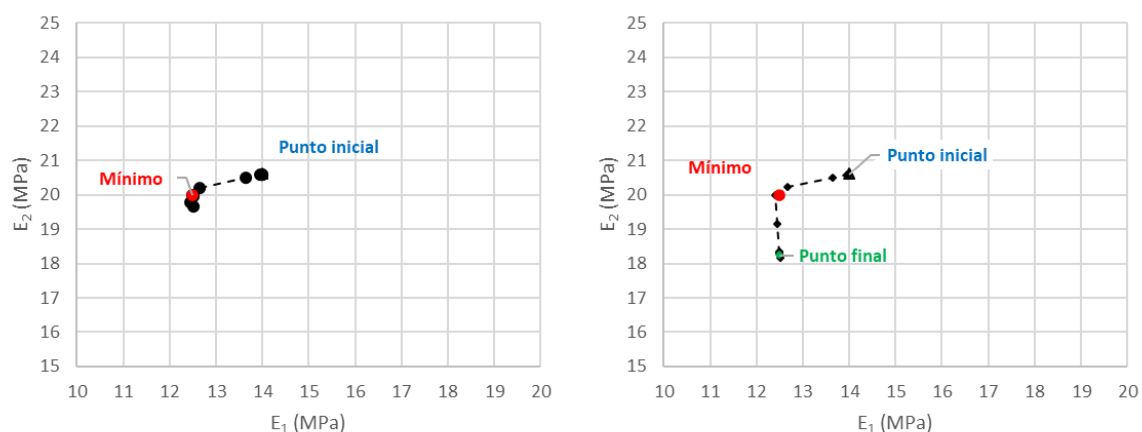


Figura 7-119 – Mapa trayectoria  $E_1$  y  $E_2$  para cada iteración según Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido)

Finalmente, la Figura 7-120 y la Figura 7-121 comparan los perfiles de asentamiento medidos y retrocalculados a partir de los valores estimados de los módulos de elasticidad. En ambos casos (sin ruido y con ruido), el modelo reproduce con gran precisión el comportamiento del terreno, destacando el buen acoplamiento de esta técnica híbrida.

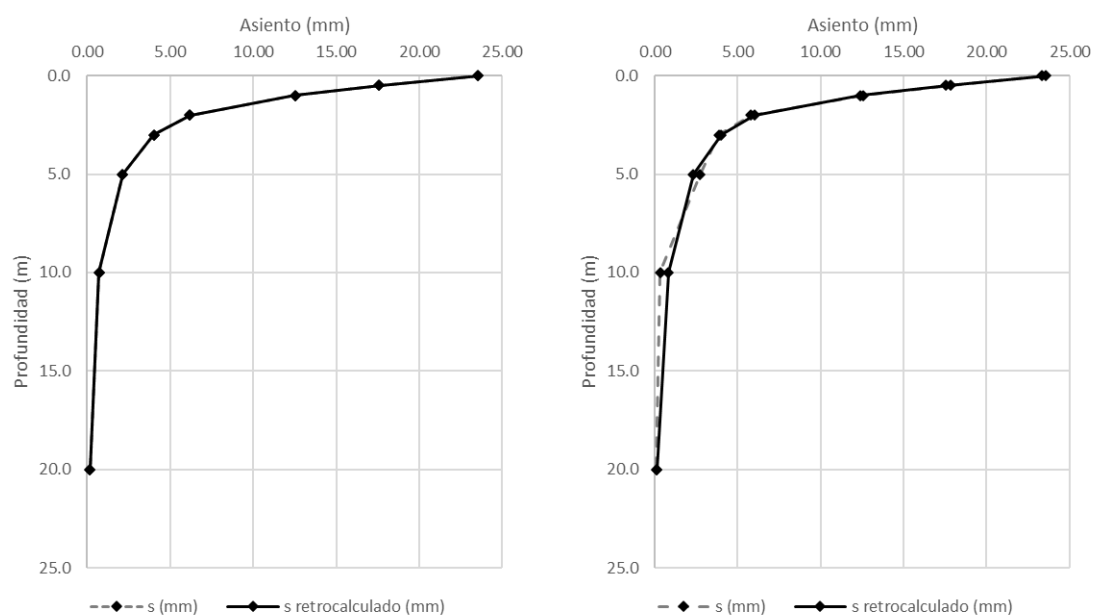


Figura 7-120 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según red neuronal y Gauss-Newton (sin ruido – con ruido)

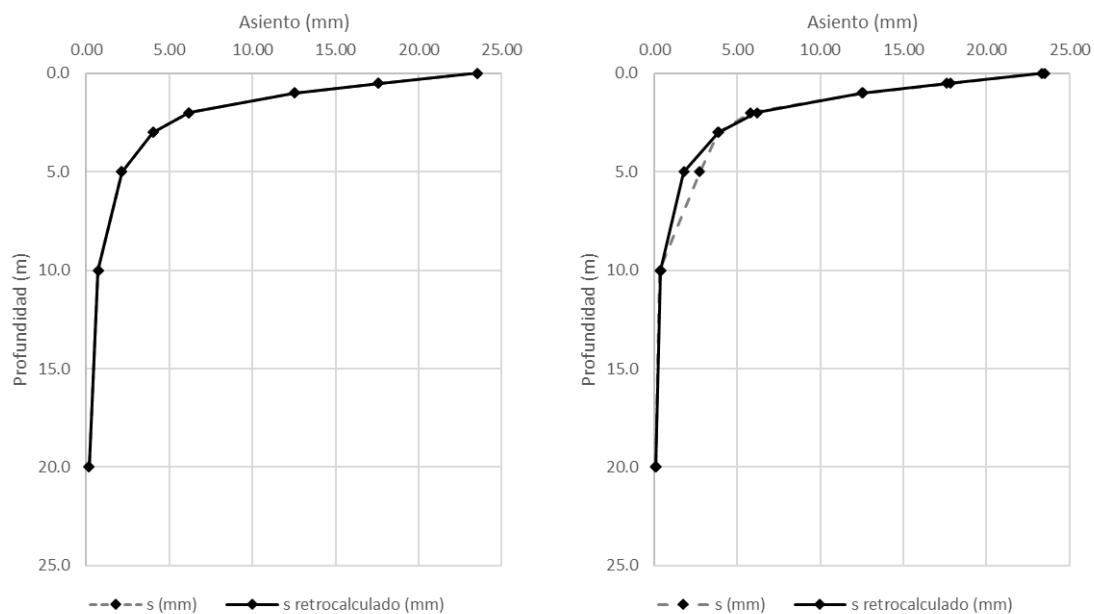


Figura 7-121 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según red neuronal y Levenberg-Marquardt (sin ruido – con ruido)



## 7.5 Análisis detallado de los resultados del caso de estudio real

A continuación, se exponen los resultados más relevantes obtenidos tras aplicar las distintas estrategias de optimización al caso de estudio real. El análisis pone un énfasis especial en aquellos algoritmos que han evidenciado un desempeño sobresaliente, ya sea por la rapidez con la que convergen y, por ende, el ahorro computacional asociado, o por la precisión alcanzada al retrocalcular los módulos de elasticidad en el escenario sintético diseñado como banco de pruebas.

La interpretación de los datos disponibles presentaba dos restricciones fundamentales. Por un lado, existen incertidumbres en la posición exacta de los puntos de monitorización; por otro, se dispone únicamente de mediciones de asientos superficiales, sin información procedente de niveles más profundos. Esta doble limitación impide plantear un modelo inverso que parta de un terreno estratificado con suficientes grados de libertad para capturar la variabilidad vertical del subsuelo.

Ante este escenario, se adoptó una formulación simplificada del módulo de elasticidad, asumiendo una ley lineal con la profundidad:

$$E(z) = A + Bz \quad (198)$$

Donde,

$E$  es el módulo de elasticidad (MPa)

$A$  representa la rigidez inicial en la superficie (MPa)

$B$  indica la tasa de incremento por metro de profundidad (MPa/m)

$z$  es la profundidad (m)

Esta aproximación, aun siendo deliberadamente sencilla, respeta la tendencia esperada de aumento de rigidez con la profundidad reflejada en la estratigrafía regional y, al mismo tiempo, se ajusta al alcance real de la información disponible. De esta forma se logra un equilibrio pragmático entre fidelidad geotécnica y robustez numérica, permitiendo comparar de manera homogénea la eficacia de los distintos métodos de optimización evaluados.

## 7.5.1 Métodos híbridos

### 7.5.1.1 Algoritmo genético simple y Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt

En este apartado se presentan los hallazgos obtenidos con la estrategia híbrida que combina una fase de exploración global, mediante un Algoritmo Genético simple, y una etapa de refinamiento local con los métodos de Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt. A diferencia del ejercicio sintético, la configuración y la interpretación de los resultados se han adaptado a las características particulares del caso real.

#### I. Exploración global (Algoritmo Genético)

Se mantuvo el número de generaciones en 10 y la población en 50 individuos para asegurar un balance adecuado entre diversidad y coste computacional, pero los rangos iniciales de búsqueda para  $A$  y  $B$  se ampliaron ligeramente con respecto al estudio sintético para incorporar la mayor incertidumbre observacional.

Las Figura 7-122 ilustran la evolución de la población en el plano  $(A, B)$ . En las generaciones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 10 puede apreciarse cómo los individuos se desplazan desde una dispersión inicial hasta concentrarse en un corredor bien definido, aunque sin alcanzar todavía el umbral de error preestablecido.

Esta fase identifica un subconjunto de soluciones prometedoras que actúan como punto de origen para la optimización local.

#### II. Afinado local (Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt)

Tomando como punto de partida el mejor individuo de la fase genética, se ejecutan en paralelo los esquemas GN y LM con idénticos criterios de parada, lo que permite contrastar su robustez frente a la elevada no linealidad del problema.

La Figura 7-123 muestra la rápida caída del error cuadrático medio en ambas variantes: GN converge en dos iteraciones, mientras que LM requiere tan solo una, pero ofrece un resultado algo más desacertado, posiblemente al caer en un mínimo local.

En la Figura 7-124 se resume la trayectoria completa del error, desde la solución proporcionada por el algoritmo genético hasta la convergencia fina del bloque local, destacando la sinergia entre exploración global y explotación local.

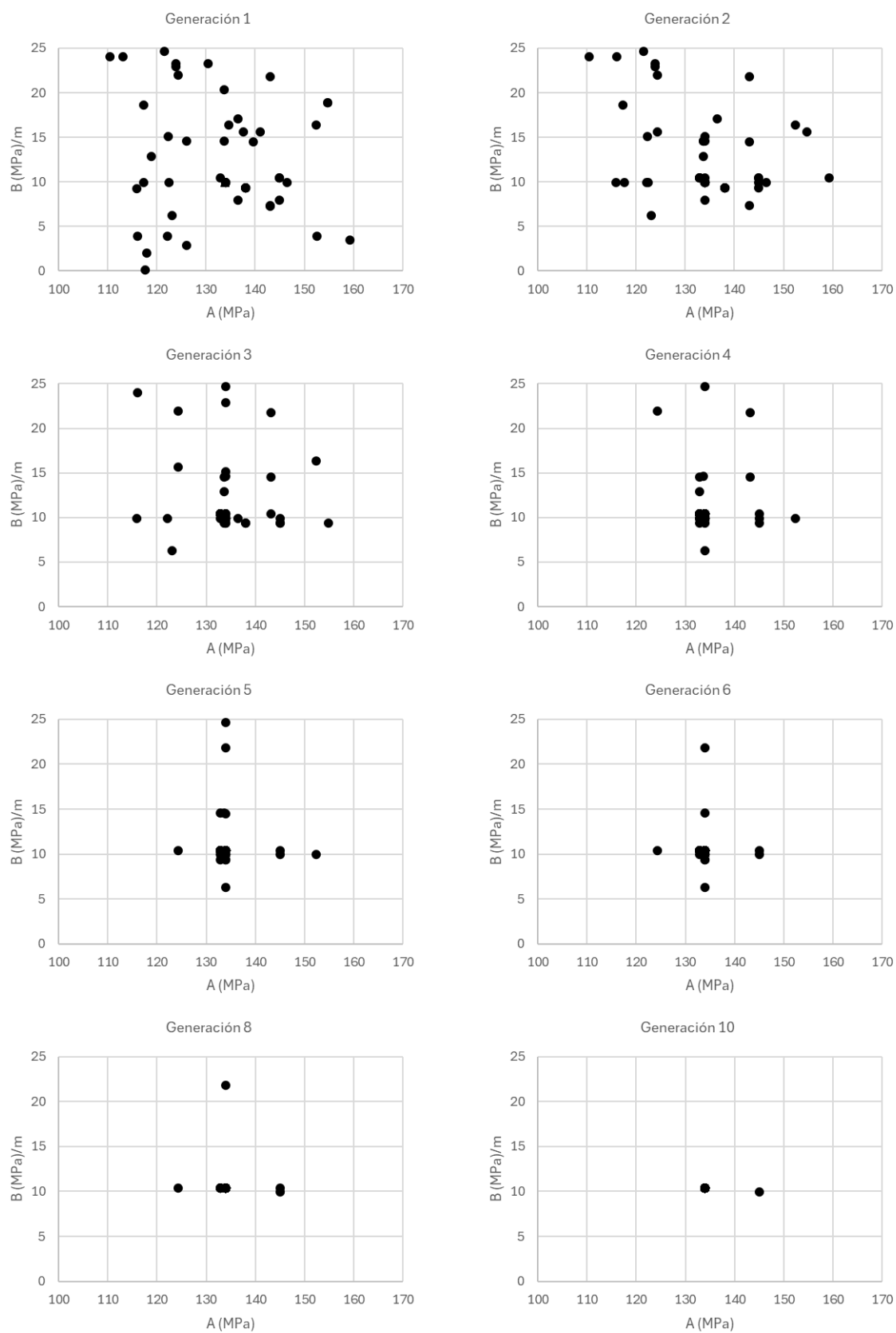


Figura 7-122 – Evolución población en algoritmo genético simple

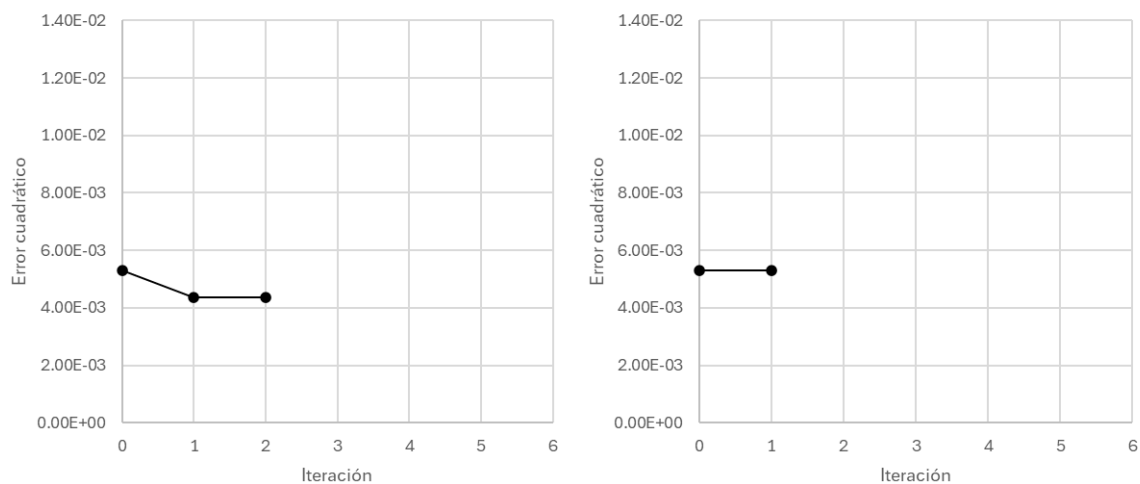


Figura 7-123 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente

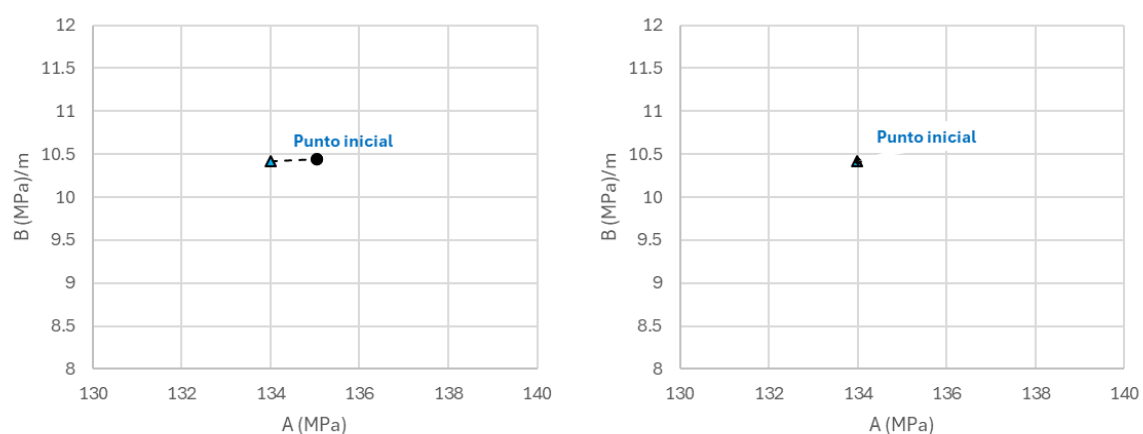


Figura 7-124 – Mapa trayectoria A y B para cada iteración según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente

### III. Validación del ajuste

Finalmente, la Figura 7-125 compara los asientos medidos en superficie con los retrocalculados a partir de los parámetros optimizados. El ajuste refleja una desviación media inferior al 3 %, confirmando la capacidad del enfoque híbrido para capturar la rigidez creciente con la profundidad a pesar de la limitada información disponible.

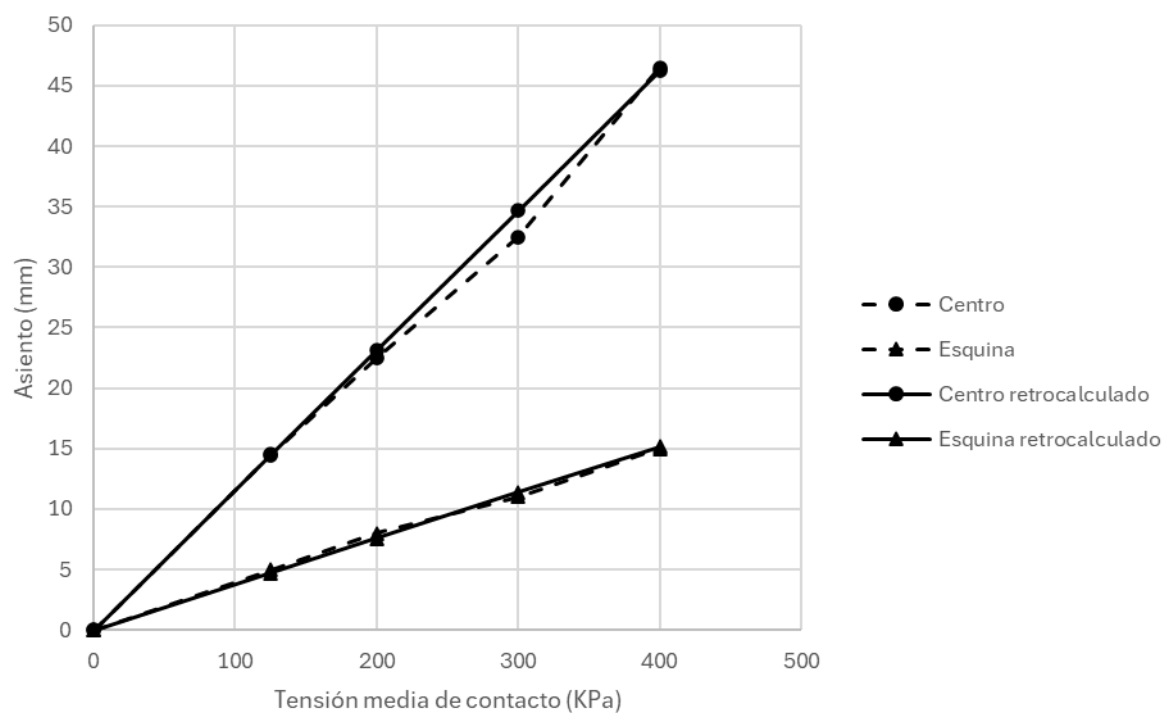


Figura 7-125 – Asiento teórico con valores de  $E_1$  y  $E_2$  retrocalculados según Genético Simple y Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt

### 7.5.1.2 Algoritmo genético adaptativo y Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt

En este apartado se documenta el desempeño del enfoque mixto que aúna la exploración global mediante un Algoritmo Genético Adaptativo (AGA) y el pulido local con los algoritmos de Gauss-Newton (GN) y Levenberg-Marquardt (LM). El rasgo distintivo del Algoritmo Genético Adaptativo radica en que las probabilidades de cruce y mutación se ajustan dinámicamente conforme progresa la búsqueda, permitiendo intensificar o diversificar la exploración según la dispersión de la población.

#### I. Exploración global (Algoritmo Genético Adaptativo)

Al igual que en la fase sintética, se ejecutaron 10 generaciones con 50 individuos; no obstante, los operadores genéticos se autorregulan: la tasa de mutación se incrementa cuando la diversidad decrece y se reduce cuando la población vuelve a dispersarse, evitando convergencias prematuras.

La Figura 7-126 plasma la evolución de la población sobre el plano  $(A, B)$  para las generaciones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 10. La nube inicial, ampliamente dispersa, se transforma en un cúmulo bien delimitado que rodea la cuenca del mínimo global con mayor rapidez que en el algoritmo genético simple, a pesar de no alcanzar todavía el umbral de error objetivo.

#### II. Afinado local (GN y LM)

Con el mejor individuo del AGA como arranque, se lanzaron GN y LM en paralelo.

La Figura 7-127 evidencia un descenso vertiginoso del error cuadrático medio: GN alcanza la tolerancia en sólo dos iteraciones, mientras que LM lo hace en una. En este caso concreto, LM detecta que el punto de partida se halla prácticamente en el mínimo y ejecuta una corrección marginal sobre  $A$ , dejando  $B$  inalterado.

La trayectoria completa del error, mostrada en la Figura 7-128, subraya la complementariedad del esquema: el Algoritmo Genético Adaptativo sitúa la solución dentro de la “cuenca de atracción” correcta y los métodos de mínimos cuadrados aseguran la llegada a la convergencia en pocas iteraciones.

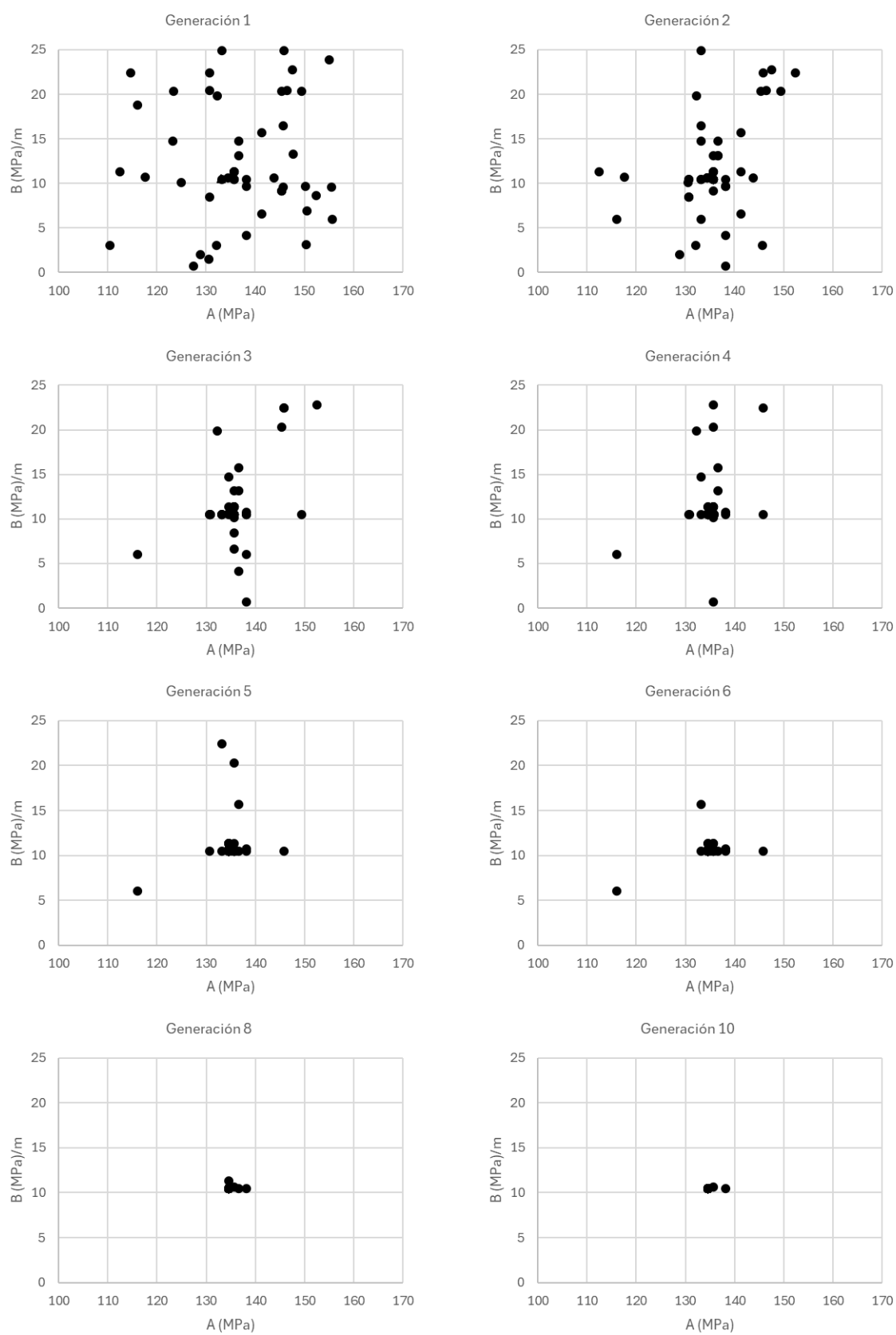


Figura 7-126 – Evolución población en Algoritmo Genético Adaptativo

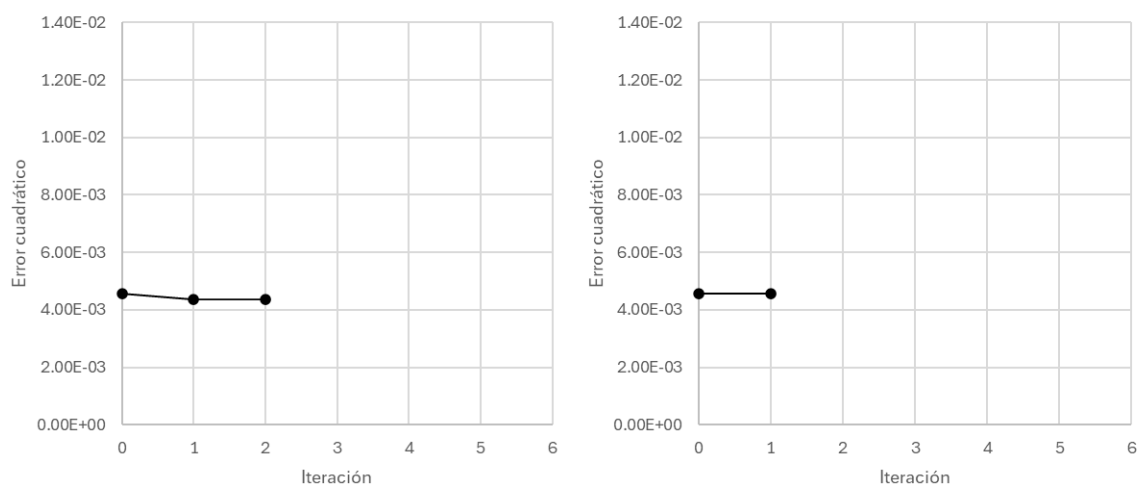


Figura 7-127 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente

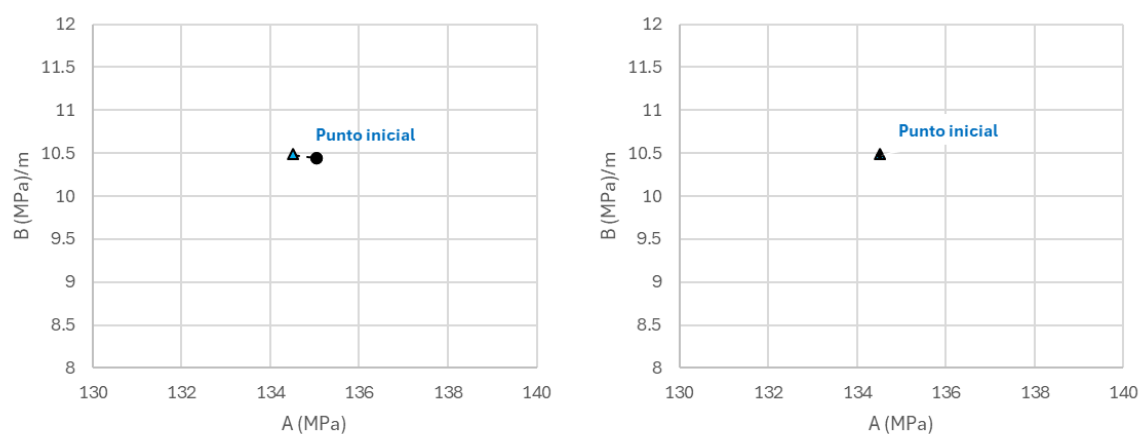


Figura 7-128 – Mapa trayectoria A y B para cada iteración según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente

### III. Validación del ajuste

En la Figura 7-129 se contraponen los asientos superficiales medidos con los retrocalculados a partir del módulo de elasticidad optimizado. El desajuste medio se sitúa por debajo del 2,8 %, ligeramente mejor que el obtenido con el algoritmo genético simple, reflejando la ventaja de la adaptación dinámica para sortear valles locales sin comprometer la precisión final.



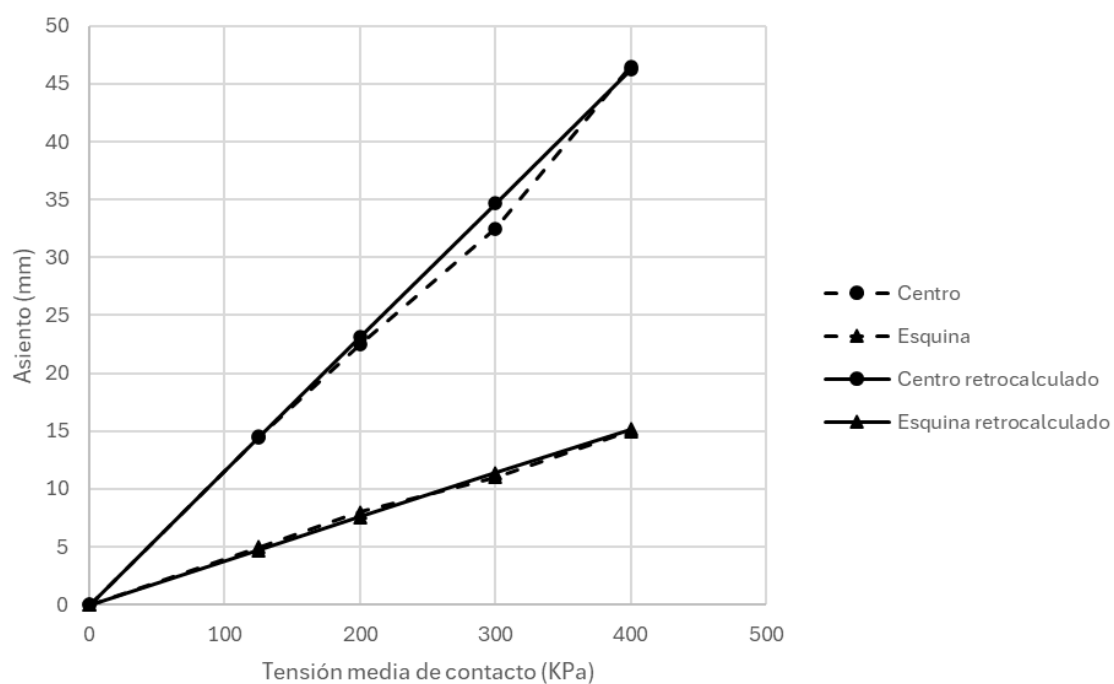


Figura 7-129 – Asiento teórico con valores de  $A$  y  $B$  retrocalculados según Genético Adaptativo y Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente

### 7.5.1.3 Enjambre de partículas y Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt

En este epígrafe se describen los resultados obtenidos con la estrategia mixta que combina un rastreo a gran escala mediante la optimización por enjambre de partículas (PSO) y un ajuste local con los métodos de Gauss-Newton (GN) y Levenberg-Marquardt (LM). El PSO actúa como mecanismo de “sondeo colectivo”: cada partícula ajusta su velocidad atendiendo a su mejor experiencia individual y a la mejor experiencia compartida por el enjambre, de modo que la nube de soluciones va migrando de forma cooperativa hacia regiones prometedoras del espacio  $(A, B)$ .

#### I. Fase global (Enjambre de Partículas)

Se liberó un enjambre de 50 partículas durante 10 pasos de actualización, se mantienen, así, la dimensión poblacional y el número de iteraciones empleados en los apartados previos para asegurar comparabilidad directa. La Figura 7-130 muestra la proyección de las trayectorias en las iteraciones clave (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 10). El patrón revela una rápida atracción inicial hacia un corredor de mínimos; sin embargo, el enjambre conserva cierta dispersión en la última iteración, reflejo de su tendencia a mantener diversidad para evitar mínimos locales.

#### II. Búsqueda local (GN o LM).

La partícula con el menor error tras el PSO se tomó como punto de arranque para los esquemas de mínimos cuadrados. La Figura 7-131 recoge la caída del error cuadrático medio:

- Gauss-Newton alcanza la tolerancia en dos iteraciones, ejecutando correcciones simultáneas sobre  $A$  y  $B$ .
- Levenberg-Marquardt finaliza en una iteración; al identificar que el punto inicial ya se encuentra dentro de la cuenca de atracción del mínimo, sólo introduce un ajuste marginal en  $A$ .

La Figura 7-132 ilustra, de forma compacta, la evolución de los parámetros desde la solución preliminar del PSO hasta la convergencia fina de GN y LM, subrayando cómo el refinamiento local reduce la dispersión residual que aún mantenía el enjambre.

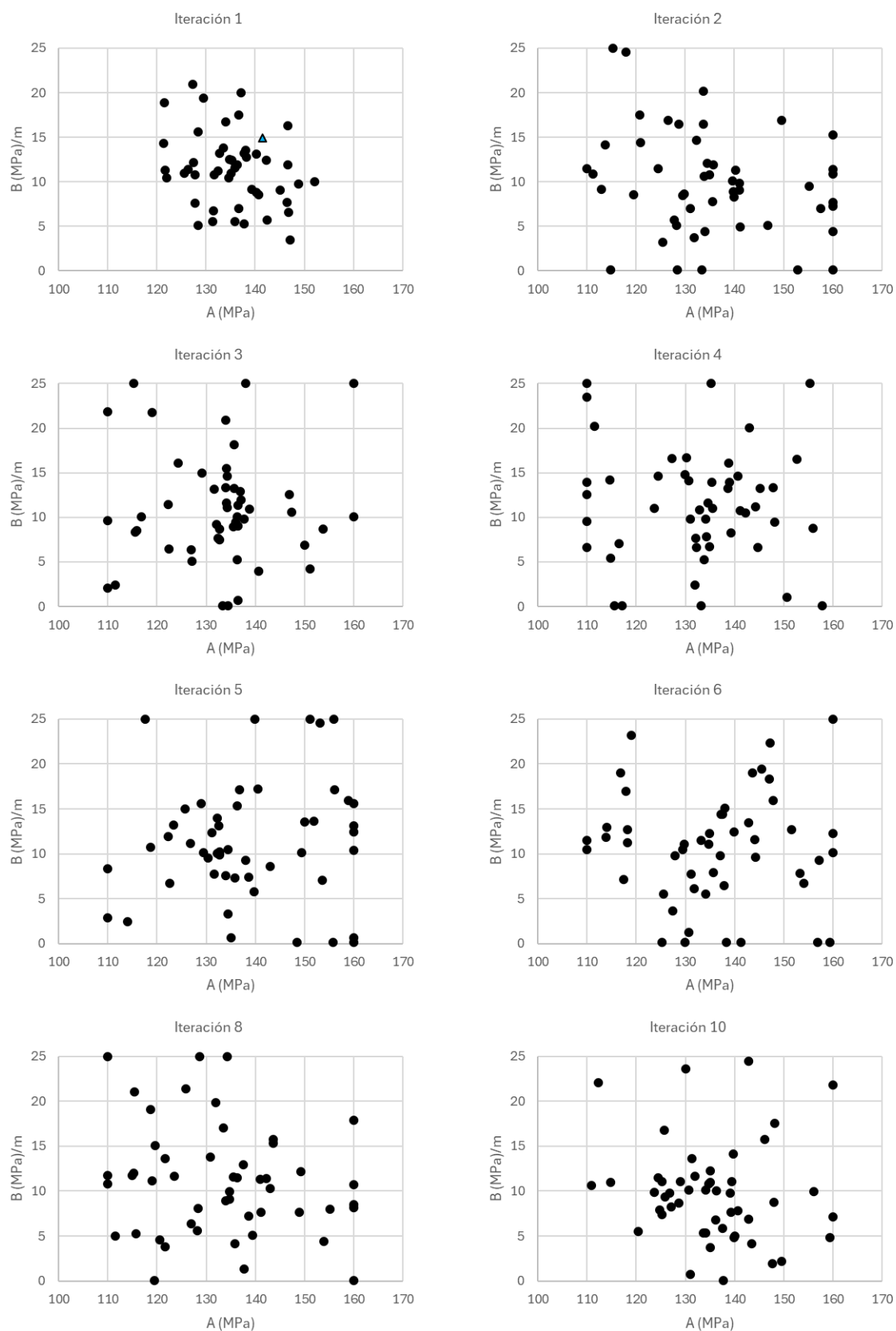


Figura 7-130 – Evolución partículas en enjambre de partículas

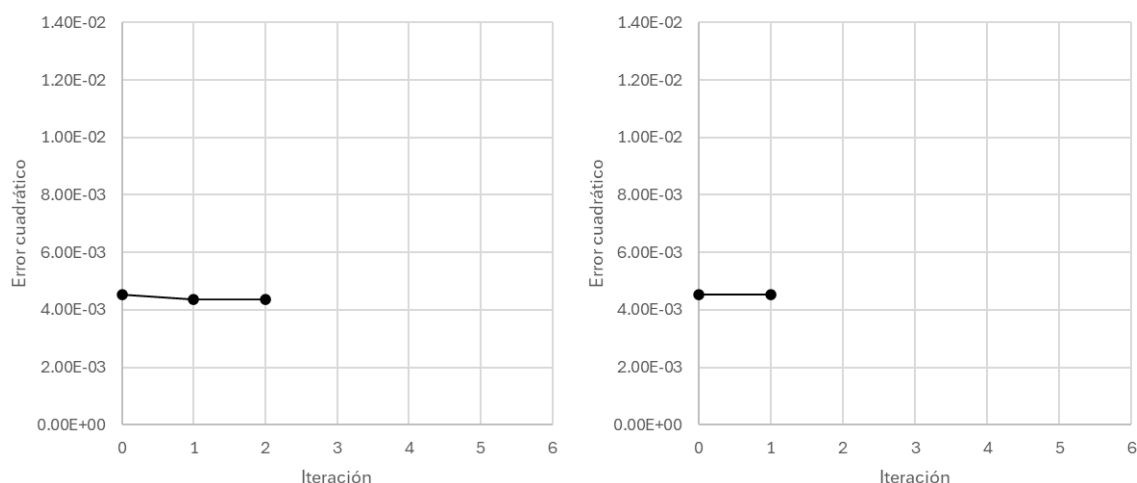


Figura 7-131 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente

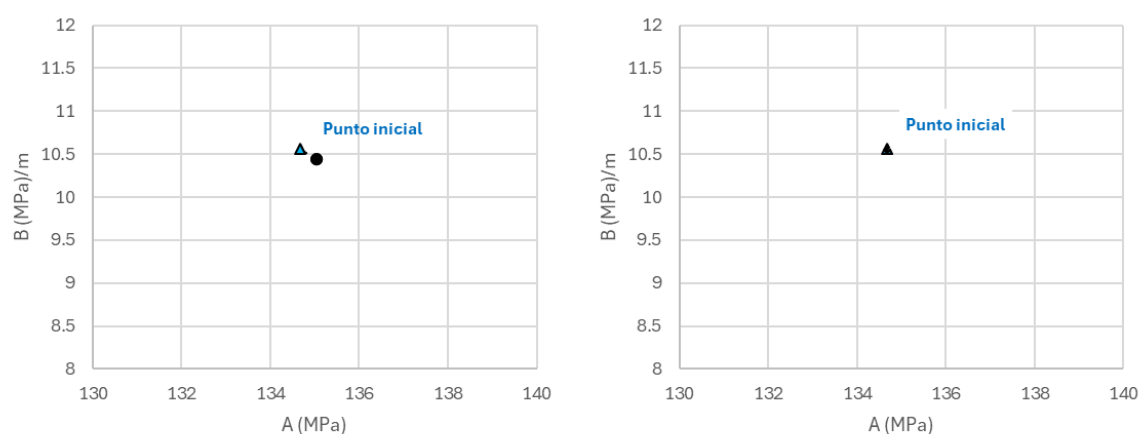


Figura 7-132 – Mapa trayectoria A y B para cada iteración según Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt, respectivamente

### III. Validación del modelo inverso.

Por último, la Figura 7-133 superpone los asientos superficiales medidos y los retrocalculados con los parámetros optimizados. El desajuste medio queda por debajo del 3 %, resultado que sitúa a la combinación PSO + GN/LM en un rango de precisión equiparable y, en términos de velocidad de convergencia local, ligeramente peor al de las configuraciones genéticas ensayadas previamente.

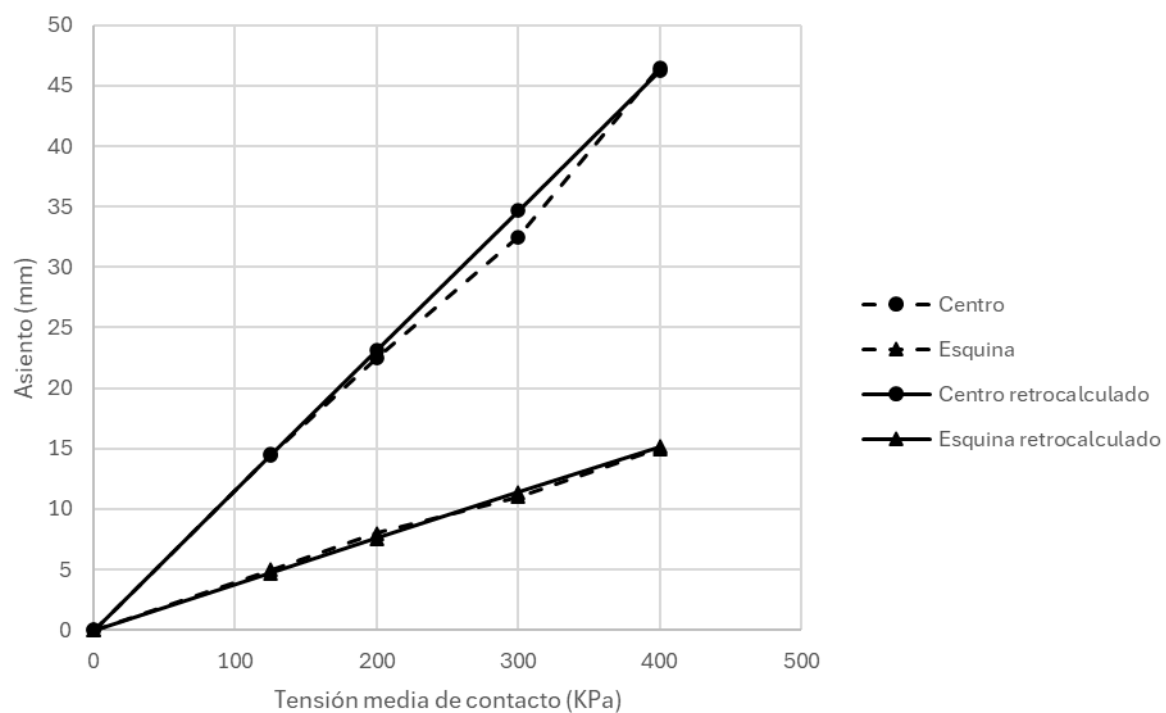


Figura 7-133 – Asiento teórico con valores de  $A$  y  $B$  retrocalculados según enjambre de partículas y Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt

#### 7.5.1.4 Machine Learning y Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt

El método que se describe a continuación constituye la aportación principal de este trabajo, una estrategia híbrida en dos fases que sustituye la búsqueda global aleatoria por un modelo de aprendizaje automático y conserva el refinamiento determinista con Gauss-Newton (GN) o Levenberg-Marquardt (LM).

A diferencia de los algoritmos evolutivos empleados en apartados previos, aquí el punto de partida se obtiene entrenando un modelo sobre ensayos presiométricos propios y valores publicados para los suelos de la zona de estudio. De este modo se incorpora información de campo real antes de iniciar la fase de optimización local.

En ausencia de un número suficiente de ensayos in situ para entrenar un modelo más sofisticado, se optó por el esquema de *Machine Learning* más elemental, una regresión lineal, para estimar la ley  $E(z) = A + Bz$ . Aunque se trata de un aprendizaje “ligero”, sigue todas las etapas básicas de un proceso de *Machine Learning*: recopilación de datos, entrenamiento, validación y uso posterior de los resultados como información previa para la optimización numérica.

Los datos de partida constan de 20 ensayos presiométricos y 38 registros bibliográficos. En la Figura 7-134 se representan los resultados de los ensayos presiométricos y la correspondiente recta de regresión obtenida.

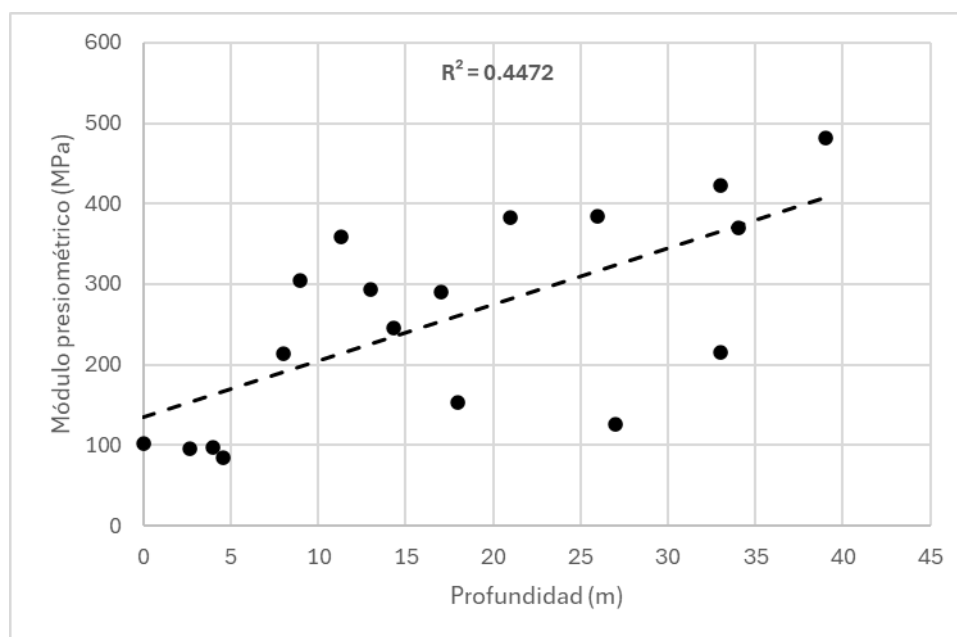


Figura 7-134 – Representación de correlación del módulo presiométrico vs profundidad

La recta de ajuste alcanza un coeficiente de determinación  $R^2$  igual a 0.447, lo que indica una correlación moderada entre rigidez y profundidad.

Para iniciar la búsqueda global se definió una ventana limitada a  $A = 130 \pm 25$  MPa y  $B = 9.0 \pm 3.0$  MPa/m. Con ello se redujo drásticamente el dominio de cálculo, manteniendo, no obstante, la posibilidad de encontrar soluciones alejadas de la línea de regresión gracias a la incorporación explícita de la dispersión observada en los datos.

Finalmente, la búsqueda global mediante la regresión lineal establece que el punto de partida de la búsqueda local es  $A = 134$  MPa y  $B = 7.0$  MPa/m.

El método Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt se aplica a continuación. La Figura 7-135 muestra la evolución del error cuadrático medio durante esta fase. La convergencia es rápida para el método de Gauss-Newton, alcanzándose el mínimo en cuatro iteraciones en el caso de Gauss-Newton y catorce iteraciones en el caso de Levenberg-Marquardt.

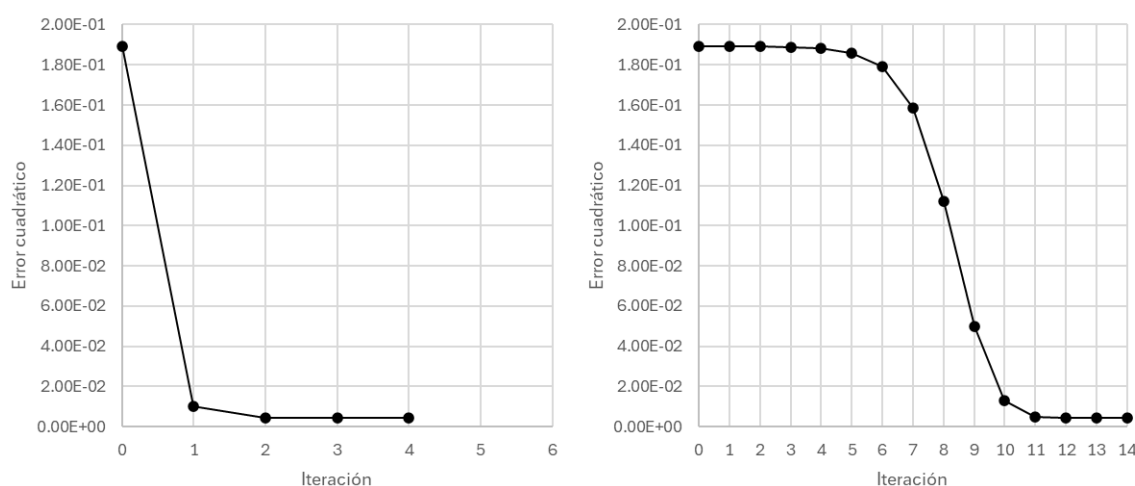


Figura 7-135 – No. Iteraciones para convergencia según Gauss-Newton & Levenberg-Marquardt

La Figura 7-136 resume gráficamente el proceso, donde se observa la evolución de los parámetros  $A$  y  $B$  calculados para cada iteración desde el punto inicial (tras la fase de búsqueda global) hasta la solución final optimizada mediante Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt. En ambos escenarios se aprecia una aproximación directa al mínimo, con una mejora sustancial respecto al punto de partida. Ambas metodologías alcanzan un resultado de  $A$  y  $B$  muy similar entre ellas.

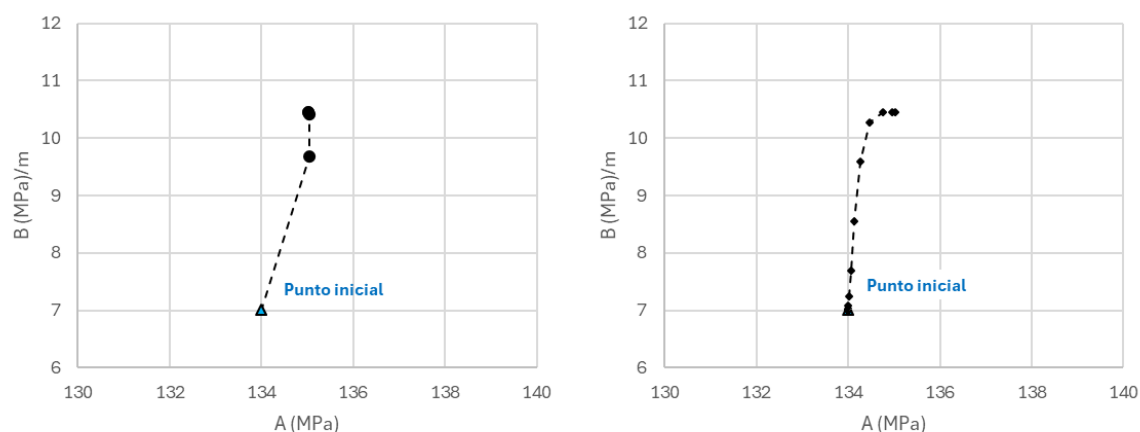


Figura 7-136 – Mapa trayectoria  $A$  y  $B$  para cada iteración según Gauss-Newton & Levenberg-Marquardt

Finalmente, la Figura 7-137 comparan los perfiles de asentamiento medidos y retrocalculados a partir de los valores estimados de los módulos de elasticidad. En ambos casos (GN y LM), el modelo reproduce con gran precisión el comportamiento del terreno, destacando el buen acoplamiento de esta técnica híbrida.

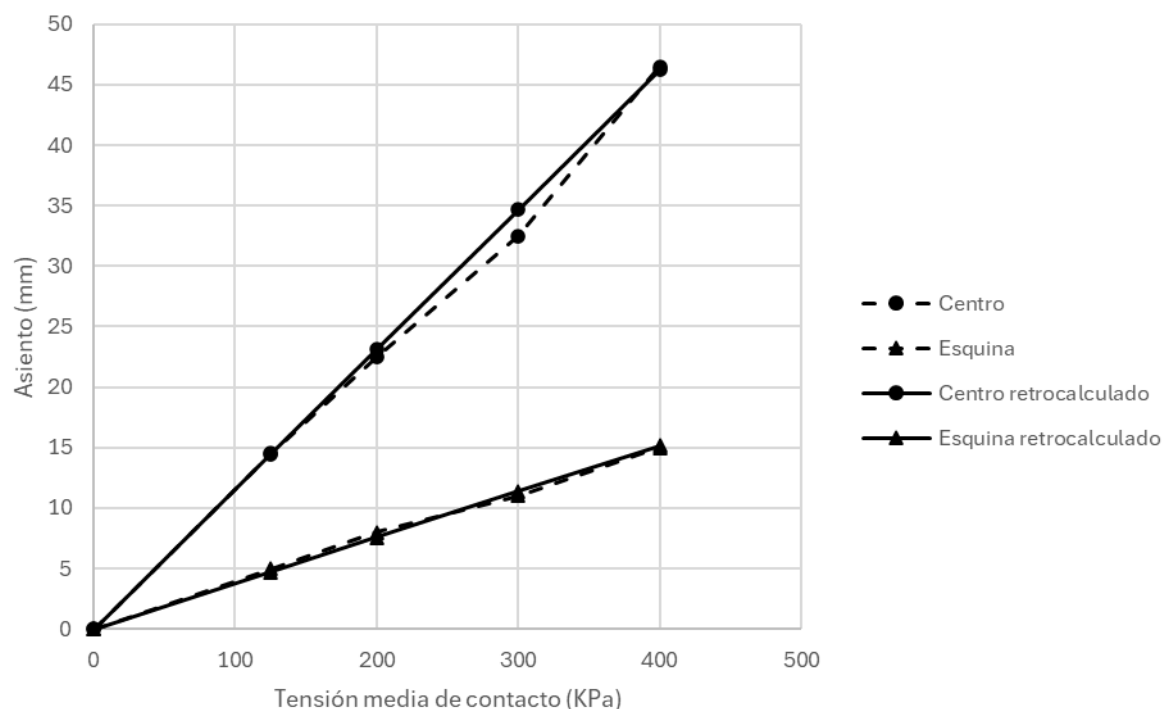


Figura 7-137 – Asiento teórico con valores de  $A$  y  $B$  retrocalculados según ML y GN o LM



## 8. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El presente capítulo profundiza en el análisis crítico de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, con el objetivo de valorar la eficacia, robustez y utilidad práctica de los diferentes algoritmos aplicados al análisis retrospectivo del módulo de elasticidad del terreno a partir de mediciones de asiento. Para ello, se realiza una comparación detallada entre métodos clásicos basados en gradientes, heurísticos, híbridos y el enfoque propuesto basado en Machine Learning combinado con algoritmos de optimización local. La discusión se estructura según los siguientes ejes: precisión en la estimación, coste computacional, sensibilidad al ruido y capacidad de interpretación e integración en entornos reales.

### 8.1 Precisión en la estimación de parámetros geotécnicos

Uno de los principales objetivos de este trabajo ha sido evaluar la capacidad de los diferentes algoritmos para estimar con precisión los módulos de elasticidad a partir de datos sintéticos de asientos, tanto en condiciones ideales como en presencia de ruido. La comparación de los errores cuadráticos medios (RMSE) y los coeficientes de determinación ( $R^2$ ) entre métodos permite extraer conclusiones claras.

En condiciones sin ruido, los métodos basados en gradientes como Gauss-Newton (GN) y Levenberg-Marquardt (LM) destacan por su elevada precisión: se obtienen valores de RMSE inferiores a 1 kPa y coeficientes  $R^2$  prácticamente iguales a 1.000. Los métodos heurísticos puros, como los algoritmos genéticos simples y la optimización bayesiana, presentan errores mucho mayores (hasta  $RMSE > 6000$  kPa en algunos casos), lo que evidencia su baja precisión cuando se utilizan de forma aislada.

Por el contrario, los enfoques híbridos que combinan métodos globales con ajustes locales muestran una mejora significativa en la precisión. En particular, los híbridos que combinan algoritmos evolutivos (como evolución diferencial, enjambre de partículas o genéticos adaptativos) con Levenberg-Marquardt o Gauss-Newton reducen drásticamente el error final, situándose en muchos casos por debajo de  $RMSE = 2$  kPa. Este efecto sinérgico se explica por el hecho de que los algoritmos globales permiten una exploración amplia del espacio de búsqueda, mientras que los métodos de mínimos cuadrados refinan la solución en una etapa posterior.

Sin embargo, el resultado más destacable lo aporta el enfoque híbrido propuesto en este trabajo, basado en Machine Learning (ML) como fase global y Gauss-Newton o Levenberg-

Marquardt como fase local. En todos los casos del ejemplo sintético, este método alcanzó un RMSE prácticamente nulo (entre 0.0 y 2.3 kPa) y valores de  $R^2$  de 1.000. Esto evidencia una capacidad superior del modelo para predecir los módulos con gran exactitud, especialmente en comparación con métodos evolutivos puros o incluso híbridos tradicionales.

En el caso de estudio real, las distintas metodologías empleadas conducen a soluciones prácticamente coincidentes, lo que indica que todas ellas alcanzan una precisión adecuada y coherente entre sí. No obstante, el número de iteraciones necesarias para llegar a dicha solución varía significativamente entre los métodos, como se analiza en el siguiente apartado.

## 8.2 Comportamiento computacional y número de iteraciones

Otro criterio clave en la evaluación de los métodos es su eficiencia computacional, medida en términos del número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia con un umbral de error de  $10^{-5}$  en el asiento superficial.

En el caso de estudio sintético, los métodos clásicos como Gauss-Newton (11 iteraciones) y Levenberg-Marquardt (14 iteraciones) destacan por su rapidez, lo que refuerza su idoneidad como técnica de refinamiento local. En cambio, métodos heurísticos como Simulated Annealing (250 iteraciones), Bayesian Optimization (200 iteraciones) y Kriging (300 iteraciones) requieren tiempos computacionales significativamente mayores, lo que limita su aplicabilidad práctica en entornos donde la eficiencia es crítica.

Los métodos híbridos, al tener dos fases, acumulan iteraciones: típicamente impuestas 10 iteraciones en la búsqueda global más entre 7 y 13 en la fase local. No obstante, el número total sigue siendo inferior al de muchas técnicas heurísticas puras y, lo que es más importante, con una mejora notable en la calidad de los resultados. No obstante, se recalca el alto coste computacional para realizar 10 iteraciones con poblaciones/partículas de 50 elementos en cada caso, esto implica realizar 500 análisis tan solo en la fase global.

En este contexto, el modelo propuesto de Machine Learning + Gauss-Newton requiere solamente 4 iteraciones en la fase local tras el entrenamiento inicial, lo que representa una ventaja muy relevante. El coste computacional del entrenamiento del modelo ML se amortiza al ser utilizado en múltiples retroanálisis, y su capacidad de proporcionar buenos puntos de partida reduce significativamente el esfuerzo de ajuste posterior.

En el caso de estudio real, la fase de búsqueda local tras el modelo de Machine Learning requiere de 4 iteraciones en el caso de Gauss-Newton y 14 si el refinamiento local se realiza con Levenberg-Marquardt. La fase de búsqueda local en los métodos híbridos necesita tan solo 2 iteraciones, por lo que se duplica el número de iteraciones necesarias, no obstante, el coste computacional de la fase de búsqueda global es significativamente menor, siendo el método propuesto significativamente mejor en términos de coste computacional.

### 8.3 Robustez frente al ruido y estabilidad de los algoritmos

La introducción de ruido simulado en las mediciones representa un escenario más realista, donde los algoritmos deben lidiar con incertidumbres similares a las de campo. Bajo estas condiciones, la mayoría de los algoritmos muestran un aumento esperable en el RMSE y una ligera reducción del  $R^2$ . Sin embargo, la magnitud de esta degradación es indicativa de la robustez del método.

Métodos clásicos como Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt conservan una aceptable robustez, aunque el RMSE puede incrementarse hasta 1700–1800 KPa. Algunos algoritmos heurísticos sufren degradaciones importantes: por ejemplo, los algoritmos genéticos simples presentan un RMSE  $> 2500$  kPa y un  $R^2$  tan bajo como 0.549.

Se destacan los buenos resultados de los métodos de búsqueda directa (Nelder-Mead), basados en programación matemática (cuadrática y no lineal) y optimización robusta por su gran ajuste en presencia de ruido, a pesar de tener un coste computacional muy superior.

En cambio, los híbridos presentan un comportamiento mucho más estable. Las combinaciones evolutivas + Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt suelen mantenerse por debajo de RMSE = 1800 KPa y  $R^2 > 0.774$ . El modelo propuesto de Machine Learning + Gauss-Newton mantiene un RMSE de 1622.7 kPa y un  $R^2$  de 0.813, ligeramente mejor a otros híbridos con búsqueda evolutiva. No obstante, este resultado sigue siendo competitivo y destaca por la rapidez con la que se alcanza la convergencia.

Por el contrario, el modelo propuesto de Machine Learning + Levenberg-Marquardt, a pesar de necesitar hasta 13 iteraciones en el caso de estudio con ruido, obtiene un RMSE de aproximadamente 1200 KPa y un  $R^2$  de 0.898. Esto es debido a la mejor precisión del algoritmo local Levenberg-Marquardt en presencia de ruido.

Por tanto, en presencia de ruido, el método propuesto ofrece un compromiso equilibrado entre precisión, velocidad y estabilidad en comparación con los otros algoritmos analizados.

#### 8.4 Interpretabilidad y validez geotécnica mediante SHAP

La integración de técnicas de interpretabilidad mediante SHAP permite analizar qué variables de entrada (profundidades de medición) influyen más en la predicción de cada módulo de elasticidad.

Los resultados obtenidos en el caso de estudio sintético indican una distribución coherente con los principios de la mecánica del suelo. Las mediciones superficiales (0.0 m a 1.0 m) son determinantes para  $E_1$ , mientras que  $E_2$  se ve influido por datos más intermedios (2.0 m a 7.5 m) y profundos (hasta 20.0 m), esto se explica por los limitados datos de monitorización por debajo de los 5m de profundidad (nótese que el estrato dos llega hasta los 7.5m), limitándose a 10m y 20m, lo que implica que el análisis retrospectivo de  $E_2$  tenga que apoyarse de los datos disponibles a mayor profundidad.  $E_3$  y  $E_4$  muestran una dependencia creciente de mediciones a mayores profundidades (10 m, 20 m), con una influencia transversal de  $z = 5.0$  m como punto de transición entre estratos.

Este tipo de análisis no solo refuerza la validez geotécnica del modelo, sino que permite tomar decisiones fundamentadas en cuanto a la planificación de instrumentación en campo. Se puede priorizar la instalación de sensores en profundidades estratégicas según su impacto real en la estimación de parámetros, lo que mejora la relación coste-beneficio del monitoreo.

#### 8.5 Relevancia práctica y ventajas del modelo propuesto

El enfoque híbrido basado en Machine Learning y Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt no solo ofrece alta precisión y velocidad de convergencia, sino que también permite incorporar conocimiento empírico a través del entrenamiento con datos reales o generados sintéticamente. Esta característica le proporciona una capacidad de generalización que lo distingue del resto de métodos, especialmente cuando se considera su potencial de escalabilidad a modelos con mayor número de parámetros o estratos.

Además, la estructura modular del modelo facilita su adaptación a problemas más complejos, como la estimación simultánea de otros parámetros, la inclusión de condiciones no elásticas

(e.g., plastificación, anisotropía) o su integración en flujos de trabajo BIM o sistemas de monitoreo en tiempo real.

## 8.6 Síntesis comparativa y limitaciones observadas

A modo de resumen, se puede establecer la siguiente clasificación cualitativa:

Tabla 8-12 – Síntesis comparativa de los resultados

Método	Precisión (sin ruido)	Precisión (con ruido)	Coste computacional	Robustez
Gradientes	Alta	Media	Muy bajo	Media
Evolutivos	Media	Baja	Alto	Baja
Búsqueda Dir.	Muy alta	Muy alta	Muy alto	Muy alta
Surrogados	Media	Media	Muy alto	Media
Prog. Matemát.	Alta	Muy alta	Medio	Muy alta
Otros	Muy alta	Alta	Medio	Alta
Híbridos	Muy alta	Alta	Medio-Bajo	Alta
ML + GN/LM	Muy alta	Alta	Muy bajo	Alta

Cabe mencionar que el enfoque propuesto requiere una etapa previa de entrenamiento que implica su propia carga computacional, y depende de la calidad de los datos de entrada para el modelo de Machine Learning. Asimismo, la sensibilidad al tipo de red neuronal y sus hiperparámetros podría influir en la generalización del modelo en otros casos no tratados.

A pesar de estas limitaciones, los resultados obtenidos validan la propuesta como una alternativa robusta, precisa e interpretativa para el análisis retrospectivo de parámetros geotécnicos, con un potencial claro de aplicación en obra real.

## 9. CONCLUSIONES

En este Trabajo de Fin de Máster se desarrolló y puso a prueba una metodología híbrida de análisis retrospectivo de parámetros geotécnicos mediante el uso de técnicas de *Machine Learning* en la fase de búsqueda global y métodos de optimización local como Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt. Esta metodología permite encontrar soluciones prometedoras mediante algoritmos de inteligencia artificial, para que posteriormente sean refinadas mediante técnicas deterministas.

Esta propuesta híbrida ha proporcionado un ajuste satisfactorio en los casos de estudio expuestos en este trabajo, empleando tanto mediciones con como sin ruido, con una alta correlación entre los resultados estimados y los datos observados. En concreto, en el caso de estudio sintético se obtuvo un RMSE de 2.3 kPa y 1623 kPa para los casos sin ruido y con ruido, respectivamente, así como un coeficiente de determinación  $R^2$  del asiento retrocalculado en superficie de 1.000 y 0.898 en cada caso. En el caso de estudio real el coeficiente de determinación  $R^2$  alcanzó un valor de 0.998. Estos resultados confirman la validez de la metodología propuesta para problemas de cálculo inverso en ingeniería geotécnica.

No obstante, deben señalarse ciertas limitaciones en el alcance del estudio. El enfoque se ha aplicado exclusivamente a cimentaciones superficiales sobre suelos granulares, considerando únicamente el comportamiento elástico del terreno, es decir, asiento instantáneo. Esto implica que no se han abordado los fenómenos de consolidación propios de suelos cohesivos, ni se ha evaluado la respuesta de cimentaciones profundas u otras soluciones de cimentación. Asimismo, se asume que el terreno se subdivide en estratos homogéneos, elásticos e isotrópicos.

Aunque el modelo se comporta de forma robusta frente a datos limpios, se ha observado que su precisión disminuye cuando se introduce ruido en las mediciones de campo. En estas circunstancias, el algoritmo requiere un mayor número de iteraciones para converger y puede llegar a desviarse del valor real en su intento por ajustarse a los datos contaminados, como es esperable en cualquier proceso inverso, aun así, ofrece resultados aceptables en comparación con los otros algoritmos analizados, siendo solamente superado en precisión (pero no en coste computacional) por los algoritmos de búsqueda directa o basados en programación matemática.

Una de las principales ventajas del enfoque propuesto respecto a los métodos tradicionales de optimización es su eficiencia computacional. Si bien, la precisión obtenida ha sido comparable a la de treinta y dos métodos clásicos como se puede ver en la Tabla 7-7 y la Tabla 7-8, el

número de iteraciones necesarias para alcanzar una solución óptima ha sido notablemente menor, lo que representa una mejora importante en términos de tiempo de cálculo y coste de simulación. A pesar de obtenerse un menor coste computacional (medido como número de iteraciones) en los casos de estudio tratados, cabe mencionar que el enfoque propuesto requiere una etapa previa de entrenamiento que implica su propia carga computacional, y depende de la calidad de los datos de entrada para el modelo de *Machine Learning*. Asimismo, la sensibilidad al tipo de red neuronal y sus hiperparámetros podría influir en la generalización del modelo en otros casos no tratados. En cualquier caso, el modelo de *Machine Learning* puede ser extrapolado de casos anteriores, incorporando nuevos datos de campo para validar y ensayar los resultados ofrecidos por la red neuronal.

En términos de implementación, la metodología puede automatizarse de forma significativa. Su desarrollo en entornos como MATLAB o Python permite la integración con software de cálculo comercial mediante Interfaces de Programación de Aplicaciones (API - *Application Programming Interface* por sus siglas en inglés), facilitando flujos de trabajo ágiles y reproducibles. No obstante, en aquellos programas que aún no disponen de interfaces abiertas, la automatización debe completarse con pasos manuales, lo cual puede ralentizar el proceso, aunque previsiblemente estas limitaciones se irán resolviendo con la evolución de los softwares dada la tendencia actual de incorporar API para facilitar el intercambio de datos, funcionalidades y servicios entre entornos como MATLAB, Python y otros programas comerciales de análisis geotécnico y estructural.

El método propuesto demuestra un alto potencial de generalización y escalabilidad. Su estructura modular lo hace adaptable a otros problemas de cálculo retrospectivo geotécnico, como la estimación de parámetros en túneles, estructuras de contención, taludes o cimentaciones profundas. Además, puede ser alimentado con datos sintéticos o reales, lo que le permite ajustarse tanto a condiciones idealizadas como a escenarios de obra más complejos. Esta flexibilidad se traduce en una herramienta versátil, con capacidad para integrarse en procesos de ingeniería del terreno con distintos grados de incertidumbre.

Desde el punto de vista práctico, la metodología propuesta puede incorporarse en las fases de control de obra y seguimiento del comportamiento geotécnico y estructural. Su capacidad para calibrar los modelos de cálculo con base en datos reales permite una toma de decisiones adaptativa, basada en la evolución observada del terreno, lo cual incrementa la seguridad operativa y permite optimizar recursos. Asimismo, su integración con estrategias BIM, mediante la actualización de modelos digitales a partir de datos de instrumentación, abre

nuevas posibilidades para la gestión integral del ciclo de vida de la infraestructura, desde la fase de diseño hasta la operación y el mantenimiento.

Este trabajo también está en concordancia con un enfoque de diseño geotécnico basado en datos, es decir, en un enfoque observacional (*Observational Method*), al basar las decisiones en mediciones reales, y no únicamente en hipótesis conservadoras o parámetros estimados.

De esta forma, esta propuesta metodológica se alinea con la tendencia de la nueva generación de Eurocódigos, en particular la actualización del EN 1997-3 2025 refuerza la necesidad de adoptar metodologías de diseño geotécnico más integradas, adaptativas y basadas en datos, y anticipando el tipo de herramientas que serán necesarias para implementar de forma eficiente el enfoque observacional.

En este marco normativo emergente, la propuesta de este Trabajo de Final de Máster (que integra inteligencia artificial, modelado físico y análisis retrospectivo basado en observaciones) se sitúa en consonancia con las directrices de los nuevos Eurocódigos. La necesidad de modelos que no solo se adapten al comportamiento observado en campo, sino que también optimicen los recursos, promuevan la transparencia documental y favorezcan una toma de decisiones informada en condiciones complejas, alineándose directamente con las exigencias del EN 1997-3 2025.

Además de su valor técnico y normativo, la propuesta desarrollada en este TFM se alinea con los principios de sostenibilidad que definen la práctica de la ingeniería del siglo XXI. En particular, guarda una estrecha relación con varios de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) establecidos por la Agenda 2030 de Naciones Unidas. El uso de modelos calibrados en función del comportamiento real del terreno permite reducir sobredimensionamientos, optimizar el uso de materiales y minimizar el impacto ambiental asociado a la construcción (ODS 12: Producción y consumo responsables). La integración de tecnologías digitales y modelos predictivos también promueve la innovación en infraestructuras (ODS 9: Industria, innovación e infraestructura), contribuyendo a un entorno construido más resiliente, eficiente y adaptado a condiciones cambiantes. En este contexto, la metodología no solo constituye una aportación técnica sólida, sino que también representa un avance en la dirección de una ingeniería civil más sostenible, fundamentada en el conocimiento y la evidencia.



## 10. RECOMENDACIONES Y ESTUDIOS FUTUROS

Finalmente, se identifican diversas líneas futuras de investigación que permitirían ampliar y consolidar el trabajo realizado.

- I. Aplicación en otros casos reales, preferiblemente con cimentaciones de diferentes dimensiones en planta, presiones de contacto y una progresión gradual de la carga a lo largo del tiempo. Esta extensión permitiría evaluar la robustez y aplicabilidad del modelo en diversas condiciones de campo, caracterizadas por una mayor heterogeneidad en el comportamiento del terreno, presencia de estratigrafías complejas y mediciones inevitablemente afectadas por ruido instrumental y condiciones ambientales. La validación en situaciones reales ofrecería una prueba crítica de la capacidad del algoritmo para identificar con precisión los parámetros geotécnicos en contextos no controlados, así como para adaptarse a cargas progresivas que simulan el comportamiento real de estructuras durante las fases de construcción y operación.
- II. Integración de modelos numéricos más avanzados, como el método de elementos finitos y modelos constitutivos tipo *Hardening Soil*. A pesar de que el método de áreas discretas ofrece un buen resultado en el diseño de losas de cimentación, el enfoque FEM resuelve las ecuaciones de equilibrio en la estructura y el suelo simultáneamente, permitiendo una distribución natural de tensiones y deformaciones según las propiedades del suelo y la cimentación, sin depender de un módulo de balasto supuesto. También permite considerar efectos no lineales, estratificación compleja o el nivel freático, entre otros.
- III. Explorar otras hibridaciones que, partiendo de un modelo de *Machine Learning* para la búsqueda global, incorporen algoritmos de mayor precisión en la fase de búsqueda local, especialmente en contextos con mediciones ruidosas. Los resultados obtenidos indican que los métodos deterministas utilizados (como Gauss-Newton o Levenberg-Marquardt) presentan una menor precisión en escenarios sintéticos con ruido, en comparación con enfoques de búsqueda directa o métodos basados en programación matemática. Si bien la metodología propuesta destaca por su bajo coste computacional, una línea de investigación futura podría consistir en evaluar nuevas combinaciones híbridas que integren técnicas de búsqueda local más robustas frente al ruido, analizando el posible incremento del coste computacional asociado y su compensación en términos de precisión.

- IV. Extensión de la metodología a suelos cohesivos, incorporando mediciones de asientos de consolidación en función del tiempo, abriendo la puerta al cálculo retrospectivo de parámetros como el índice de compresión  $c_c$ , el índice de recompresión  $c_r$  o coeficiente de compresibilidad  $m_v$ , entre otros. La adaptación del modelo requeriría incorporar funciones de respuesta dependientes del tiempo y, posiblemente, ajustar los algoritmos de optimización para tener en cuenta el carácter no instantáneo de la respuesta del terreno. Esta línea de trabajo ampliaría significativamente el alcance de la metodología, permitiendo su aplicación en proyectos sobre arcillas blandas, precargas, depósitos naturales y otras situaciones donde la consolidación primaria o secundaria condiciona el comportamiento geotécnico a medio y largo plazo.
- V. Ampliar la aplicación del método al análisis retrospectivo de parámetros en suelos tratados o mejorados, como en el caso de técnicas de mejora mediante precarga, columnas de grava o inclusiones rígidas. La metodología propuesta, centrada hasta ahora en suelos granulares no tratados, podría adaptarse para evaluar la evolución de parámetros geotécnicos en suelos cuyo comportamiento ha sido modificado artificialmente. En particular, la aplicación de técnicas como la precarga con o sin drenes verticales induce una modificación progresiva del módulo de deformación, que puede ser monitoreada e interpretada mediante mediciones de asentamiento y presión intersticial. Integrar estos efectos en el modelo de retroanálisis permitiría no solo calibrar los parámetros iniciales, sino también caracterizar el proceso de mejora y optimizar su diseño y seguimiento en campo. Esta línea de investigación representa una oportunidad para extender el uso del enfoque híbrido a contextos donde la variación temporal de las propiedades del terreno es un factor clave en el diseño y control de la obra.
- VI. Extrapolar la metodología a otra tipología de cálculos. Se destaca la potencial aplicación en estructuras de contención o túneles. Aunque el presente trabajo se ha basado en cimentaciones superficiales, la metodología de análisis inverso propuesta es extrapolable a otros contextos donde se disponga de mediciones de campo y exista incertidumbre en los parámetros geotécnicos. El caso de estructuras de contención es especialmente interesante, dado que es ideal para un enfoque observacional y presenta más oportunidades de optimización con la evolución de la construcción.
- VII. Aplicación en un caso real bajo un enfoque observacional, desarrollando una metodología que tome como premisa la automatización del cálculo retrospectivo. Una

línea especialmente prometedora consiste en implementar el modelo propuesto dentro de un proyecto real que utilice el método observacional, permitiendo la actualización continua de los parámetros geotécnicos a medida que avanza la obra y se obtienen nuevos datos de instrumentación. Esta aproximación permitiría validar la utilidad del modelo en un entorno operativo, así como evaluar su capacidad para integrarse en flujos de trabajo donde la toma de decisiones debe adaptarse a la evolución del comportamiento real del terreno. Para ello, sería necesario desarrollar una arquitectura automatizada que conecte directamente las lecturas de campo (por ejemplo, asientos y tensiones de contacto) con el modelo de cálculo inverso, generando recomendaciones de ajuste de parámetros en tiempo cuasi-real. Esta línea de trabajo contribuiría directamente a la implementación práctica de los principios del diseño geotécnico adaptativo recogidos en los nuevos Eurocódigos, reforzando la trazabilidad, eficiencia y sostenibilidad del proceso constructivo. Asimismo, esta aplicación permitiría valorar la posible optimización de recursos frente a un cálculo convencional y sería posible cuantificar si la optimización de la solución (respaldada por el monitoreo y el ajuste continuo) se traduce en un ahorro significativo de materiales y costes de ejecución, y si dicho ahorro compensa, en términos económicos y operativos, el esfuerzo adicional requerido para implementar el modelo de cálculo automatizado.

- VIII. Evaluar el impacto de distintos esquemas de monitorización en la eficacia del análisis retrospectivo aplicado a cimentaciones o estructuras de contención. Una posible línea de investigación podría consistir en analizar cómo el tipo de variable medida (asientos, presiones, deformaciones), su ubicación, frecuencia de toma de datos y número de puntos instrumentados afectan la capacidad del modelo para identificar con precisión los parámetros del terreno. Esta evaluación permitiría no solo mejorar la fiabilidad del retroanálisis, sino también optimizar el diseño de sistemas de instrumentación, priorizando configuraciones que aporten el mayor valor informativo con el menor coste posible.

Estas direcciones representan una oportunidad para seguir perfeccionando el método propuesto y ampliar su aplicabilidad a diferentes tipos de suelos, otras tipologías de estructuras o análisis, así como a casos reales de mayor complejidad geotécnica y mediciones ruidosas. Su desarrollo futuro permitirá consolidar la metodología como una herramienta

versátil, adaptable y útil tanto en fases de diseño como en toma de decisiones durante la ejecución y seguimiento de obras geotécnicas.

## 11. REFERENCIAS

- AKBAS, Sami O.; KULHAWY, Fred H. Axial compression of footings in cohesionless soils. I: Load-settlement behavior. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 2009, vol. 135, no 11, p. 1562-1574.
- BARBA ÁVILA, Carlos. *Diseño y cálculo de las cimentaciones superficiales*. Universidad Europea de Madrid, 2024. Disponible en plataforma Campus Virtual. Acceso restringido.
- BIOT, Maurice A. Bending of an infinite beam on an elastic foundation. 1937.
- BOUSSINESQ, Joseph. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques: principalement au calcul des deformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur; memoire suivi de notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse. Gauthier-Villars, 1885.
- BOWLES, Joseph E. Elastic foundation settlements on sand deposits. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1987, vol. 113, no 8, p. 846-860.
- BRIAUD, Jean-Louis. *Geotechnical engineering: unsaturated and saturated soils*. John Wiley & Sons, 2023.
- BURLAND, J. B., et al. Settlement of foundations on sand and gravel. *Proceedings of the institution of Civil Engineers*, 1985, vol. 78, no 6, p. 1325-1381.
- BURMISTER, Donald M. The general theory of stresses and displacements in layered systems. I. *Journal of applied physics*, 1945, vol. 16, no 2, p. 89-94.
- DAS, Braja M. *Advanced soil mechanics*. CRC press, 2019.
- DAS, Braja M.; SOBHAN, Khaled. *Principles of geotechnical engineering*. 1990.
- ESCRIBANO, Raúl Rubén Rodríguez. *El sólido elástico*. [en línea]. Universidad Europea de Madrid, 2024. Disponible en plataforma Campus Virtual. Acceso restringido.
- FADUM, R.E. Influence of depth and shape on pressure distribution beneath loaded areas. *Proceedings of the Highway Research Board*. 1948, 28, 403-417.
- FILONENKO-BORODICH, M. M. Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika*, 1940, vol. 46, p. 3.

FOX, L. The mean elastic settlement of a uniformly loaded area at a depth below the ground surface. En *Proc. 2nd Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng.* 1948. p. 129.

HETÉNYI, Miklós; HETBENYI, Miklbos Imre. *Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*. Ann Arbor, MI: University of Michigan press, 1946.

HOLTZ, W. G., et al. Discussion of "Settlement of Spread Footings on Sand". *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1969, vol. 95, no 3, p. 900-916.

JIMÉNEZ SALAS, Jose Antonio.; JUSTO, JL de; SERRANO, A. Geotecnia y cimientos II. 1981.

KERR, Arnold D. Elastic and viscoelastic foundation models. 1964.

LEKHNIŤSKIĬ, Sergeĭ Georgievich. *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-day, 1963.

LESHCHINSKY, Dov; MARCOZZI, Guy F. Bearing capacity of shallow foundations: rigid versus flexible models. *Journal of geotechnical engineering*, 1990, vol. 116, no 11, p. 1750-1756.

MAYNE, Paul W.; POULOS, Harry G. Approximate displacement influence factors for elastic shallow foundations. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 1999, vol. 125, no 6, p. 453-460.

MEYERHOF, G. G. Penetration tests and bearing capacity of cohesionless soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1956, vol. 82, no 1, p. 866-1-866-19.

MEYERHOF, George G. Shallow foundations. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1965, vol. 91, no 2, p. 21-31.

NEWMARK, Nathan Mortimore. Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. *University of Illinois. Engineering Experiment Station. Bulletin; no. 338*, 1942.

PASTERNAK, P. L. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gos. Izd. Lit. po Strait i Arkh*, 1954.

POULOS, Harry George; DAVIS, Edward Hughesdon. Elastic solutions for soil and rock mechanics. (*No Title*), 1974.

REISSNER, E. On the theory of transverse bending of elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1976, vol. 12, no 8, p. 545-554.

- SCHLEICHER, F. von. Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung). *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1926, vol. 6, no 3, p. 199-216.
- SCHMERTMANN, John H. Static cone to compute static settlement over sand. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1970, vol. 96, no 3, p. 1011-1043.
- SCHMERTMANN, John H.; HARTMAN, John Paul; BROWN, Phillip R. Improved strain influence factor diagrams. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1978, vol. 104, no 8, p. 1131-1135.
- STEINBRENNER, W. A rational method for the determination of the vertical normal stresses under foundations. En Proc. Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. 1936. p. 142-143.
- STEINBRENNER, W. Tafeln zur setzungsberechnung. *Die StraBe*, 1934, vol. 1.
- TEODORU, Iancu-Bogdan; MUŞAT, Vasile. The modified Vlasov foundation model: An attractive approach for beams resting on elastic supports. *EJGE*, 2010, vol. 15, p. 1-13.
- TERZAGHI, Karl. Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Geotechnique*, 1955, vol. 5, no 4, p. 297-326.
- TERZAGHI, Karl; PECK, Ralph B.; MESRI, Gholamreza. *Soil mechanics in engineering practice*. John Wiley & sons, 1996.
- VESIC, Aleksander B. Bearing capacity of deep foundations in sand. *Highway research record*, 1963, no 39.
- VIJAYAKUMAR, S., YACIOUB, T. E., y CURRAN, J. H. Efficient boundary integral method for stress analysis in multilayered elastic media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2000, vol. 24, no. 5, pp. 427-449.
- WESTERGAARD, Harold M. Stresses in concrete pavements computed by theoretical analysis. *Public roads*, 1926.
- WINKLER, Emil. *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit: mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc.* H. Dominicus, 1867.
- YUE, D. Efficient computation of point load solutions in layered elastic media. *Computers and Geotechnics*, 1996, vol. 18, no. 1, pp. 1-18.

- YUE, D. Elastic solutions for layered media by Hankel transforms. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1995, vol. 19, no. 11, pp. 793–811.
- ALIPOUR, Amir, 2011. Effect of Magnitude and Distribution of the Subgrade Reaction Modulus on the Raft Foundation Design. ResearchGate. DOI: 10.13140/RG.2.2.21327.25761.
- Estephan R., Malek C., Abou-Jaoude G., Yacoub T., Skeini H., Turk M., and Valiulin D. (2021). A new design tool for shallow foundations analysis offering enhanced accuracy, reduced design time, and optimized construction cost. Submitted to the Proceedings of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Sydney 2021
- Ledesma, A., Gens, A., & Alonso, E.E. (1996). *Estimation of parameters in geotechnical backanalysis — I. Maximum likelihood approach*. *Computers and Geotechnics*, **18**(1), 1–27
- Gens, A., Ledesma, A., & Alonso, E.E. (1996). *Backanalysis using prior information. Application to the staged excavation of a cavern*. Proc. 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics.
- Levasseur, S., et al. (2008). *Soil parameter identification using a genetic algorithm*. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **32**(17), 189–213.
- Holland, J.H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press.
- Goldberg, D.E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley.
- McGinley, B., et al. (2011). *Maintaining healthy population diversity using adaptive crossover, mutation, and selection*. *IEEE Trans. Evol. Comp.*, **15**(5), 692–714.
- De Santos, C. (2015). *Backanalysis Methodology Based on Multiple Optimization Techniques for Geotechnical Problems*. PhD Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya.
- De Santos, C., Ledesma, A., & Gens, A. (2014). *Hybrid minimization algorithm applied to tunnel backanalysis*. In: Schweiger (ed.), *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, Taylor & Francis.
- Toromanovic, J., et al. (2015). *Effects of random measurement error on the genetic algorithm in soil parameter identification for a dam*. Proc. 6th Int. Young Geotech. Eng. Conf.



## **12.ANEJO A**

En el presente anejo se incluyen las gráficas con los resultados de todos los algoritmos de optimización empleados en el caso de estudio sintético expuesto en el apartado 6.1.

## 12.1 Anejo A1. Métodos basados en gradientes

### 12.1.1 Gauss-Newton – Sin ruido

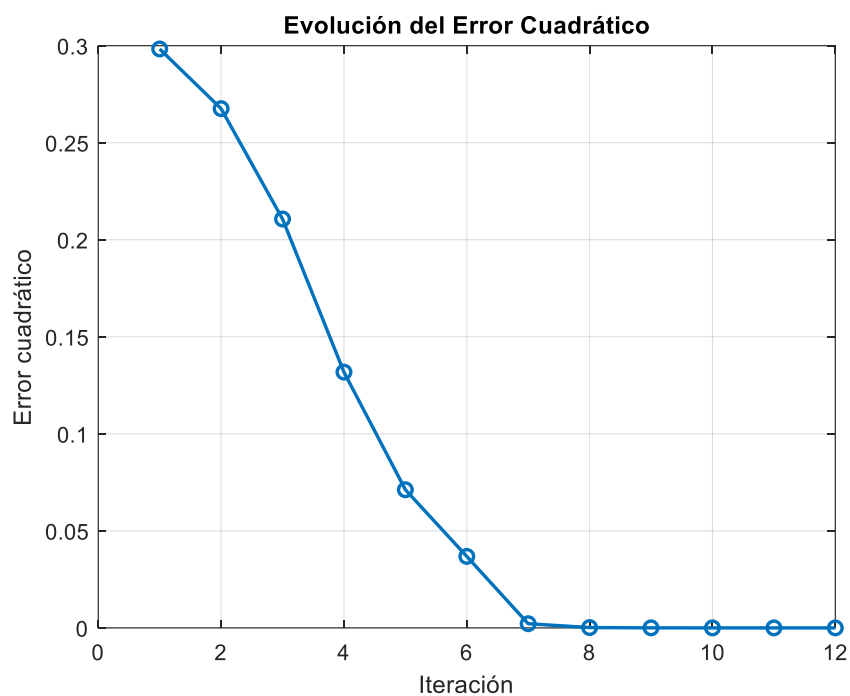


Figura A-138 – Error cuadrático vs Iteración. Gauss-Newton sin ruido

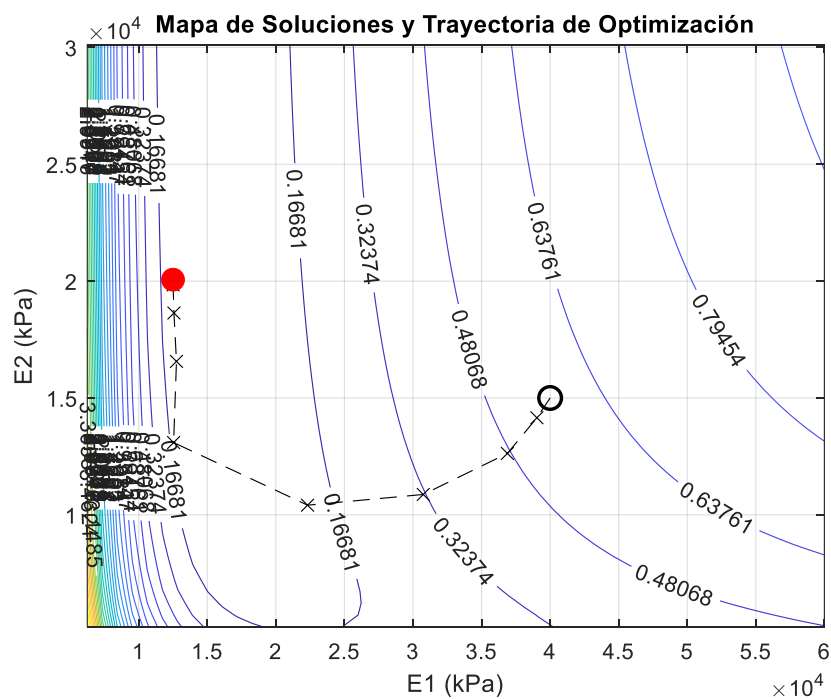


Figura A-139 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido

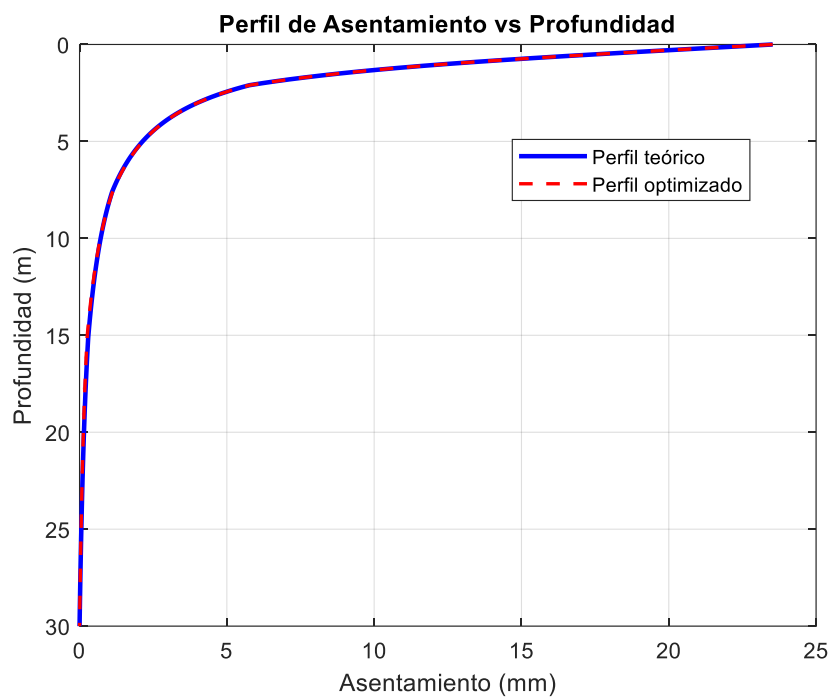


Figura A-140 – Perfil asiento retrocalculado. Gauss-Newton sin ruido

### 12.1.2 Gauss-Newton – Con ruido

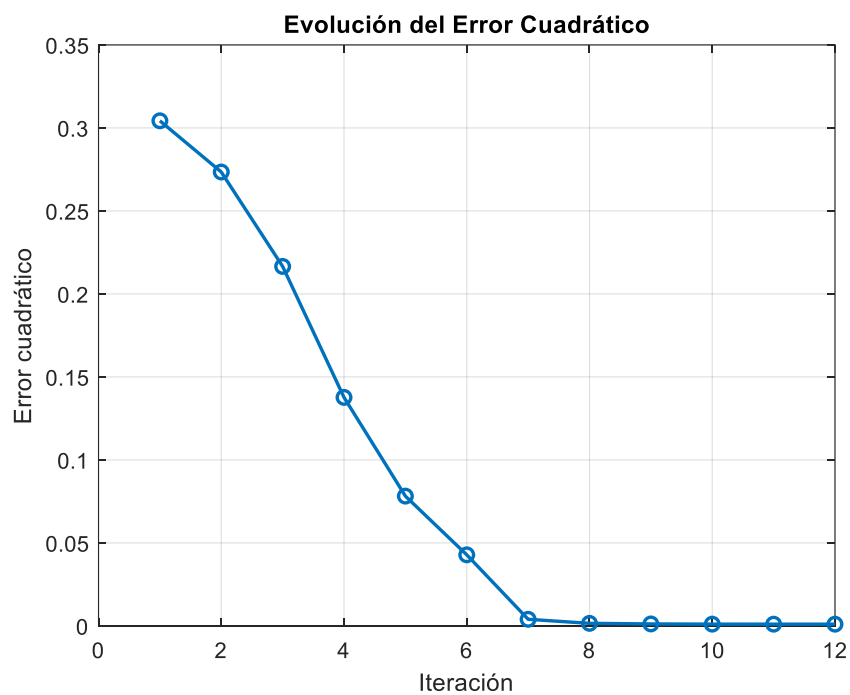


Figura A-141 – Error cuadrático vs Iteración. Gauss-Newton con ruido

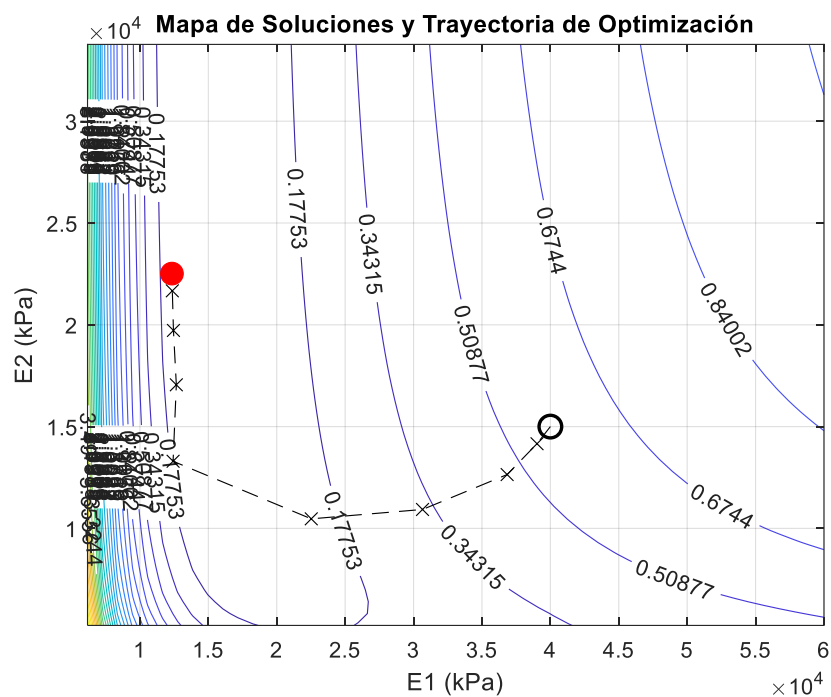


Figura A-142 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido

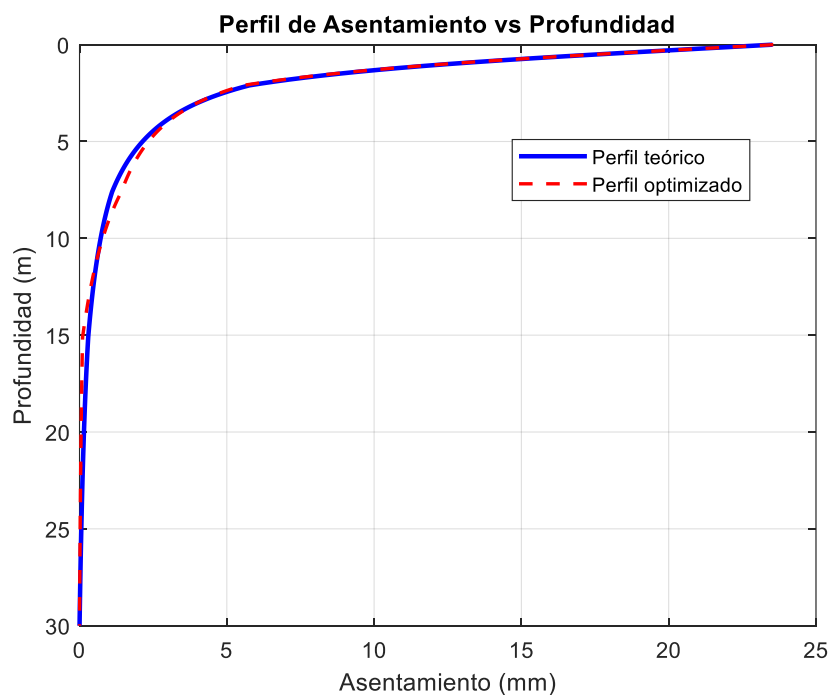


Figura A-143 – Perfil asiento retrocalculado. Gauss-Newton con ruido

### 12.1.3 Levenberg-Marquardt – Sin ruido

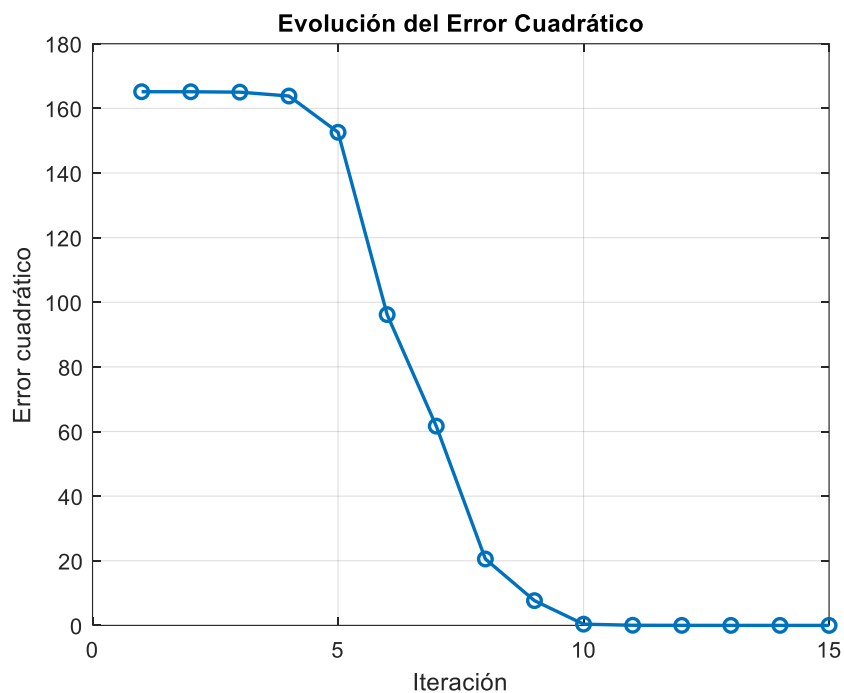


Figura A-144 – Error cuadrático vs Iteración. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido

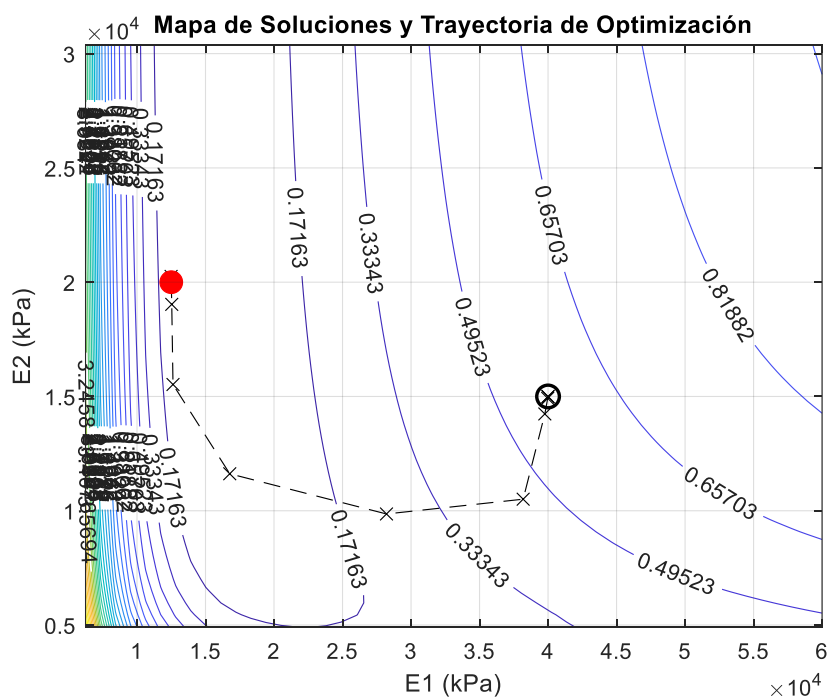


Figura A-145 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido

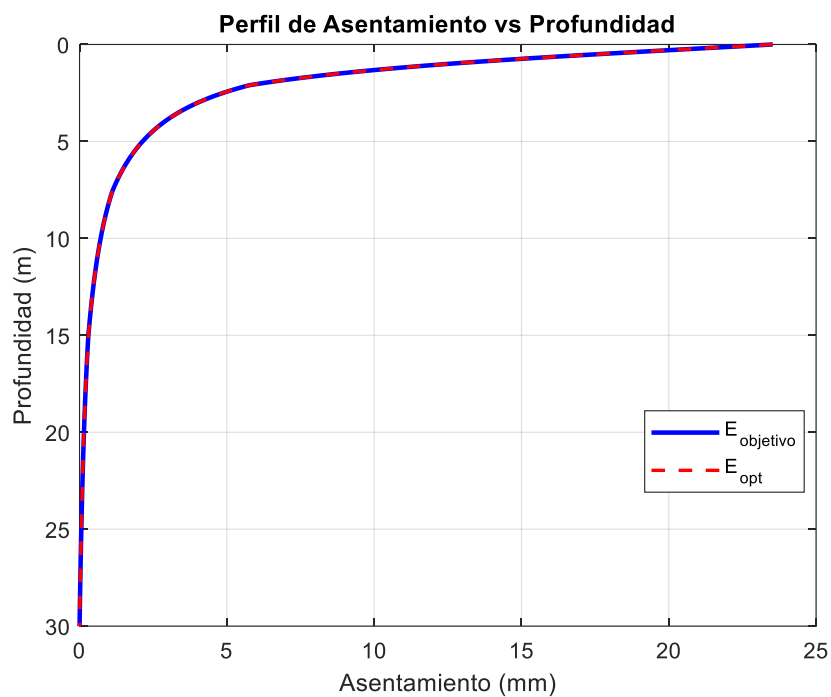


Figura A-146 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido

#### 12.1.4 Levenberg-Marquardt – Con ruido

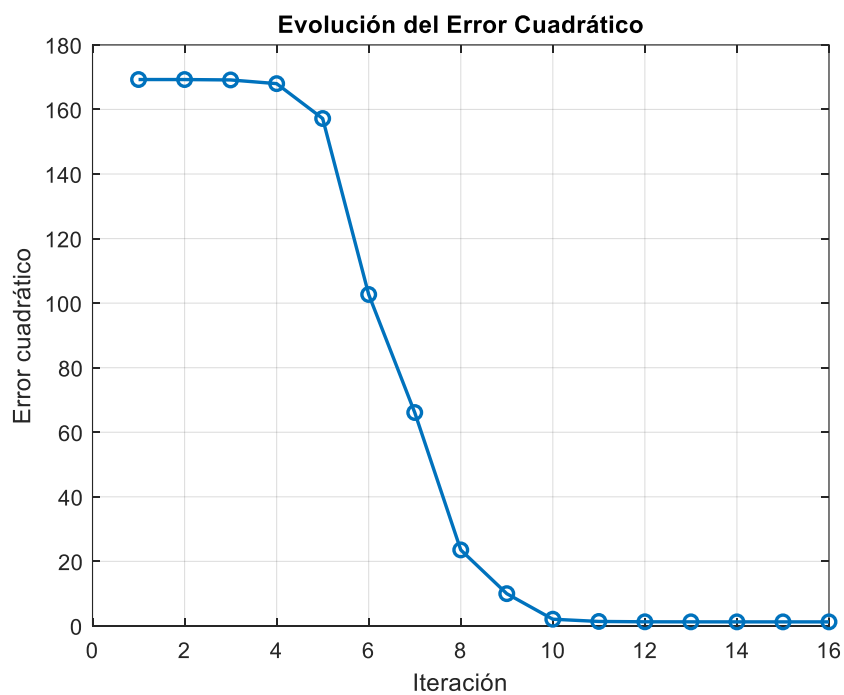


Figura A-147 – Error cuadrático vs Iteración. Mutistart Levenberg-Marquardt con ruido

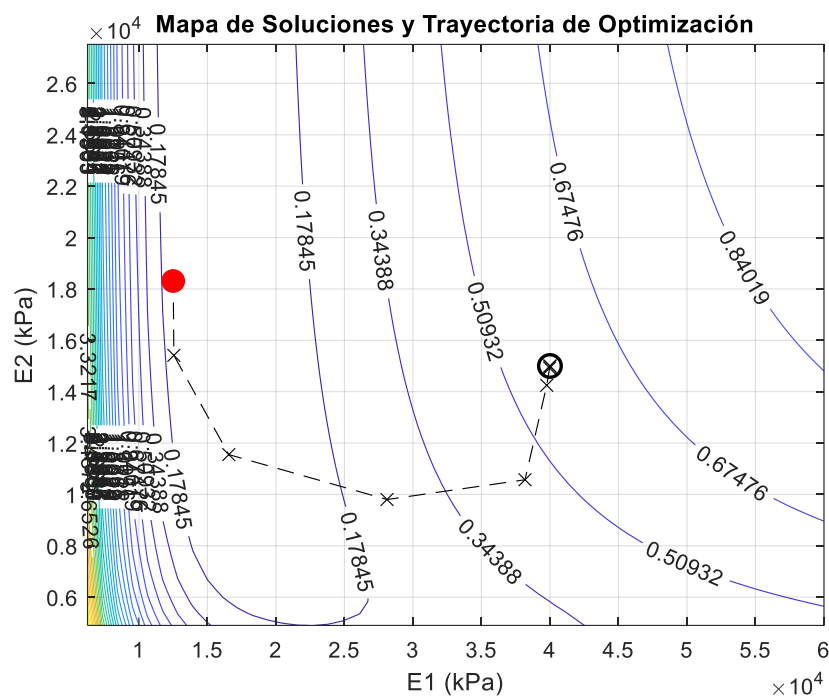


Figura A-148 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido

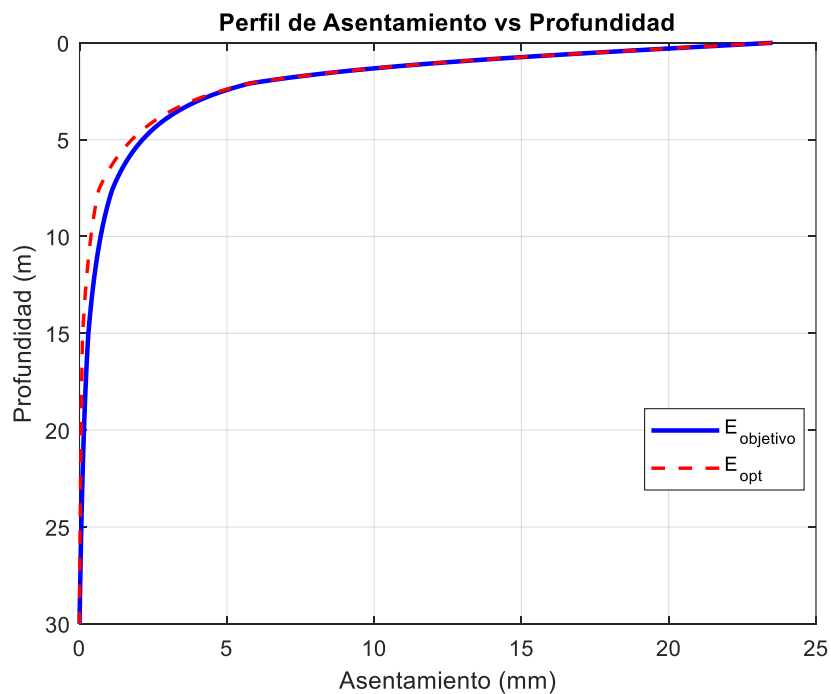


Figura A-149 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Levenberg-Marquardt con ruido

### 12.1.5 Multistart con Levenberg-Marquardt – Sin ruido

Se consideran 50 inicios aleatorios

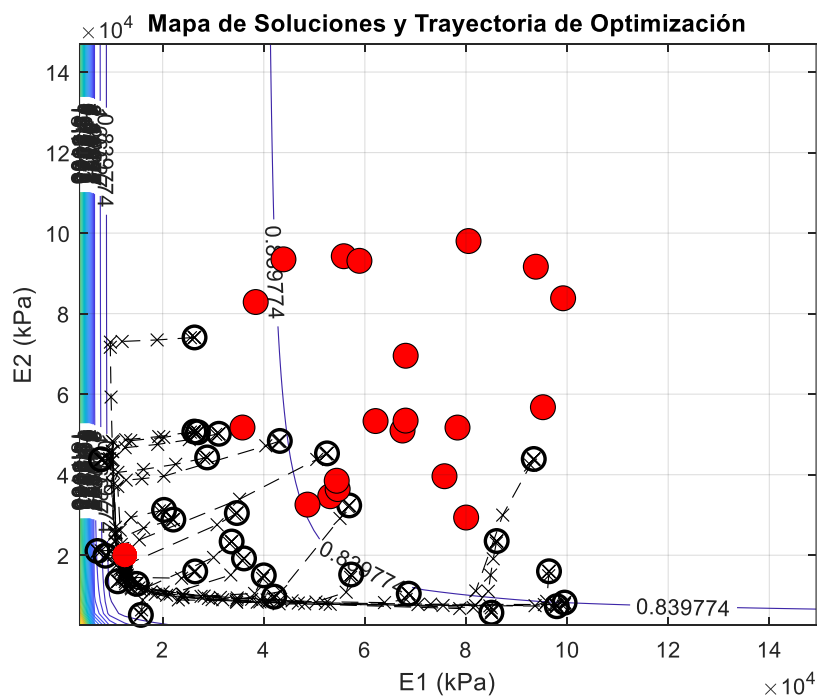


Figura A-150 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido

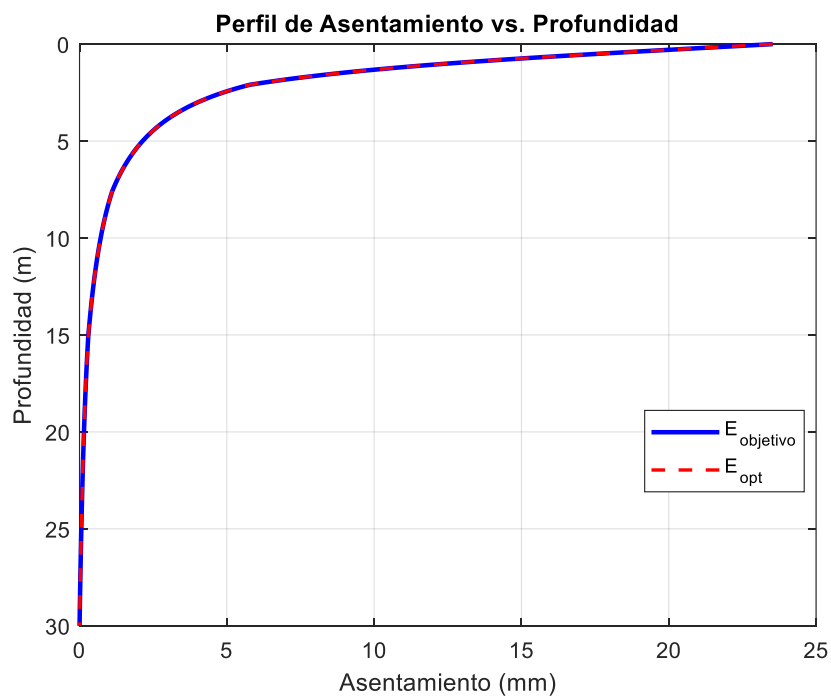


Figura A-151 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Levenberg-Marquardt sin ruido



### 12.1.6 Multistart con Levenberg-Marquardt – con ruido

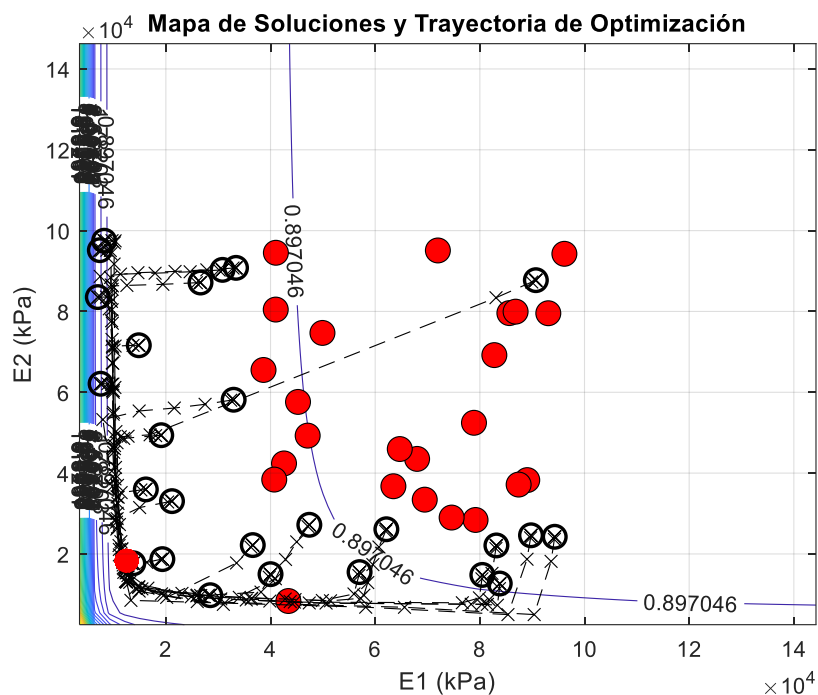


Figura A-152 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Levenberg-Marquardt con ruido

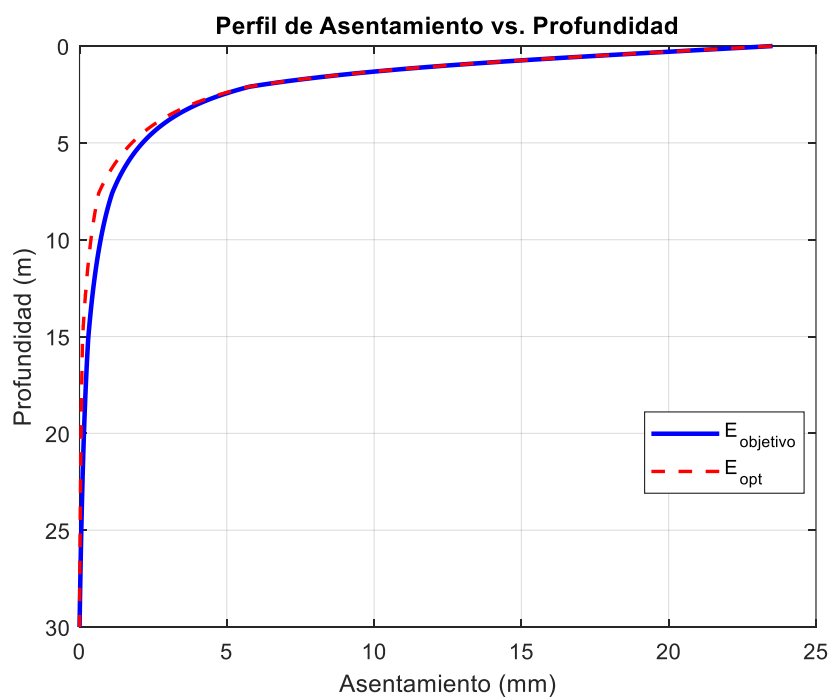


Figura A-153 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Levenberg-Marquardt con ruido



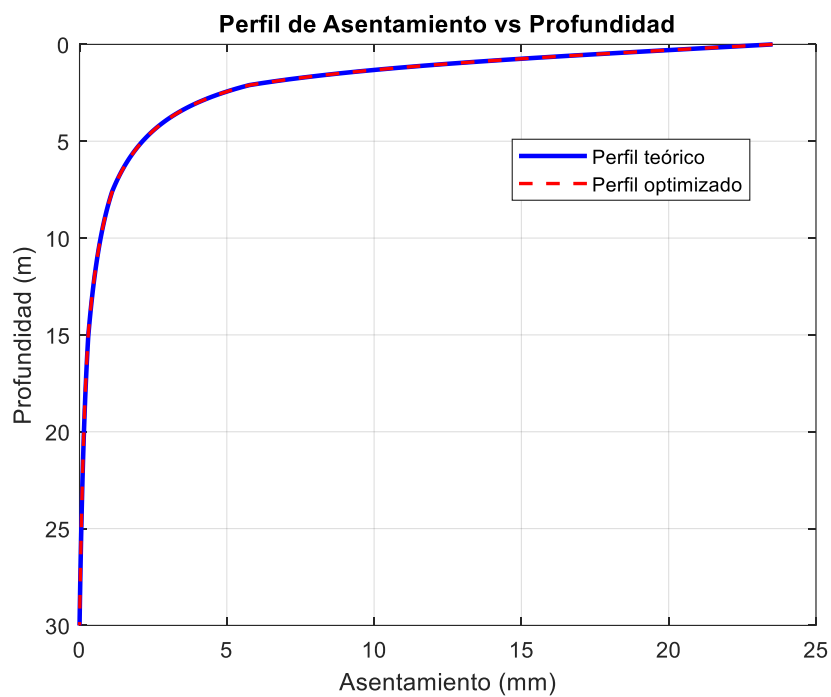


Figura A-156 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Gauss-Newton sin ruido

### 12.1.8 Multistart con Gauss-Newton – Con ruido

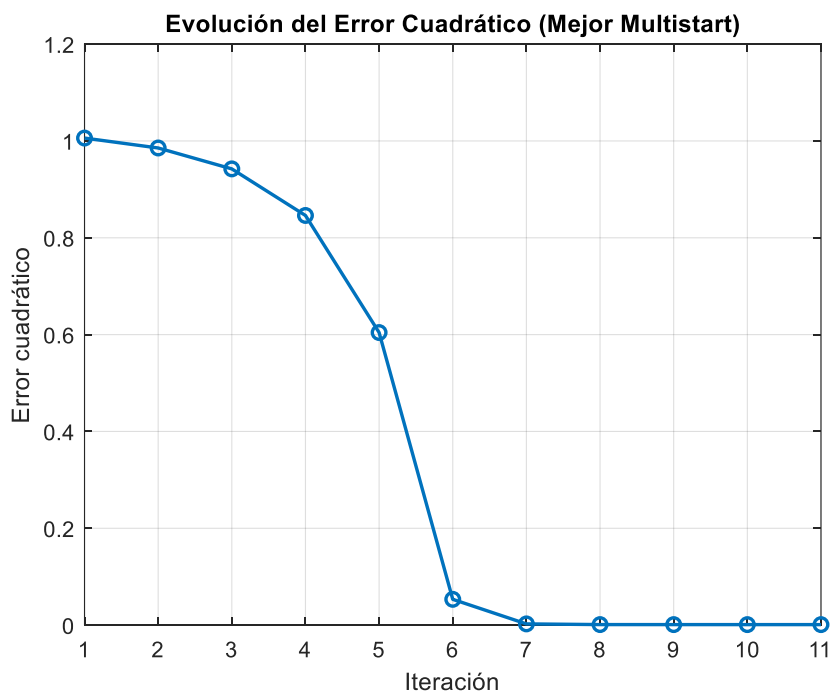


Figura A-157 – Error cuadrático vs Iteración. Mutistart Gauss-Newton con ruido

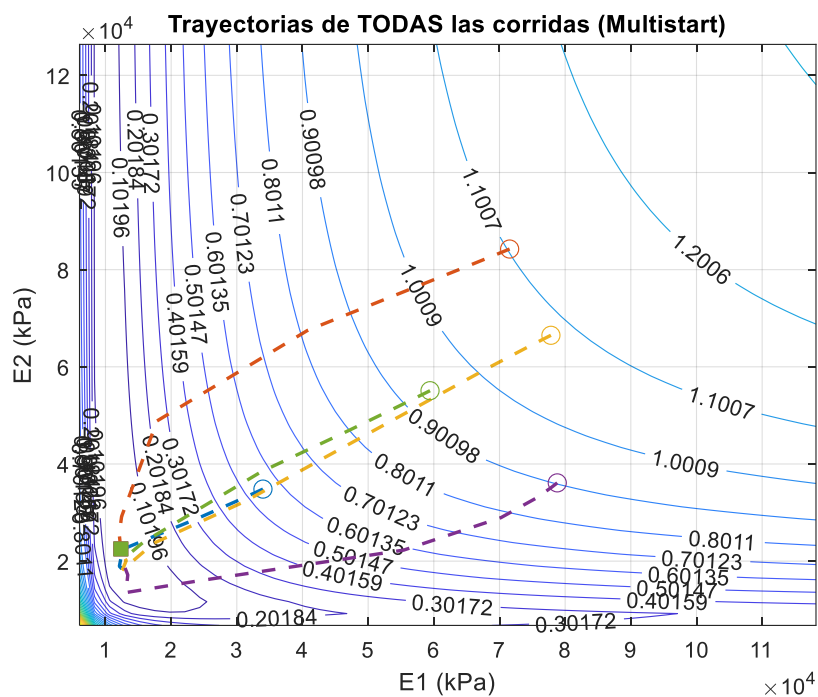


Figura A-158 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Mutistart Gauss-Newton con ruido

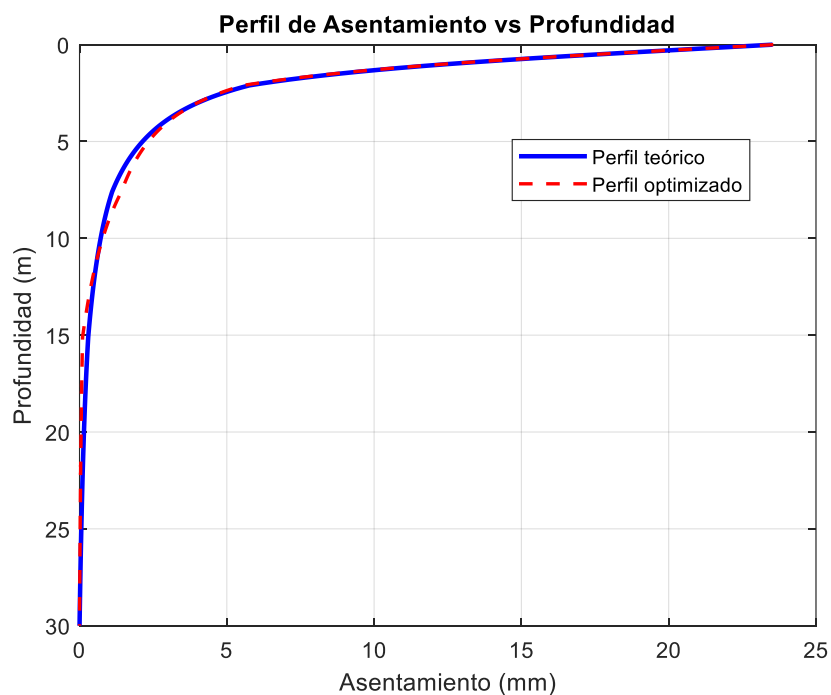


Figura A-159 – Perfil asiento retrocalculado. Mutistart Gauss-Newton con ruido

### 12.1.9 Cuasi-Newton BFGS – Sin ruido

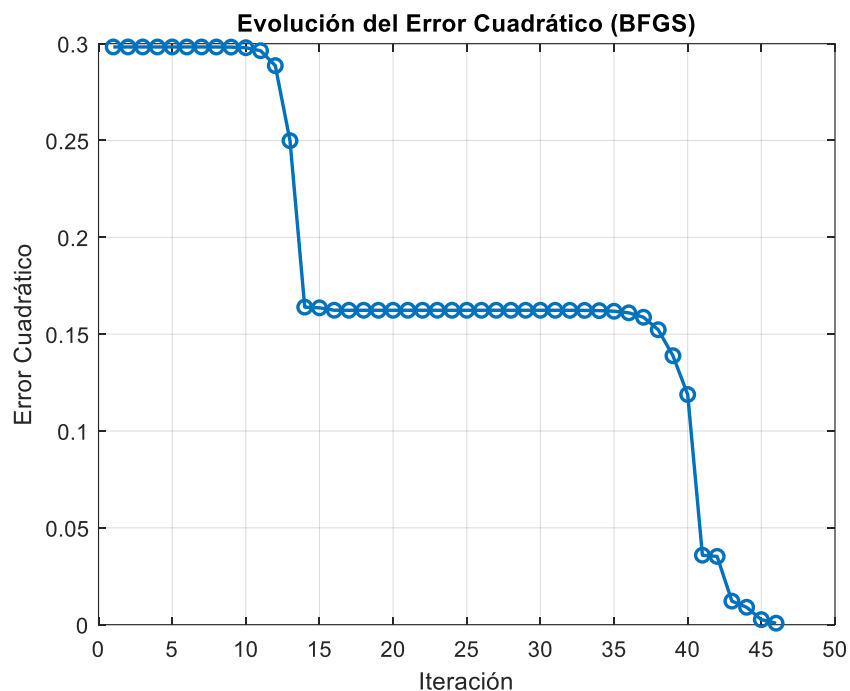


Figura A-160 – Error cuadrático vs Iteración. Cuasi-Newton BFGS sin ruido

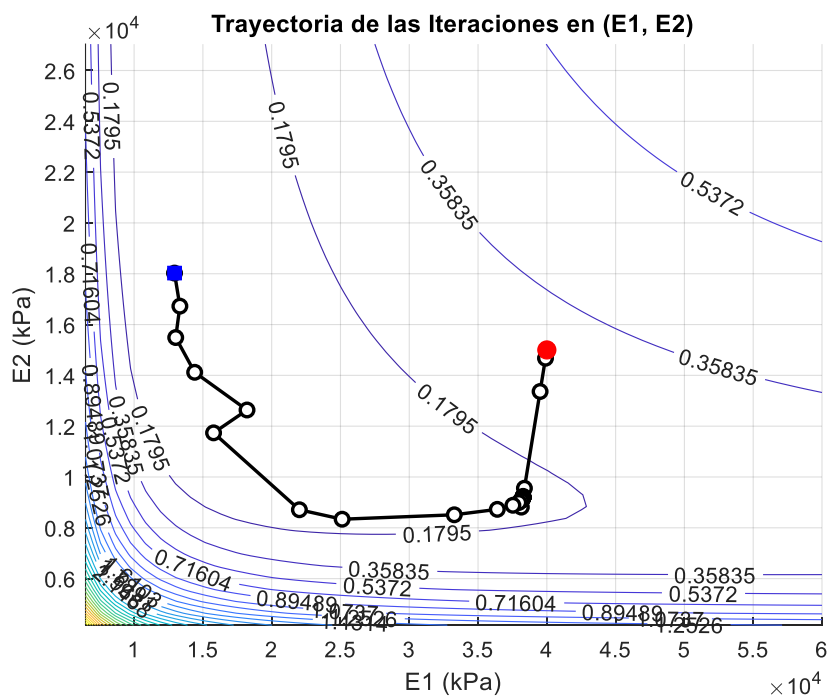


Figura A-161 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Cuasi-Newton BFGS sin ruido

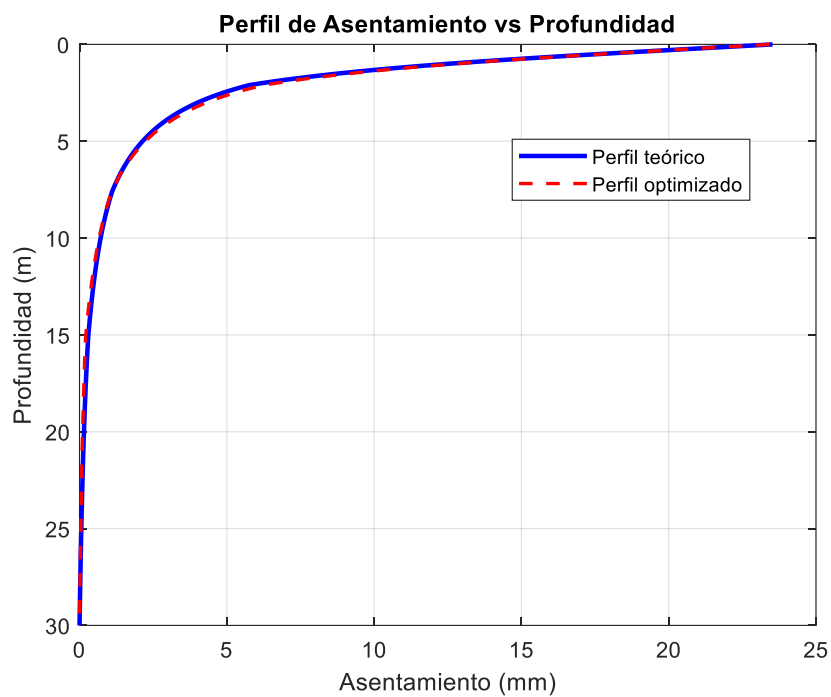


Figura A-162 – Perfil asiento retrocalculado. Cuasi-Newton BFGS sin ruido

### 12.1.10 Cuasi-Newton BFGS – Con ruido

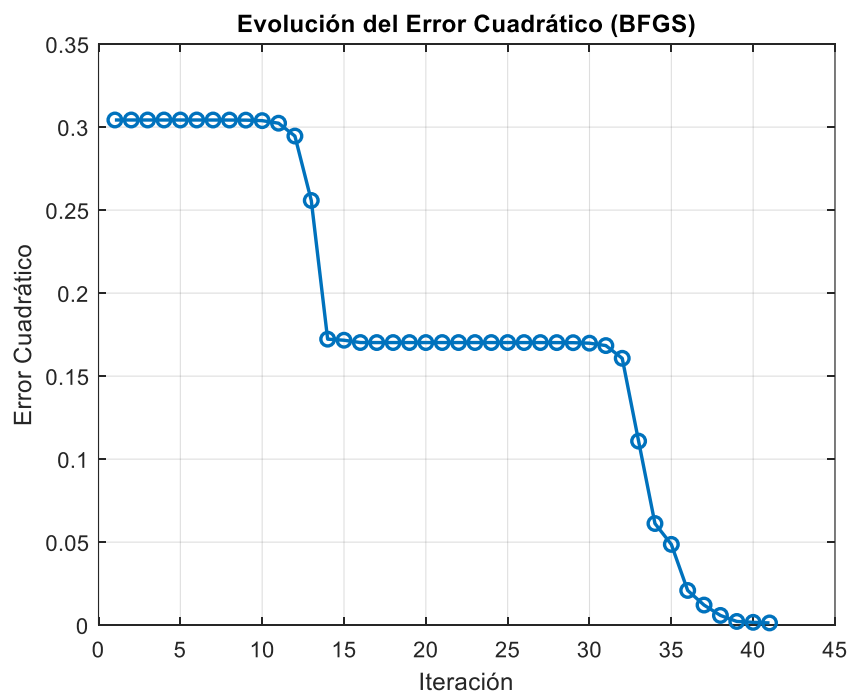


Figura A-163 – Error cuadrático vs Iteración. Cuasi-Newton BFGS con ruido

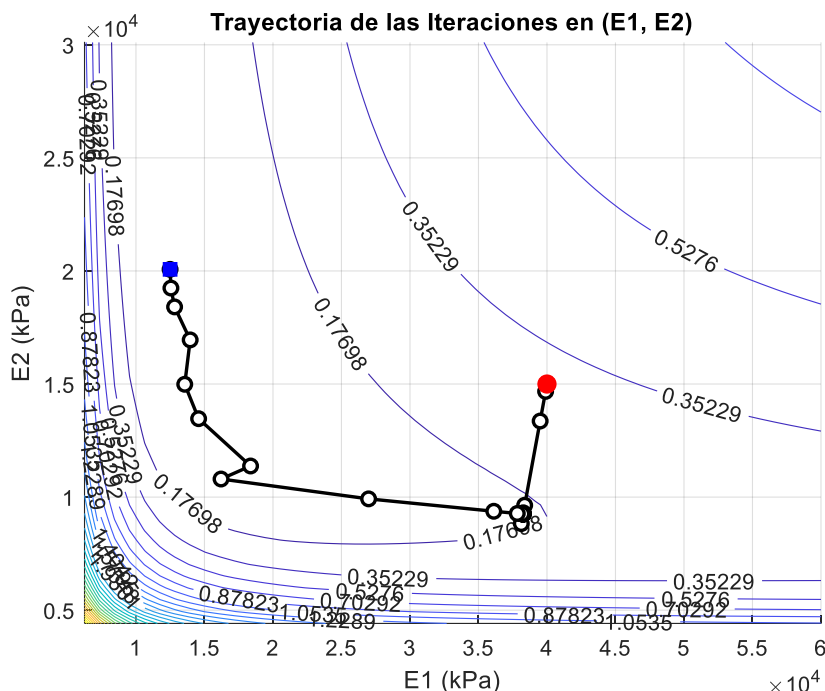


Figura A-164 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Cuasi-Newton BFGS con ruido

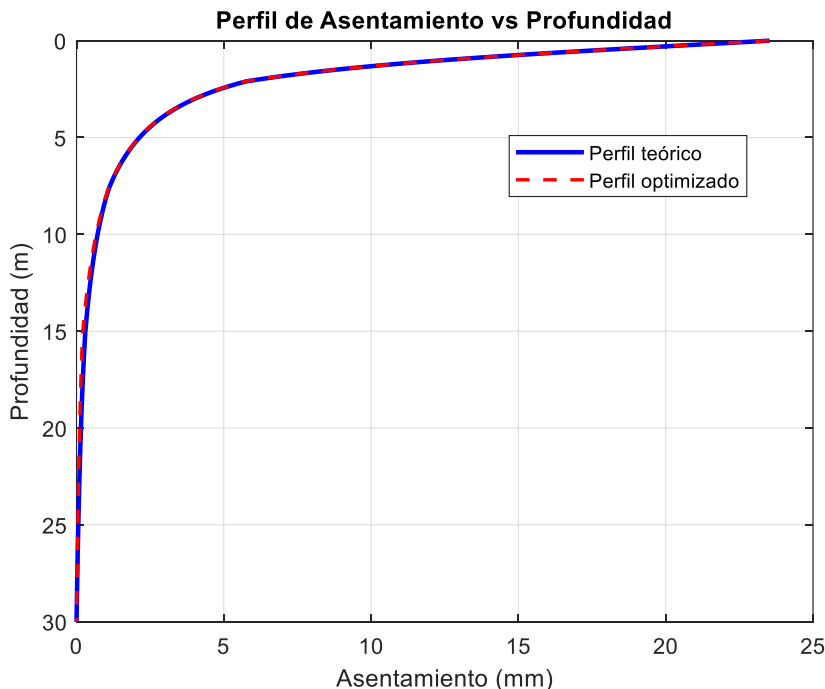


Figura A-165 – Perfil asiento retrocalculado. Cuasi-Newton BFGS con ruido

## 12.2 Anejo A2. Métodos heurísticos y metaheurísticos - Evolutivos

### 12.2.1 Algoritmos Genéticos Simples – Sin ruido

Población de 75 individuos y número de generaciones necesarias para alcanzar error indicado.

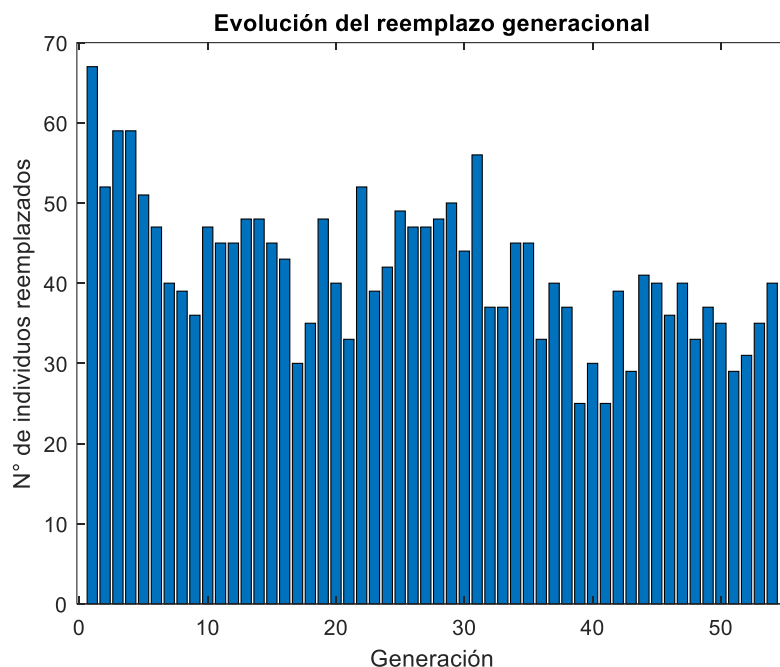


Figura A-166 – Reemplazo generacional. Algoritmo genético simple sin ruido

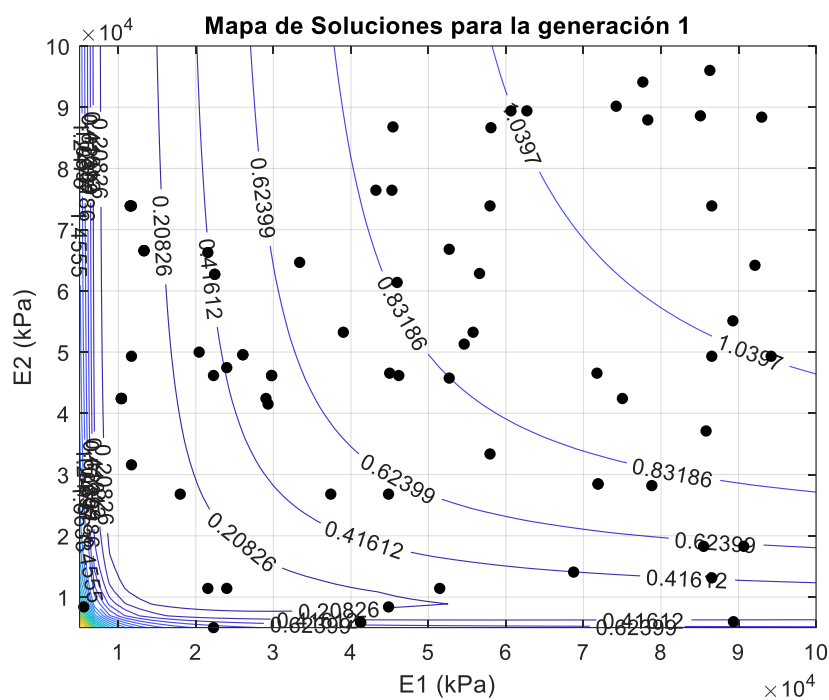


Figura A-167 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 1



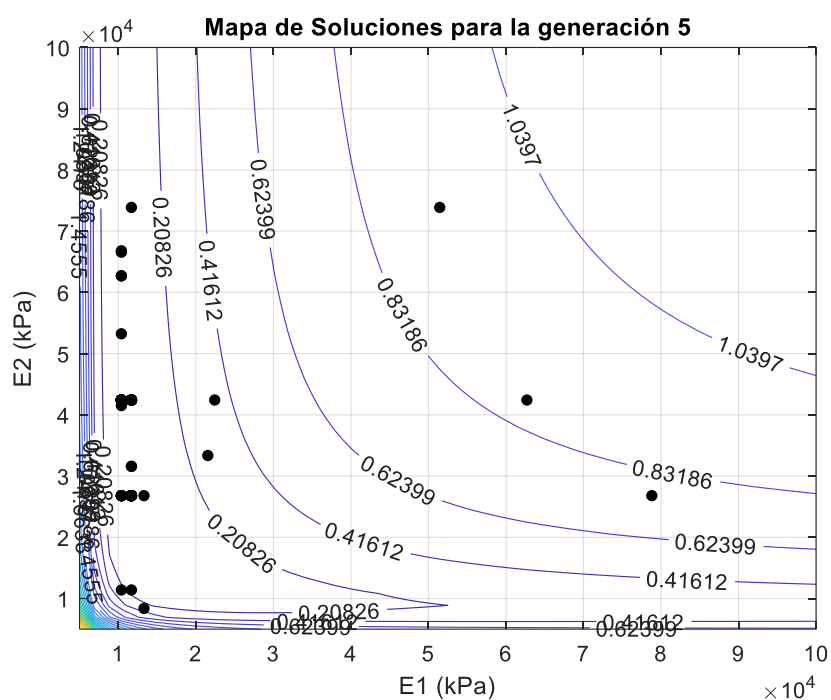


Figura A-168 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 5

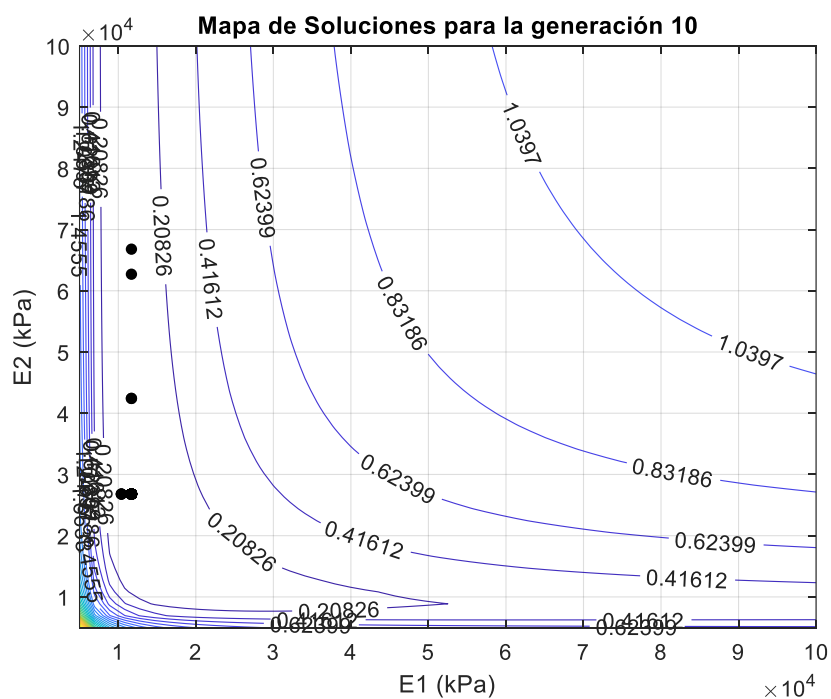


Figura A-169 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 10

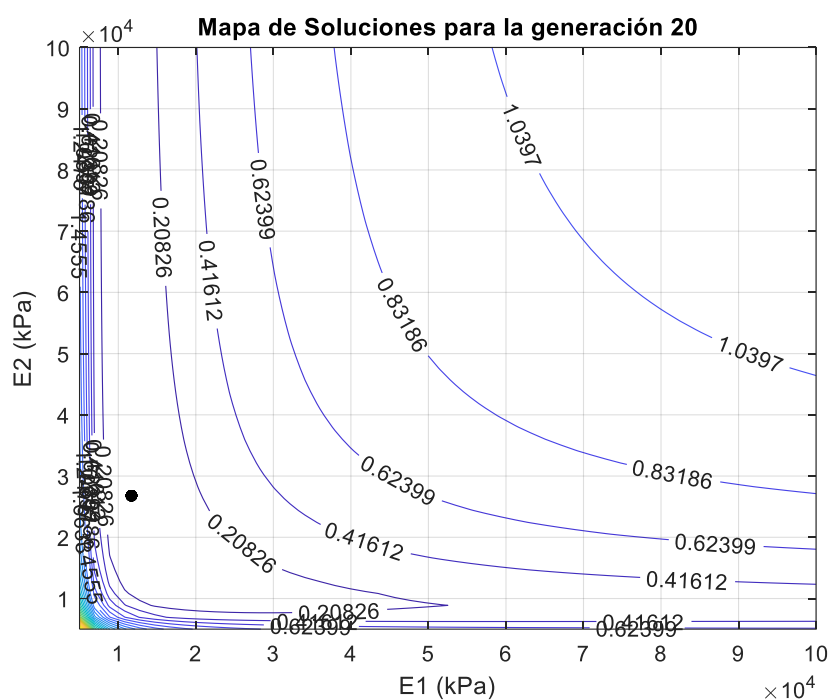


Figura A-170 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 20

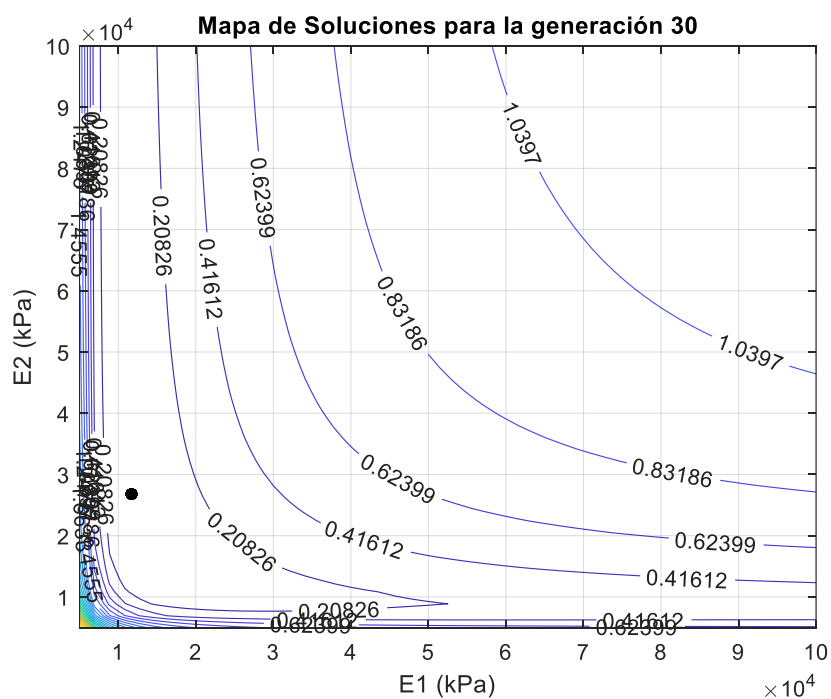


Figura A-171 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 30

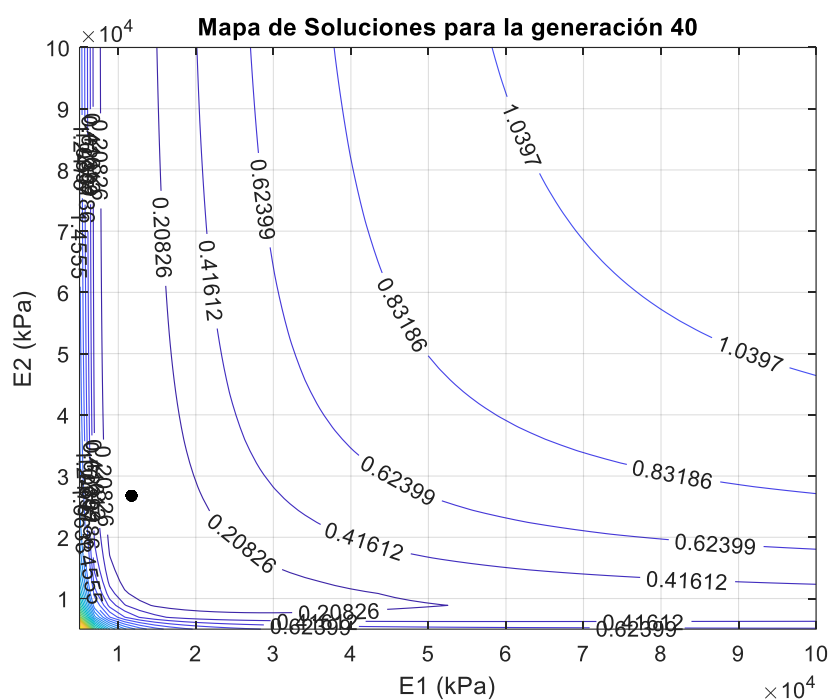


Figura A-172 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 40

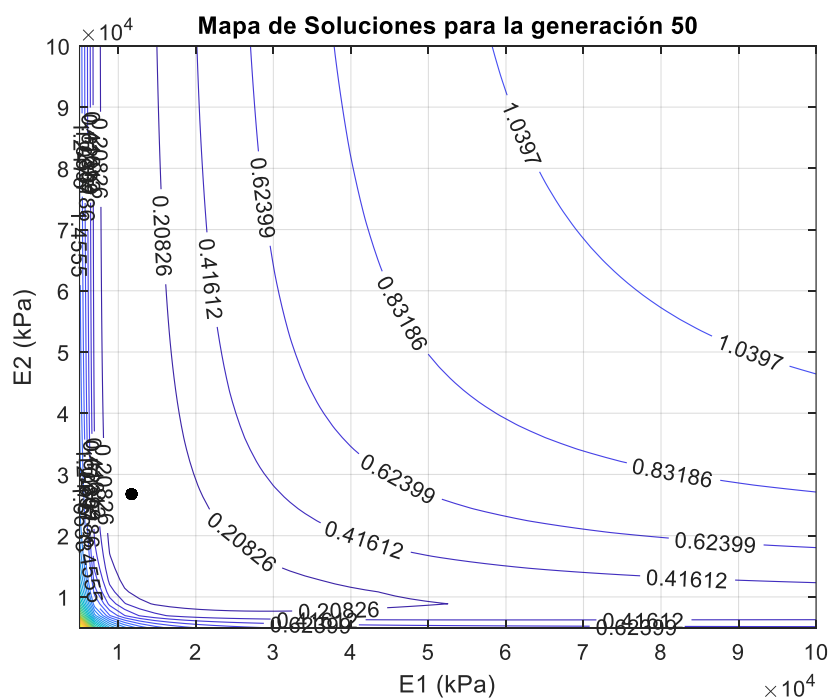


Figura A-173 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 50

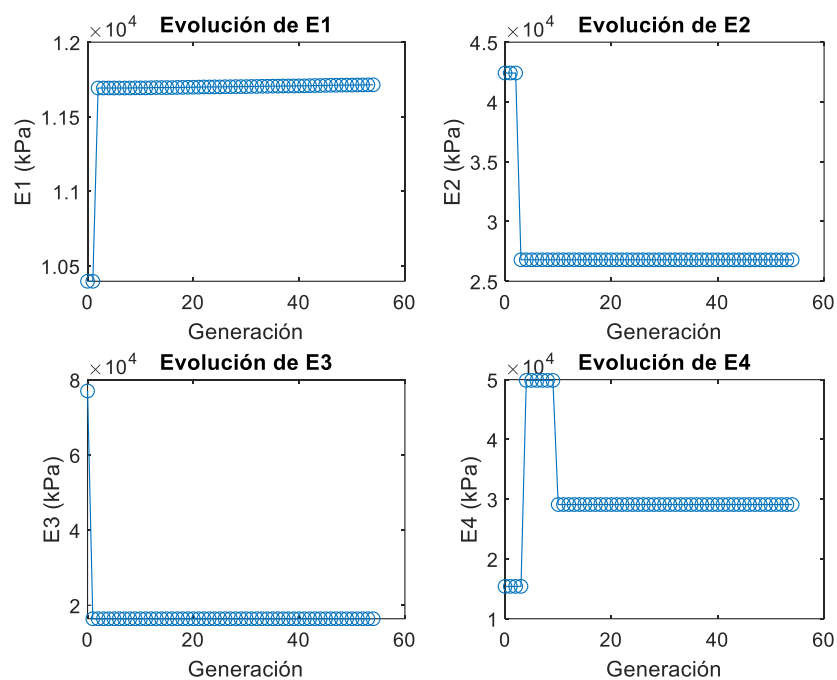


Figura A-174 – Evolución E1-E4. Algoritmo genético simple sin ruido

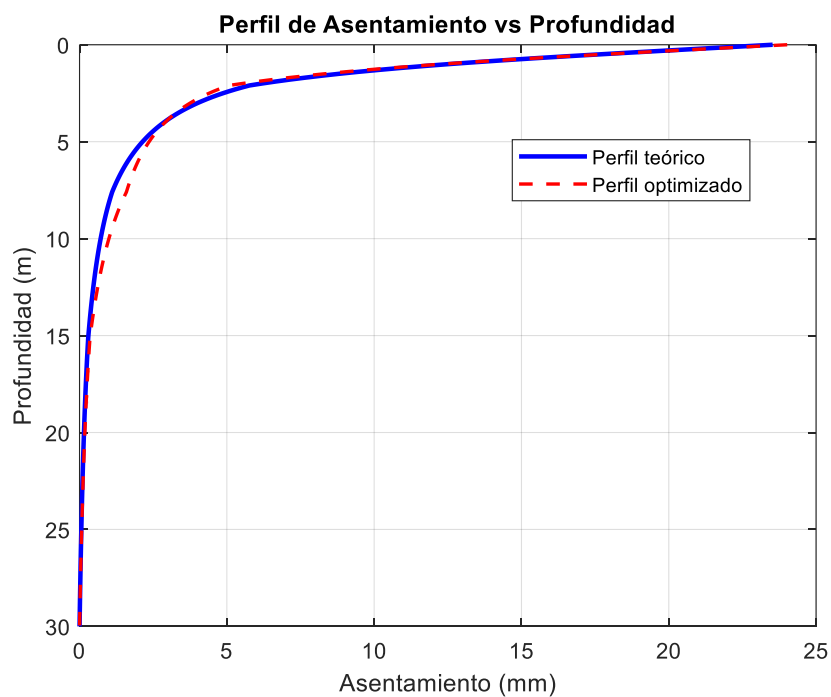


Figura A-175 – Perfil asiento retrocalculado. Algoritmo genético simple sin ruido

### 12.2.2 Algoritmos Genéticos Simples – Con ruido

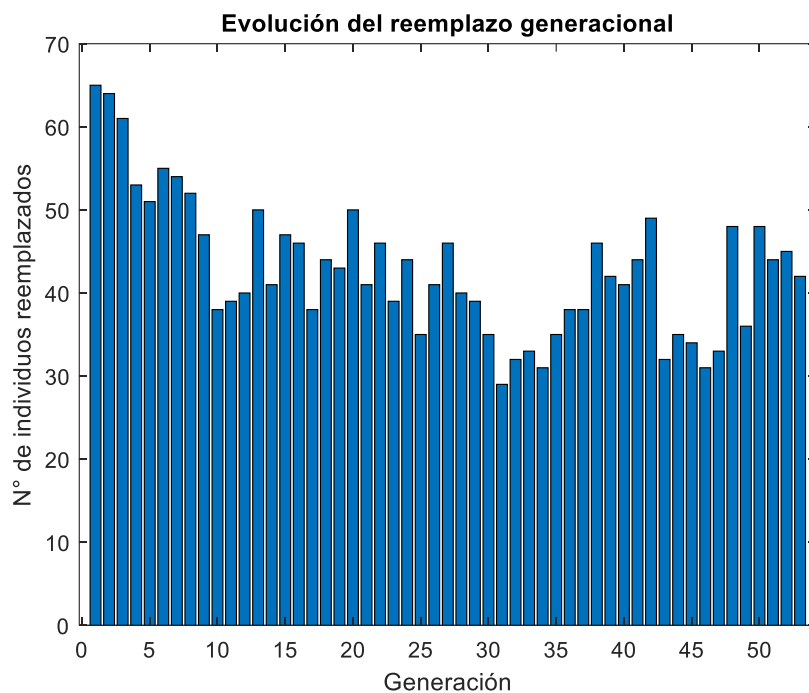


Figura A-176 – Reemplazo generacional. Algoritmo genético simple con ruido

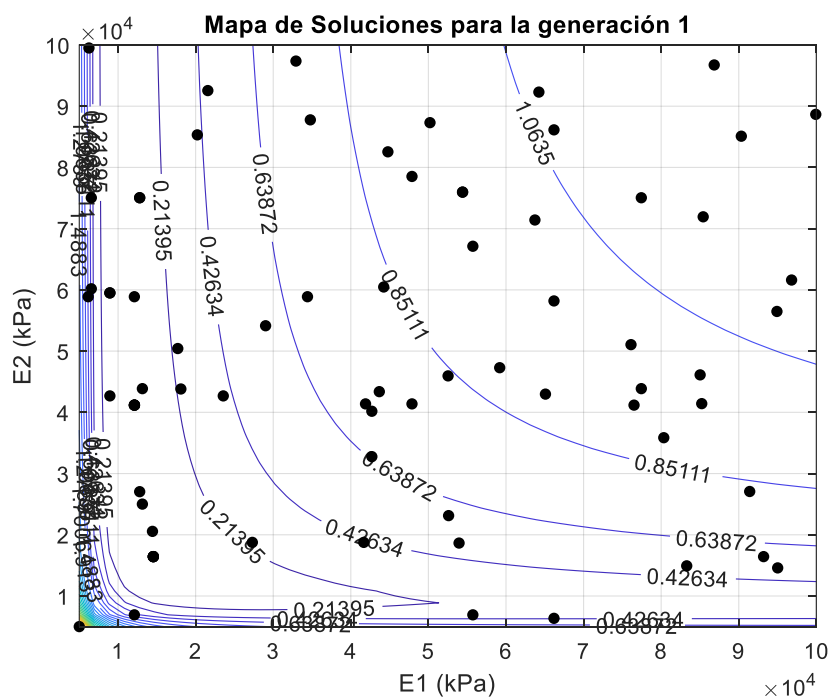


Figura A-177 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 1

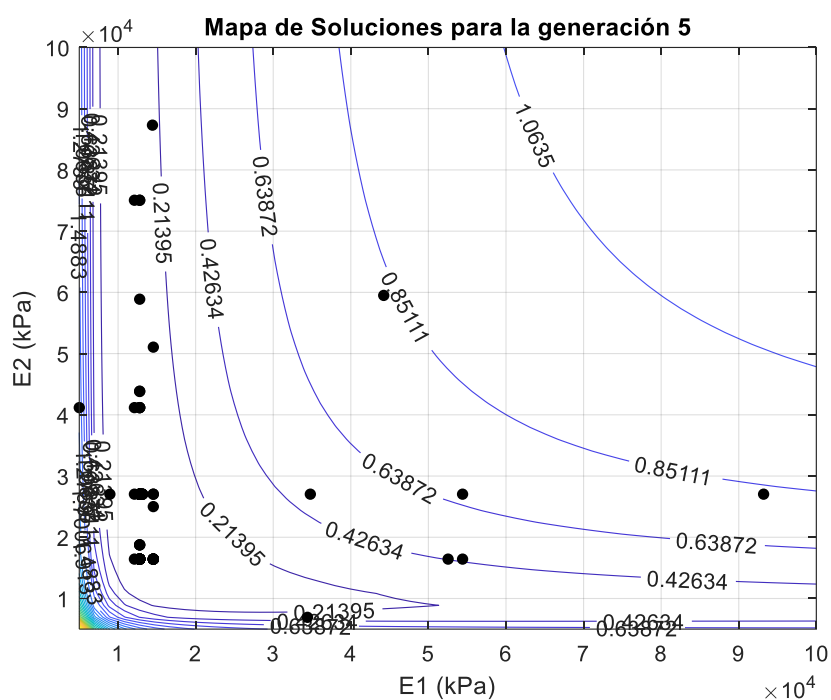


Figura A-178 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 5

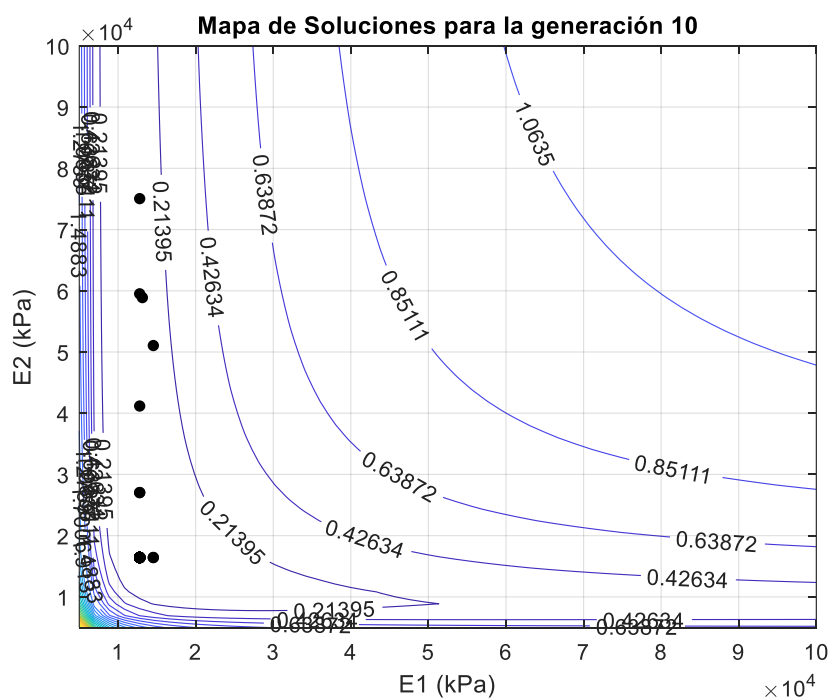


Figura A-179 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 10

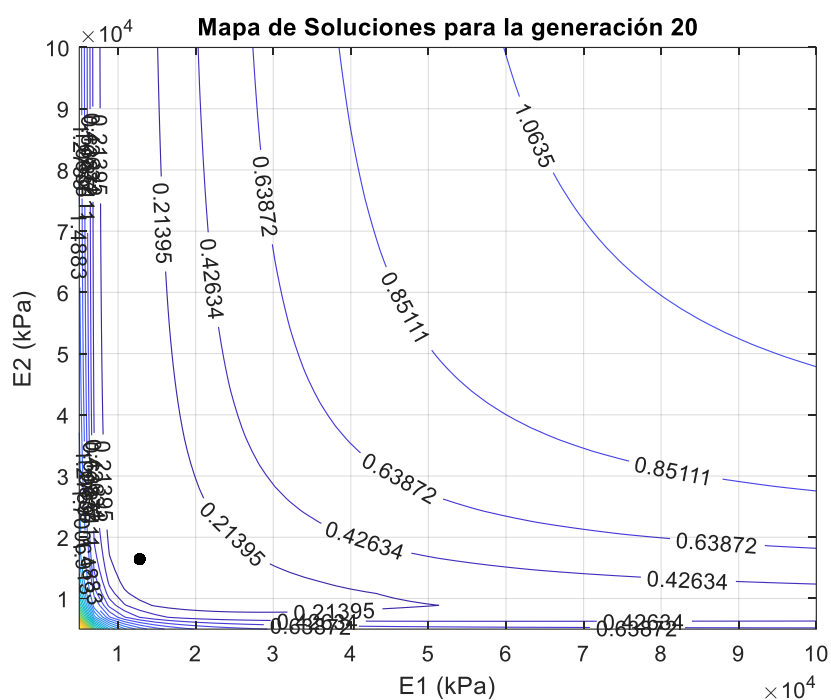


Figura A-180 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 20

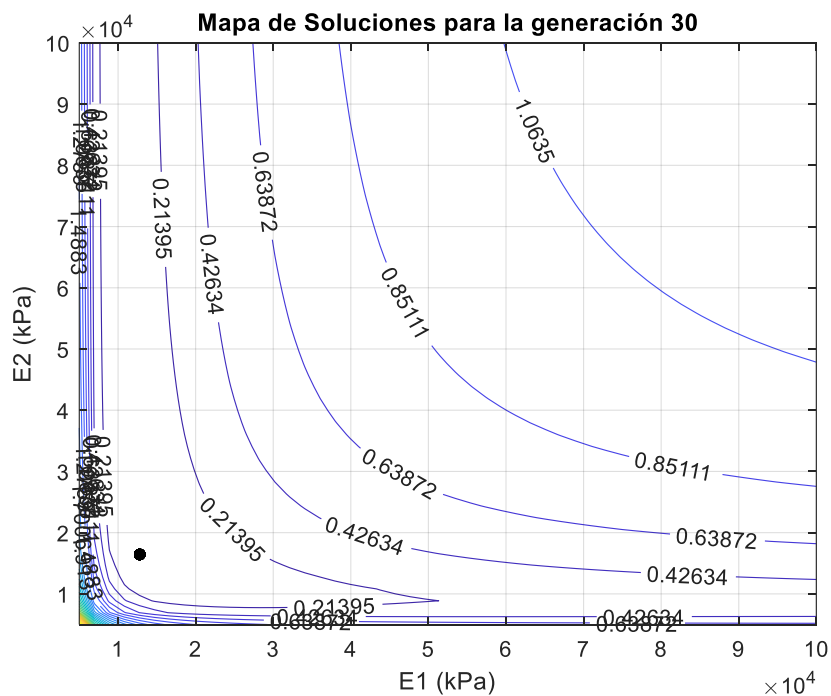


Figura A-181 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 30

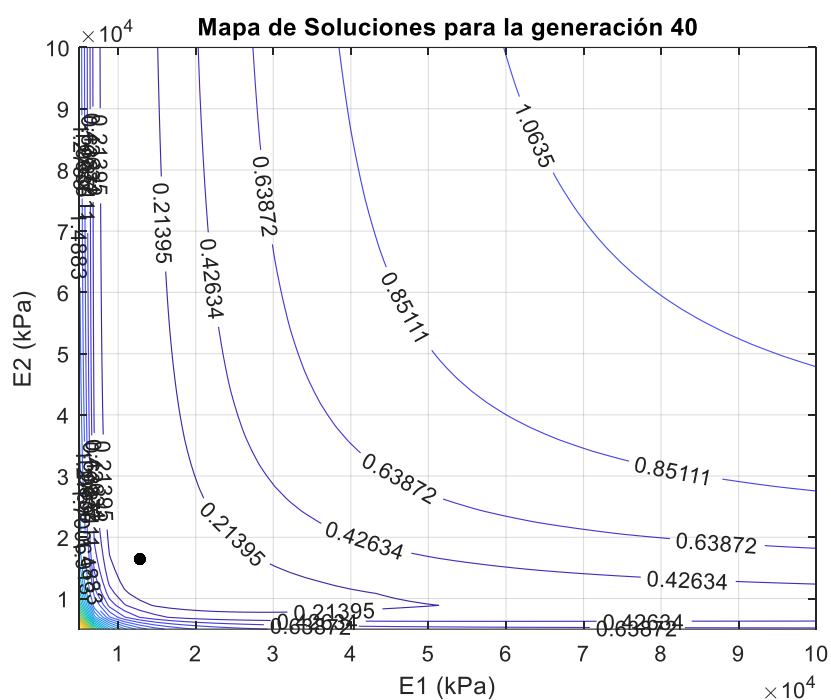


Figura A-182 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 40

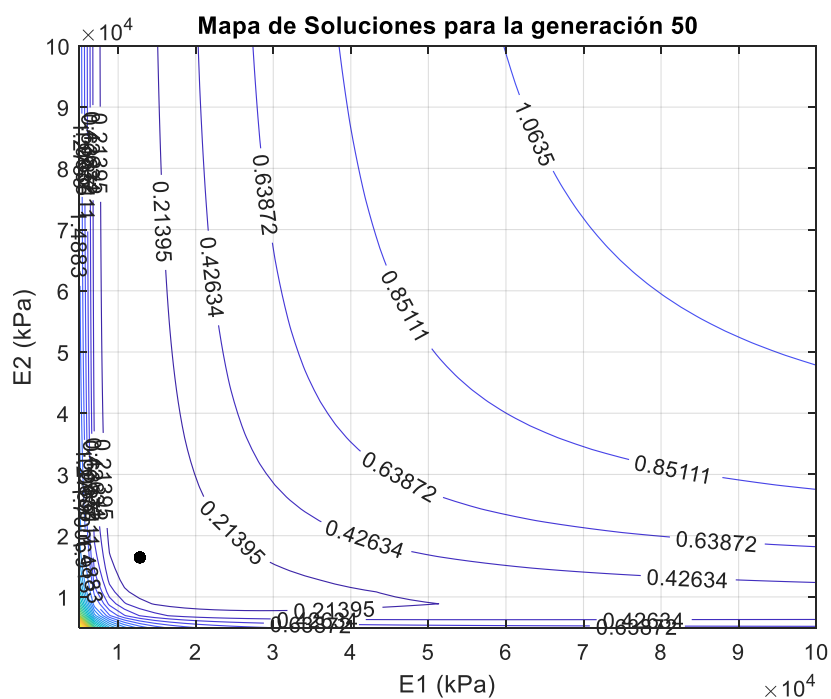


Figura A-183 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 50



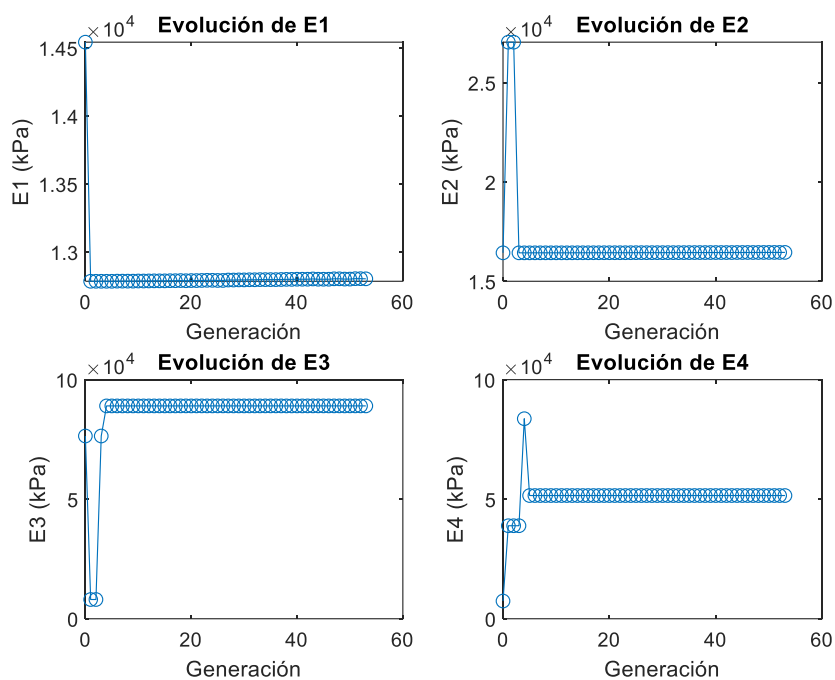


Figura A-184 – Evolución E1-E4. Algoritmo genético simple con ruido

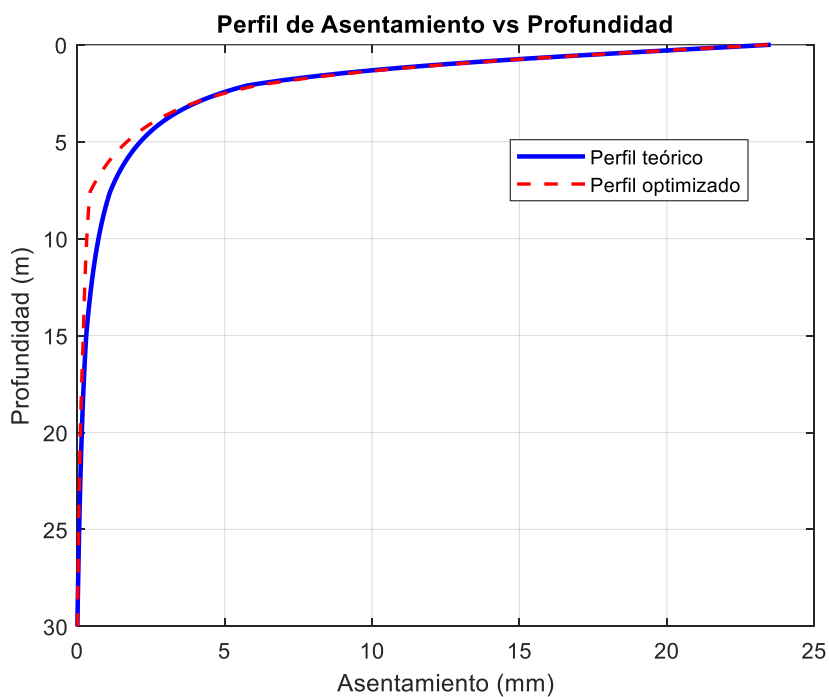


Figura A-185 – Perfil asiento retrocalculado. Algoritmo genético simple con ruido

### 12.2.3 Algoritmo Genéticos Adaptativos – Sin ruido

Población de 75 individuos y número de generaciones necesarias para alcanzar error indicado.

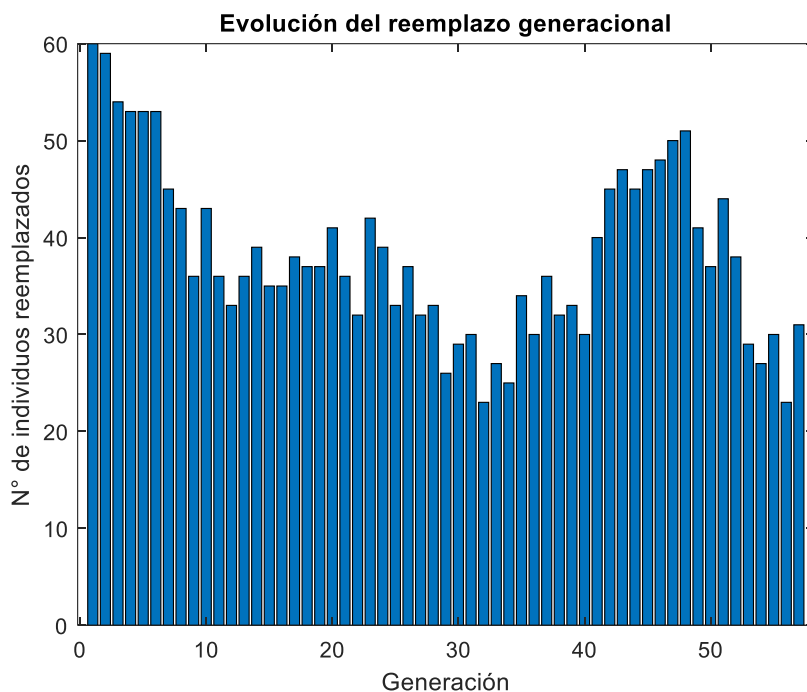


Figura A-186 – Reemplazo generacional. Algoritmo genético adaptativo sin ruido

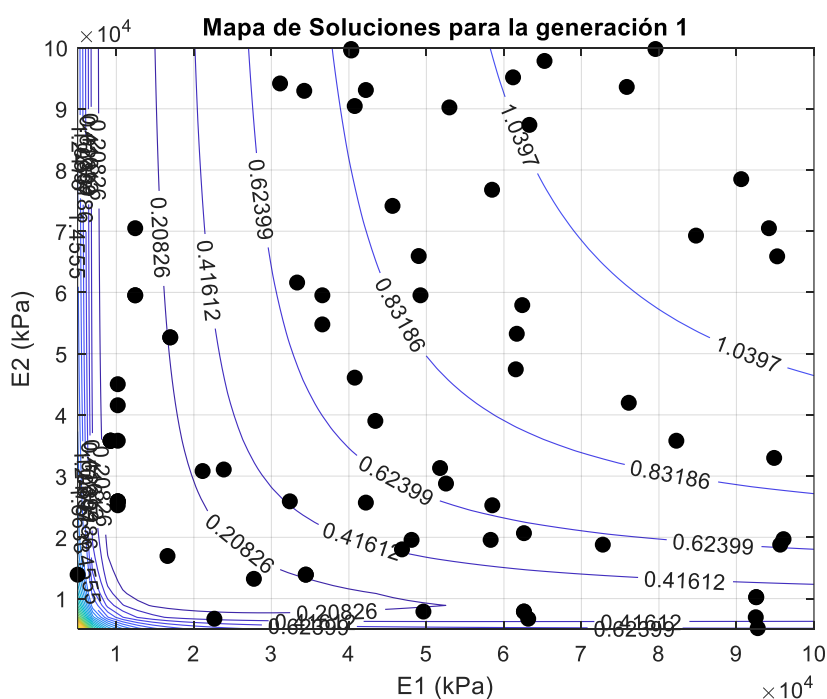


Figura A-187 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 1

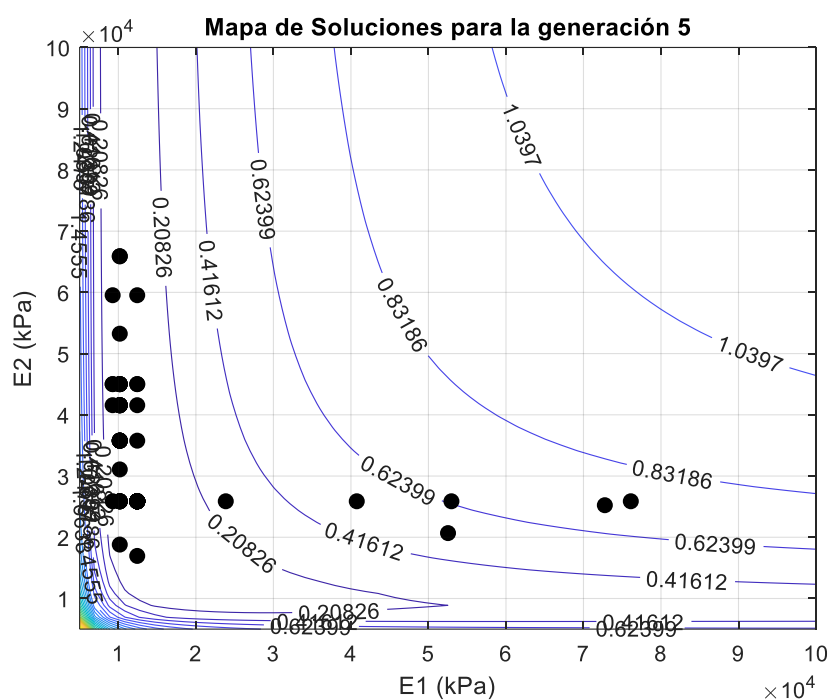


Figura A-188 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 5

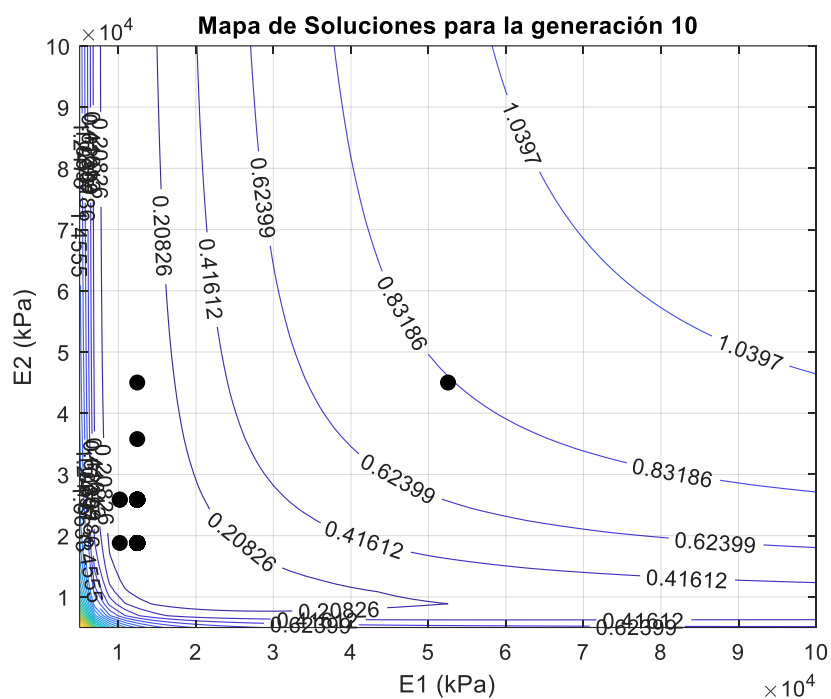


Figura A-189 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 10

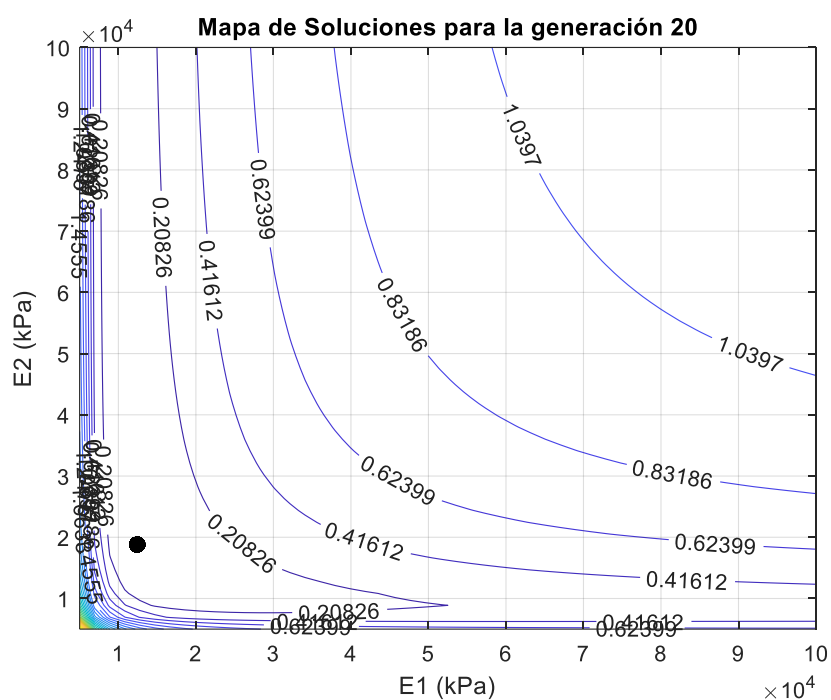


Figura A-190 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 20

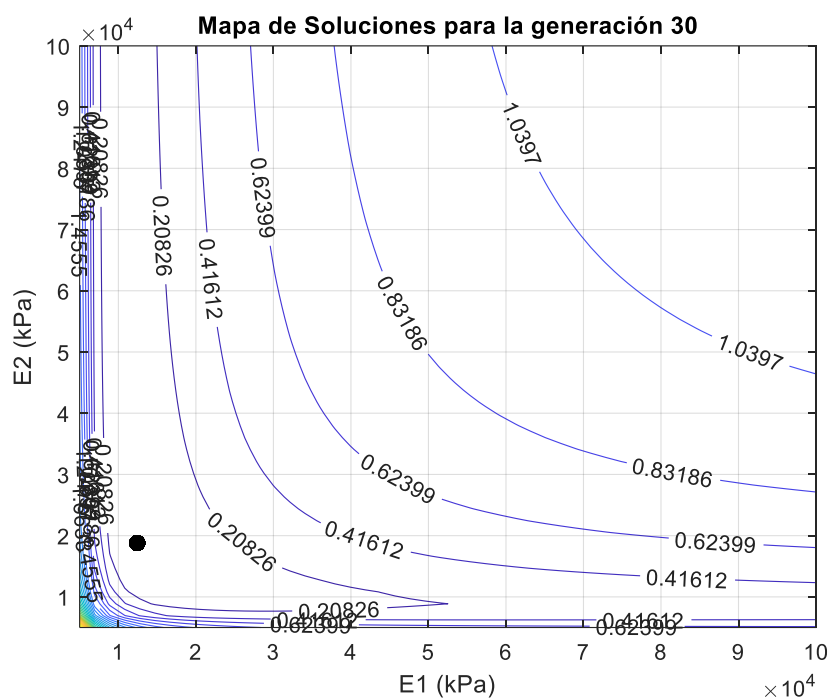


Figura A-191 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 30

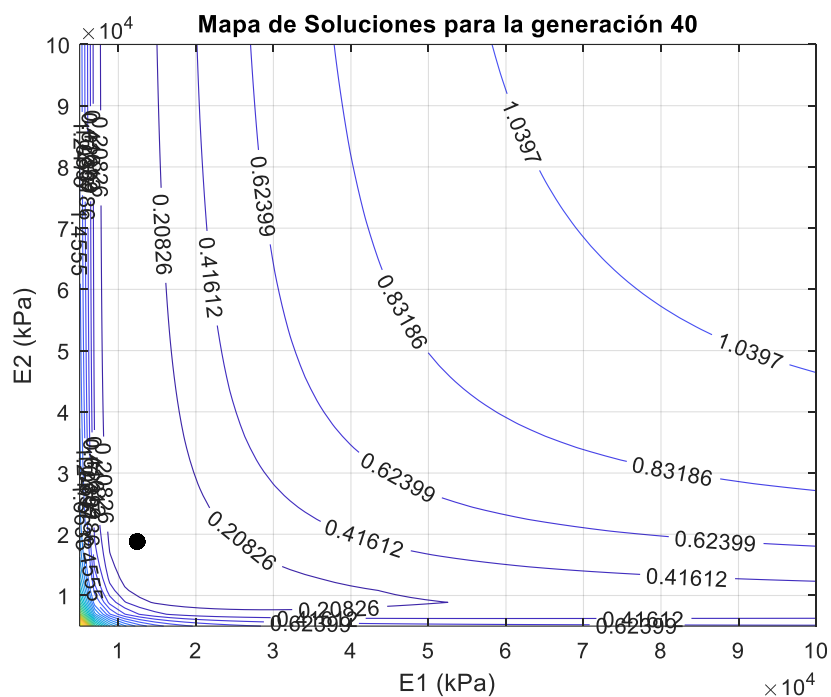


Figura A-192 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 40

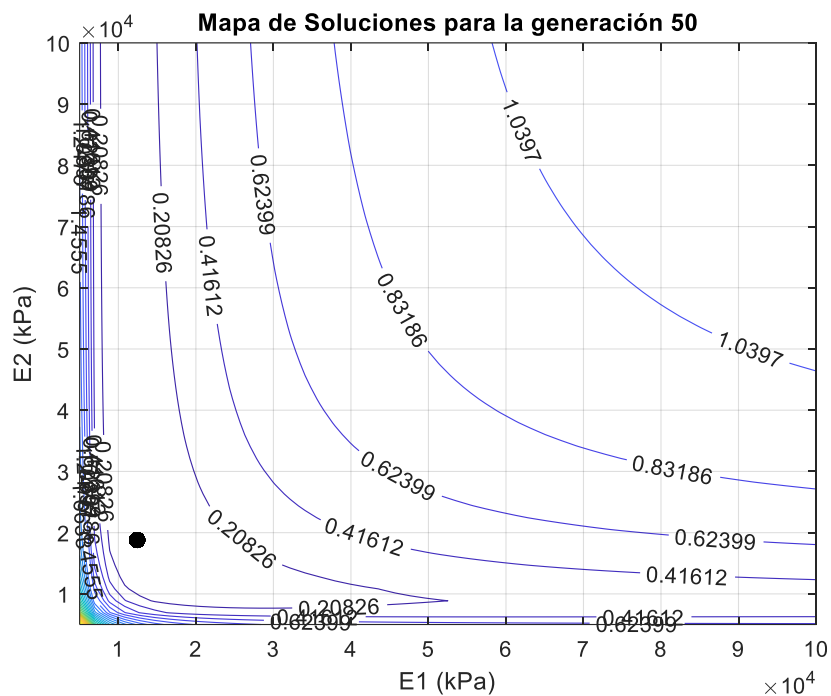


Figura A-193 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 50

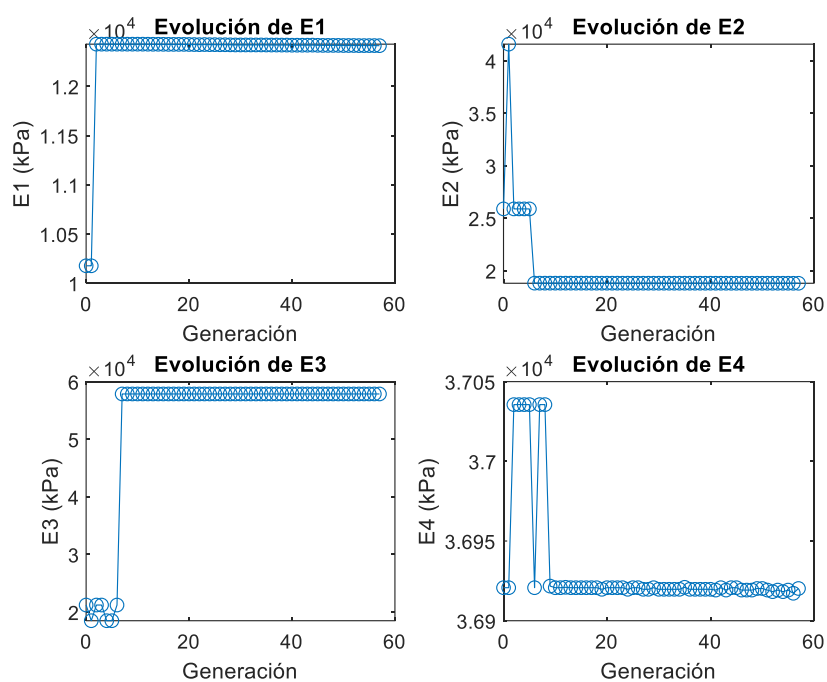


Figura A-194 – Evolución E1-E4. Algoritmo genético adaptativo sin ruido

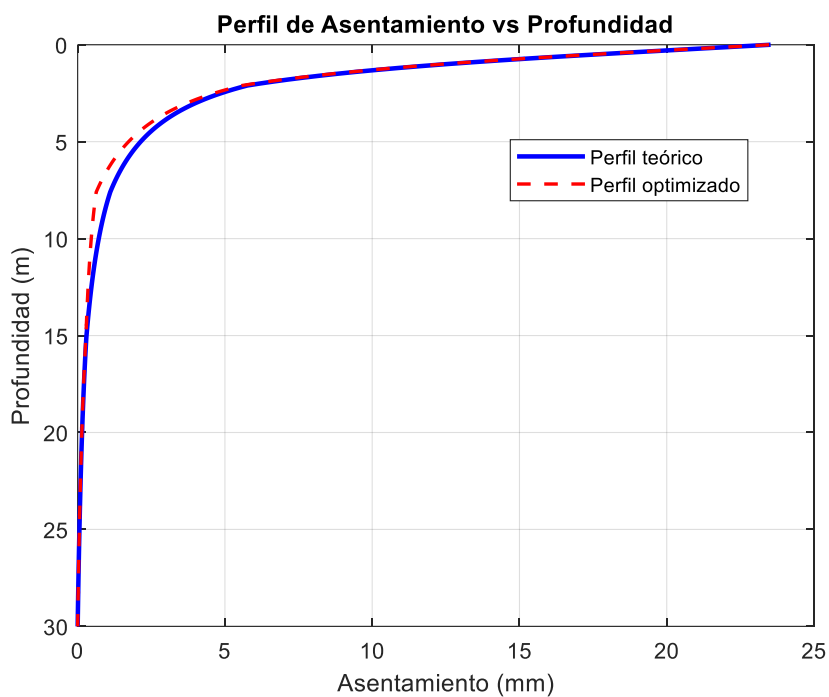


Figura A-195 – Perfil asiento retrocalculado. Algoritmo genético adaptativo sin ruido

### 12.2.3.1 Algoritmo Genético Adaptativo – Con ruido

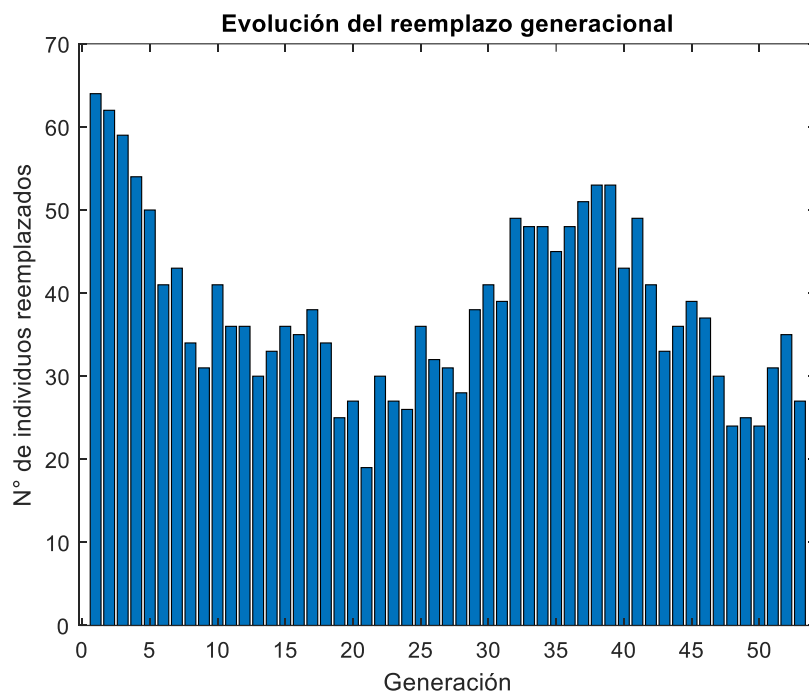


Figura A-196 – Reemplazo generacional. Algoritmo genético adaptativo con ruido

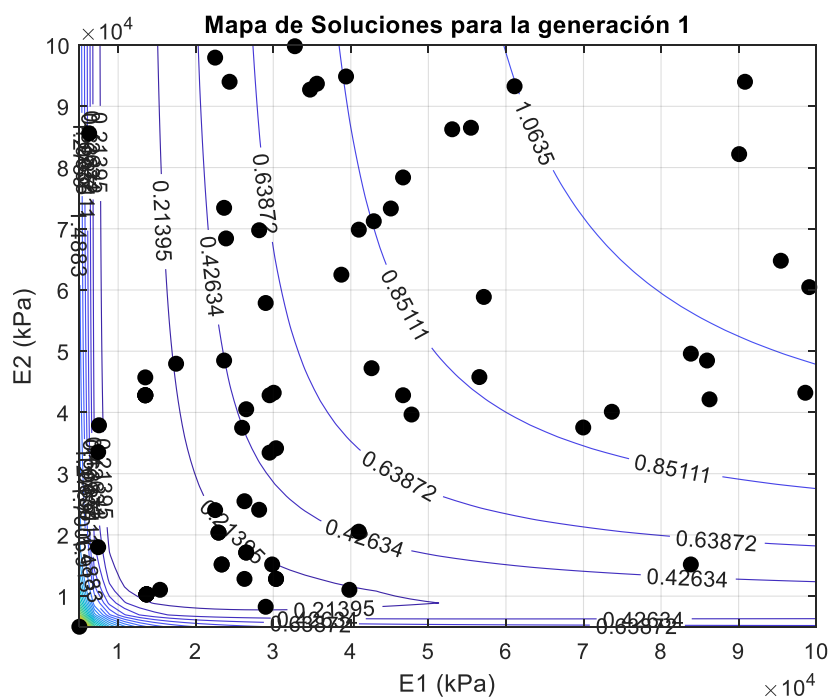


Figura A-197 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 1

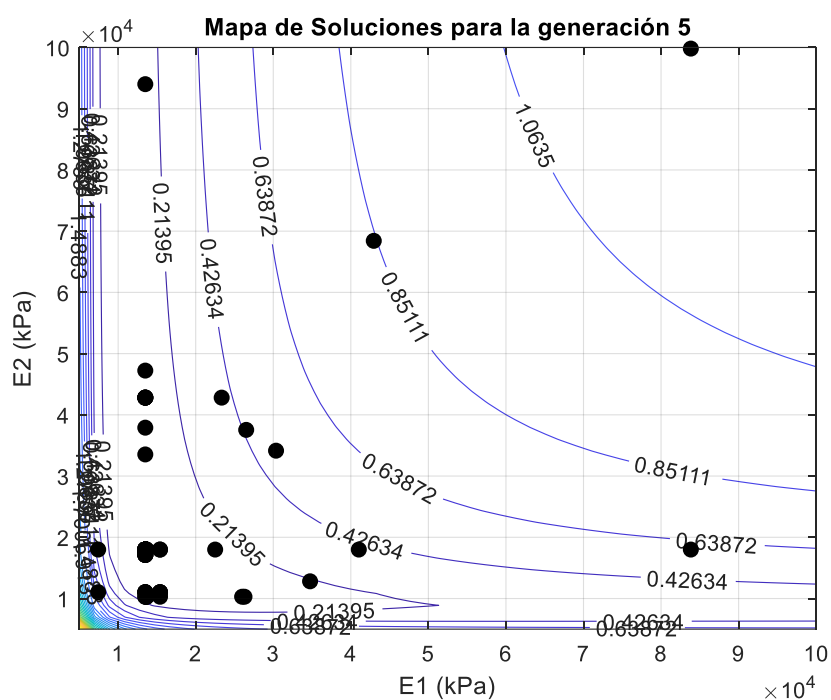


Figura A-198 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 5

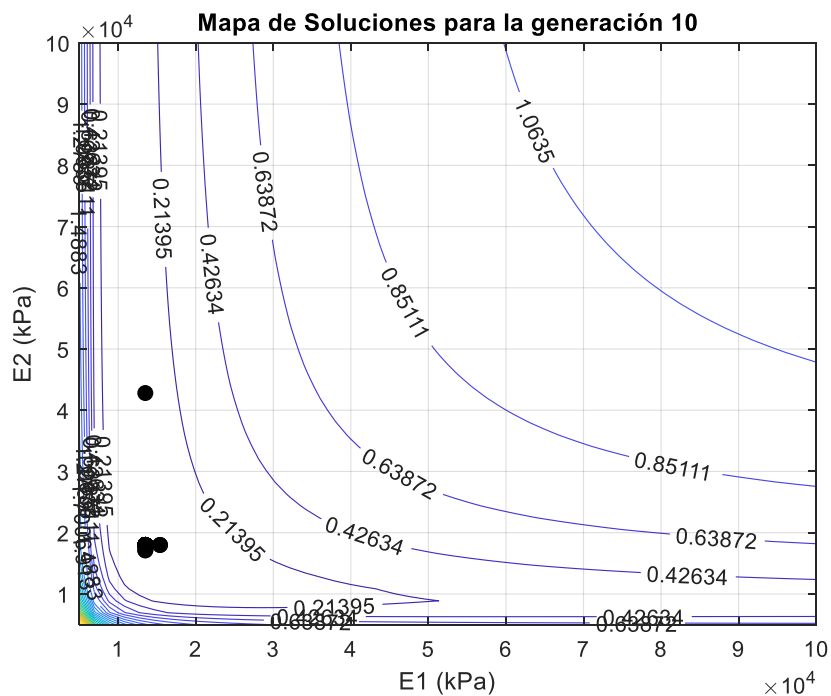


Figura A-199 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 10



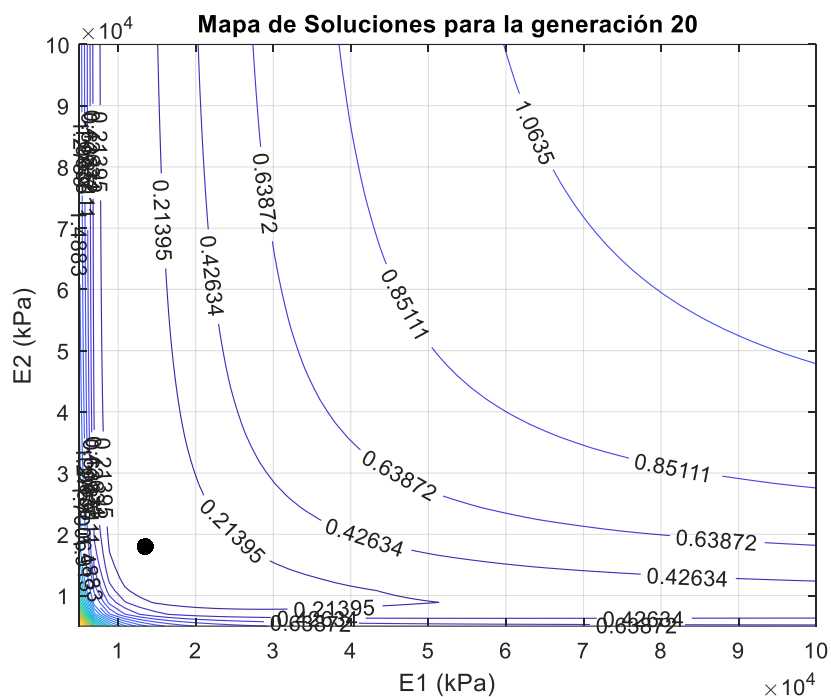


Figura A-200 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 20

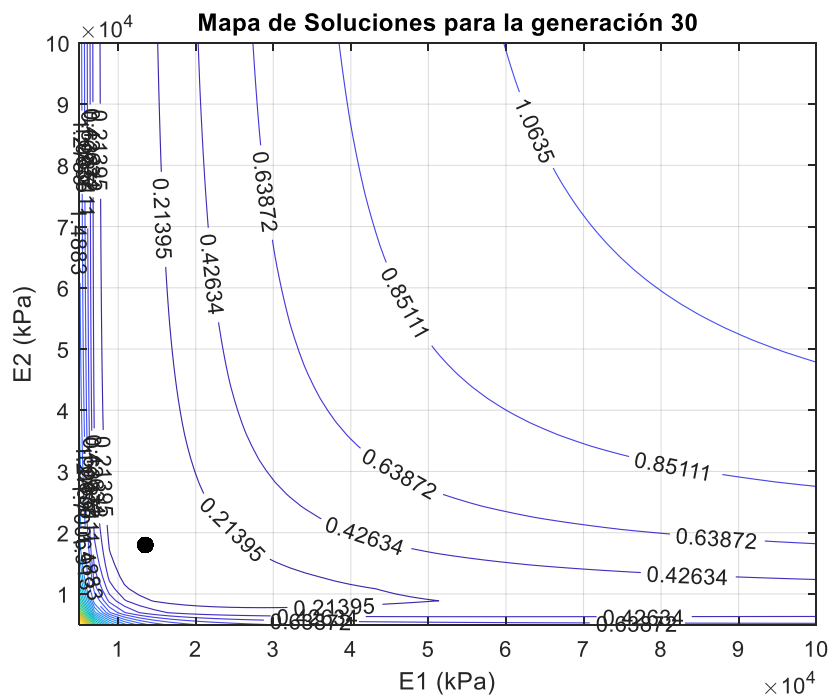


Figura A-201 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 30

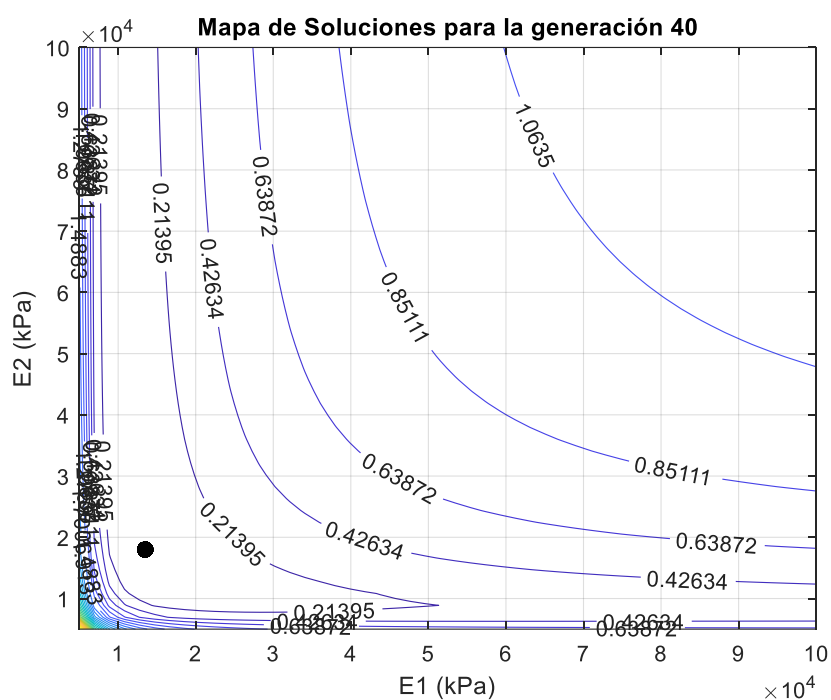


Figura A-202 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 40

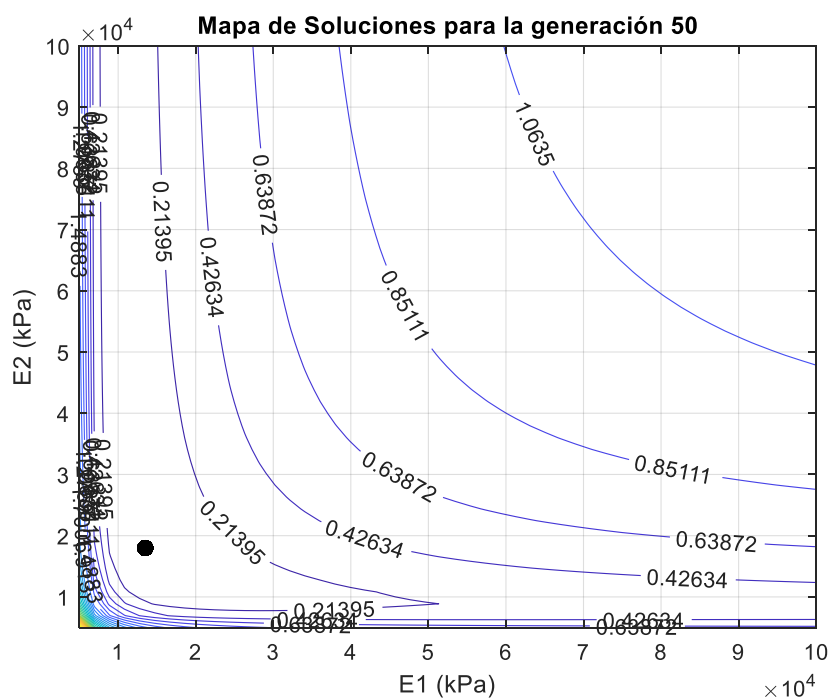


Figura A-203 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 50

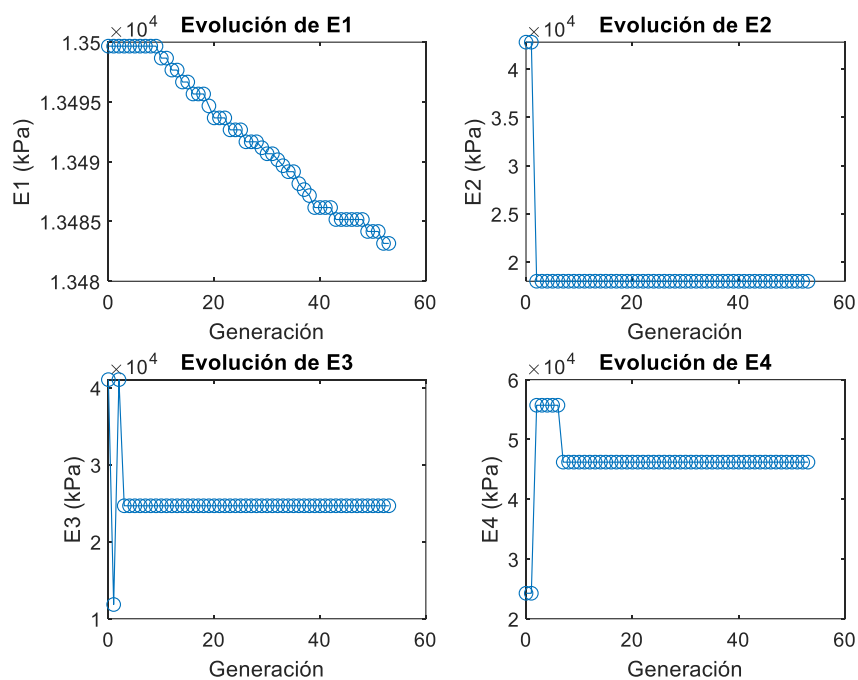


Figura A-204 – Evolución E1-E4. Algoritmo genético adaptativo con ruido

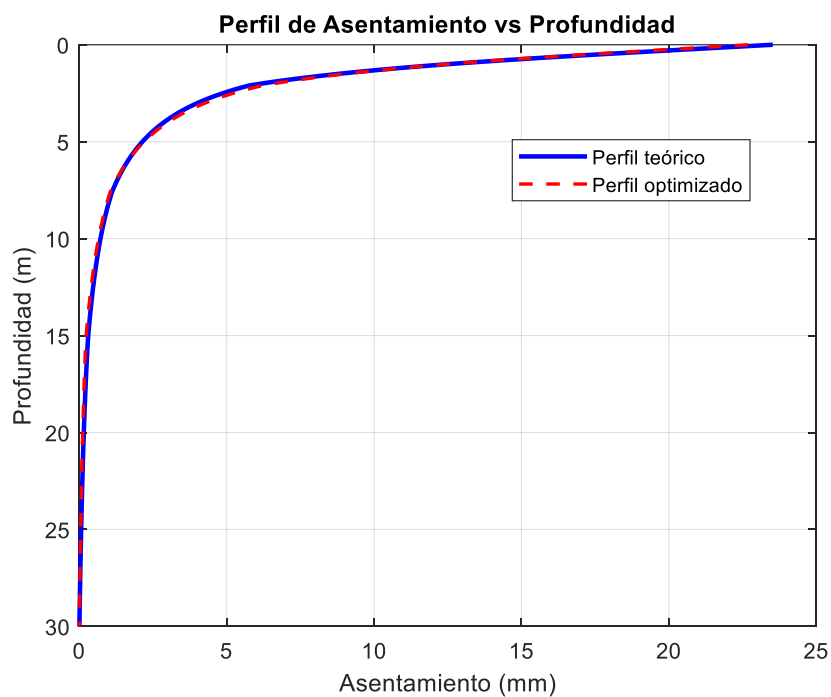


Figura A-205 – Perfil asiento retrocalculado. Algoritmo genético adaptativo con ruido

### 12.2.4 Enjambre de partículas – Sin ruido

Se consideran también partículas en la búsqueda.

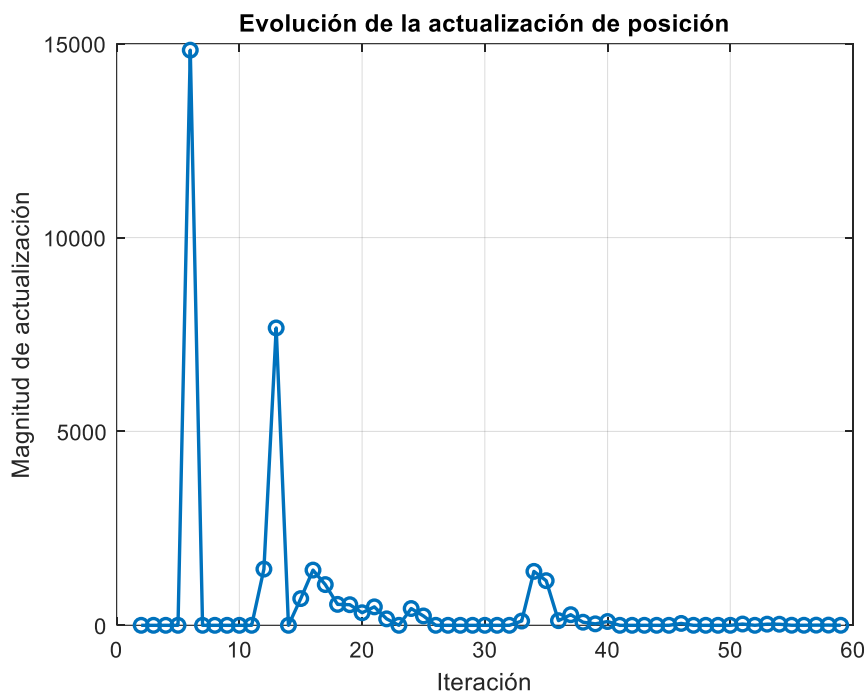


Figura A-206 – Evolución de la actualización de posición. Enjambre de partículas sin ruido

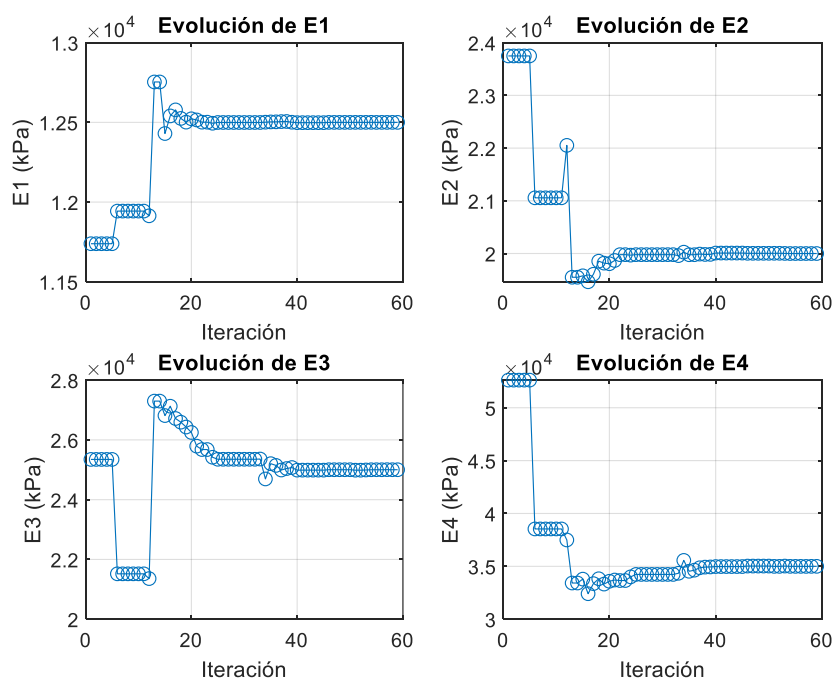


Figura A-207 – Evolución E1-E4. Enjambre de partículas sin ruido

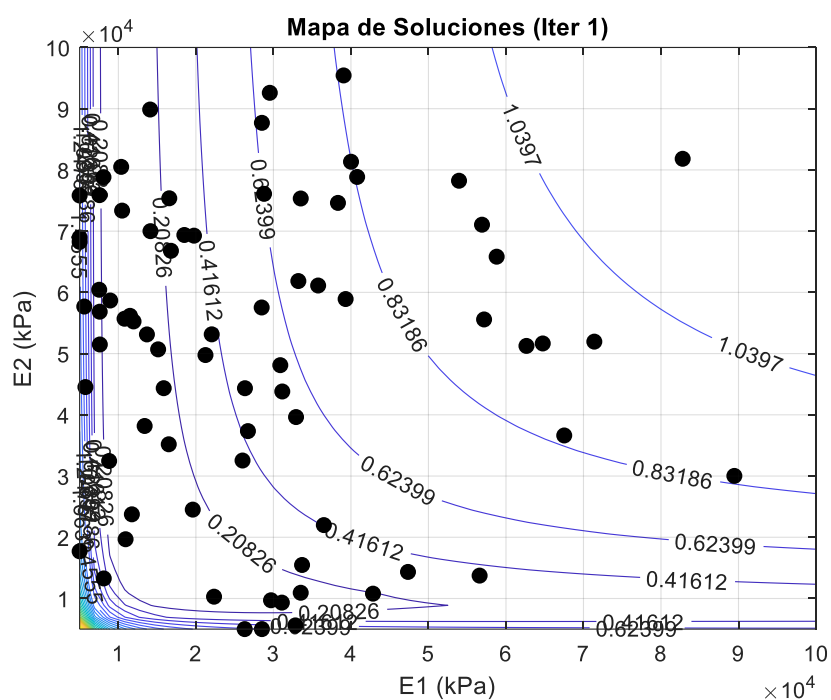


Figura A-208 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido.  
Iteración 1

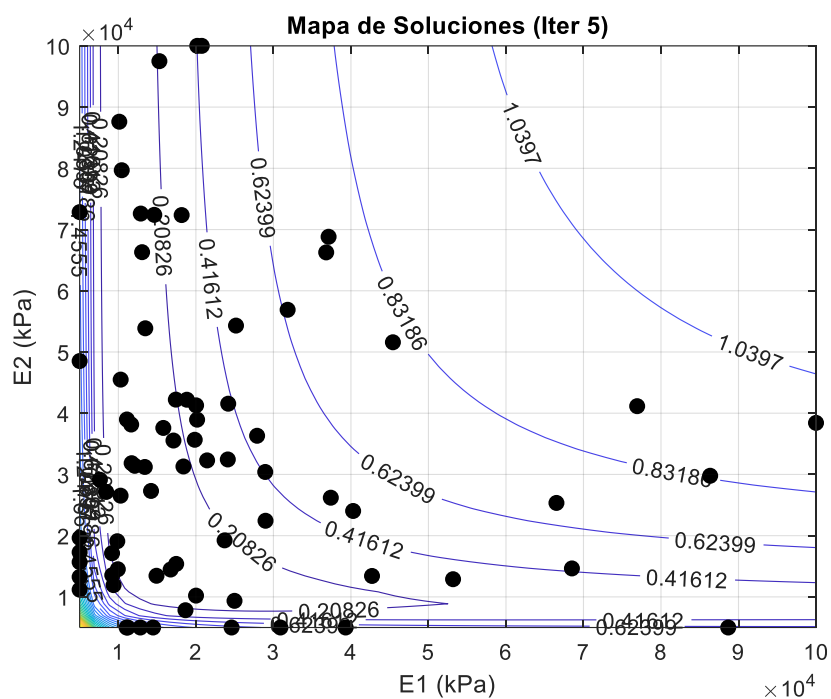


Figura A-209 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido.  
Iteración 5

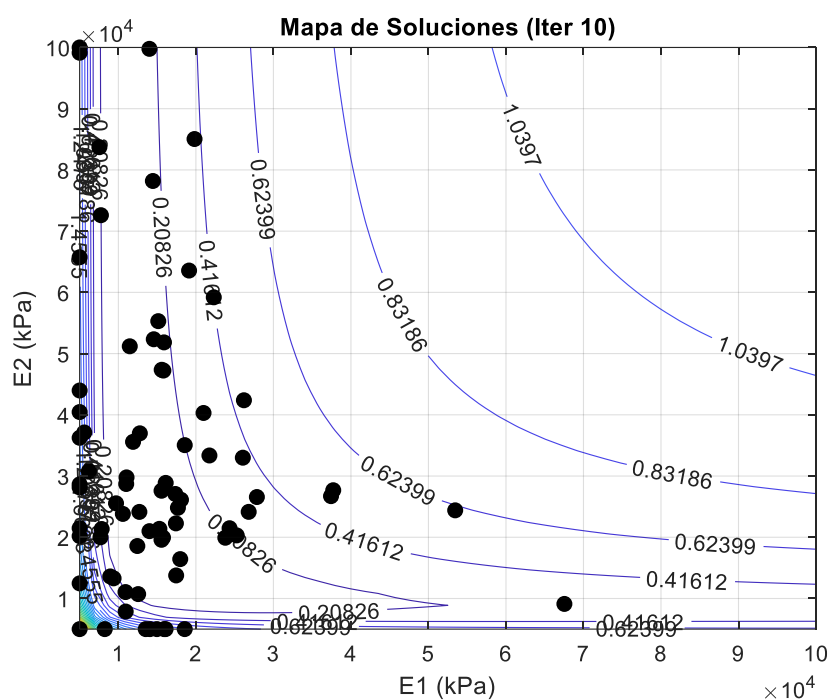


Figura A-210 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido.  
Iteración 10

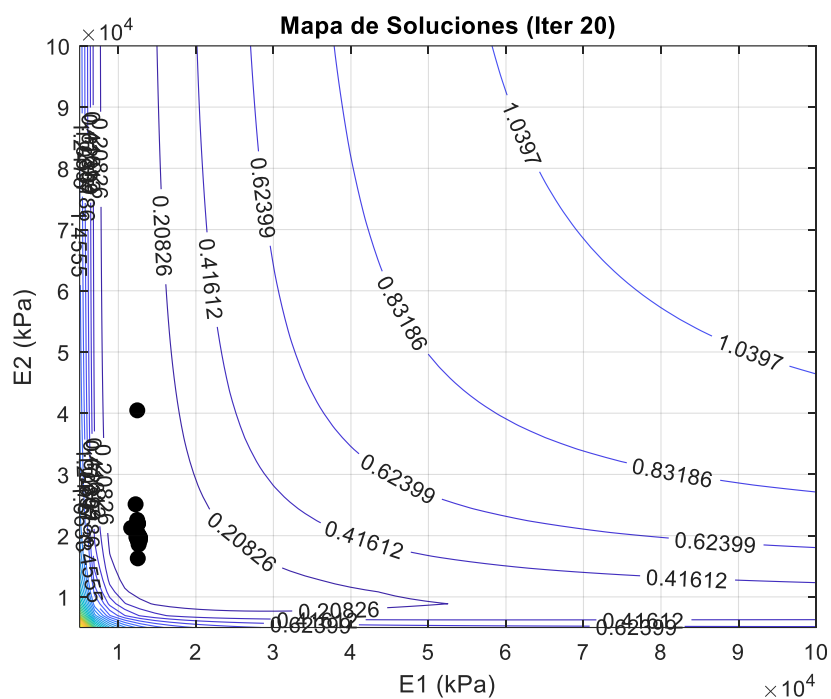


Figura A-211 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido.  
Iteración 20

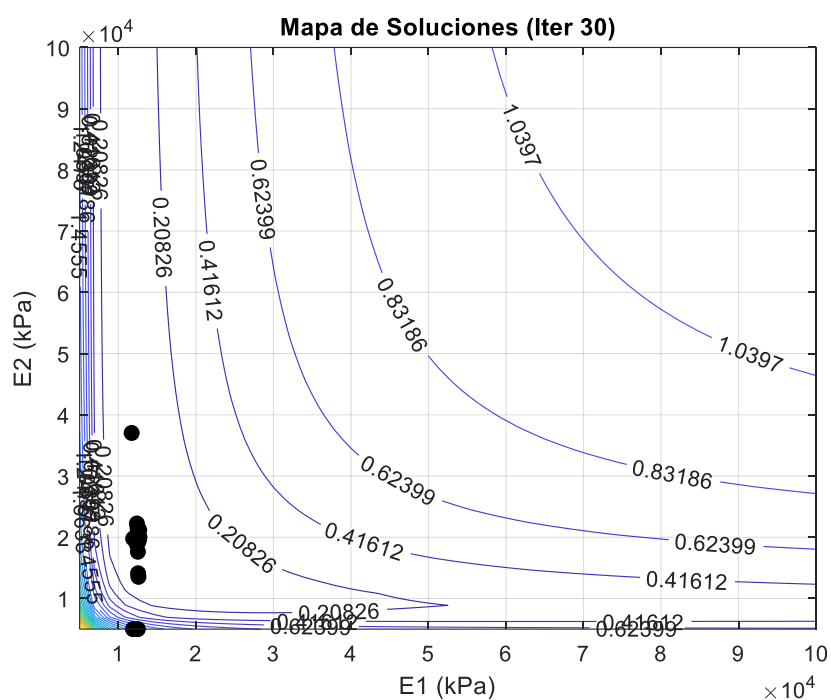


Figura A-212 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido.  
Iteración 30

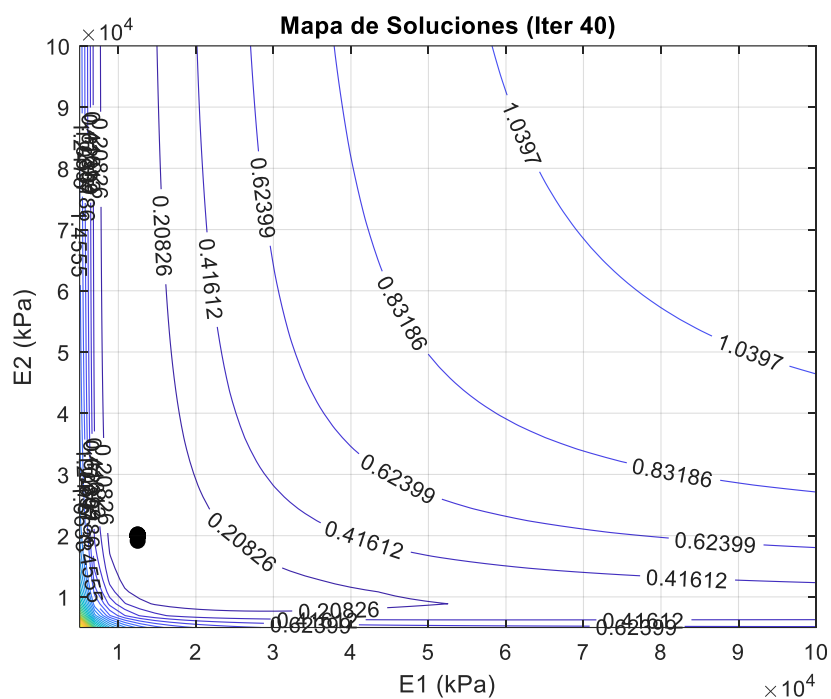


Figura A-213 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido.  
Iteración 40

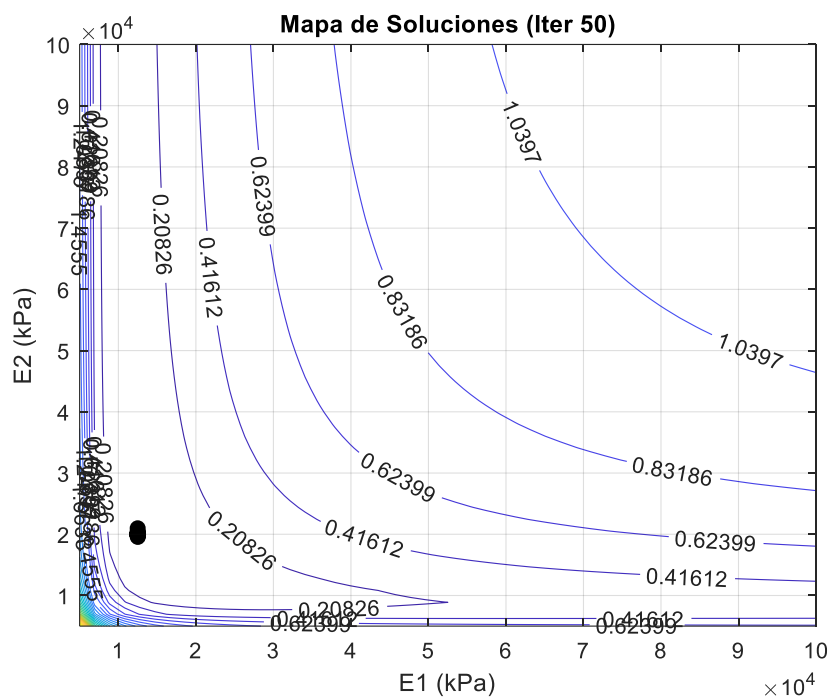


Figura A-214 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas sin ruido.  
Iteración 50

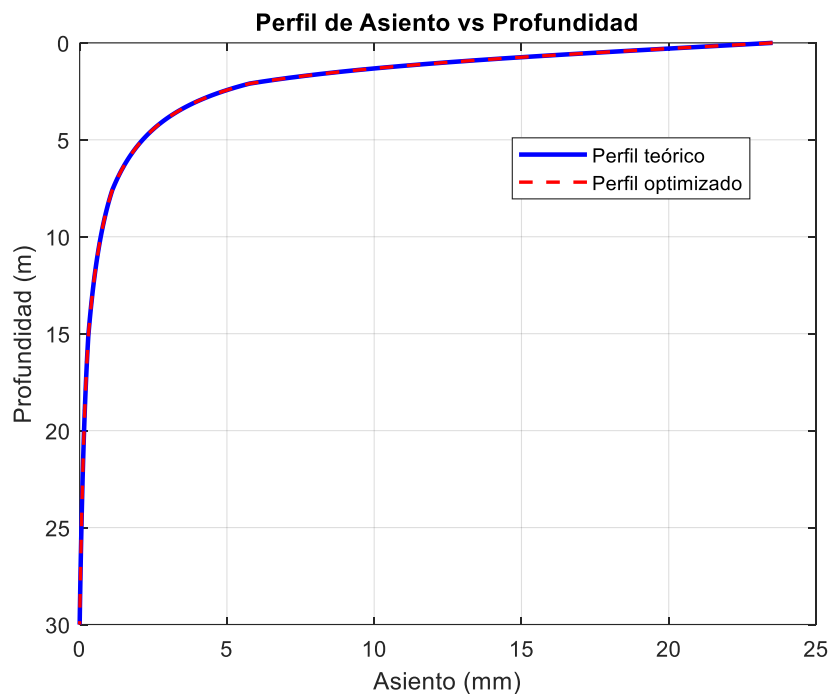


Figura A-215 – Perfil asiento retrocalculado. Enjambre de partículas sin ruido



### 12.2.5 Enjambre de Partículas – Sin ruido

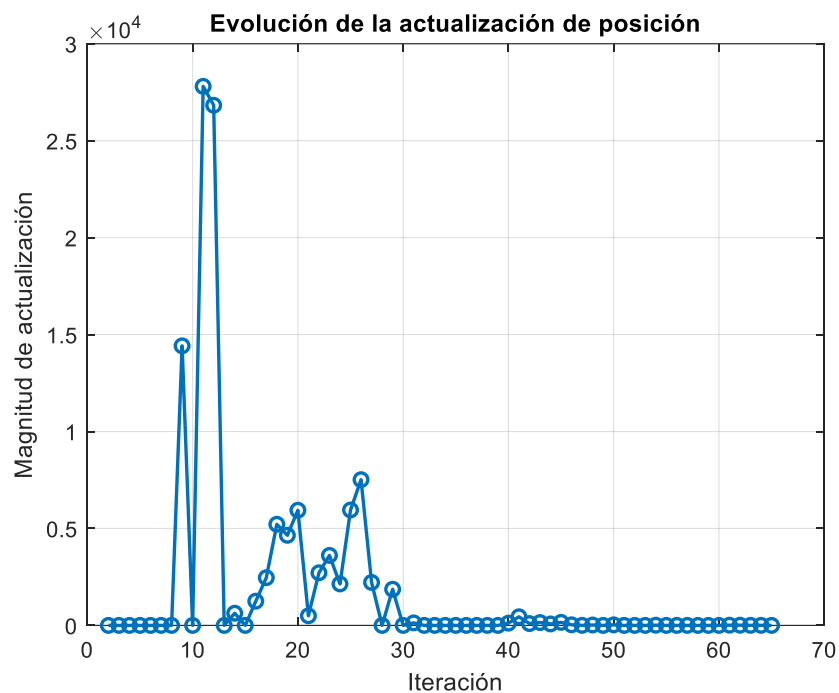


Figura A-216 – Evolución de la actualización de posición. Enjambre de partículas con ruido

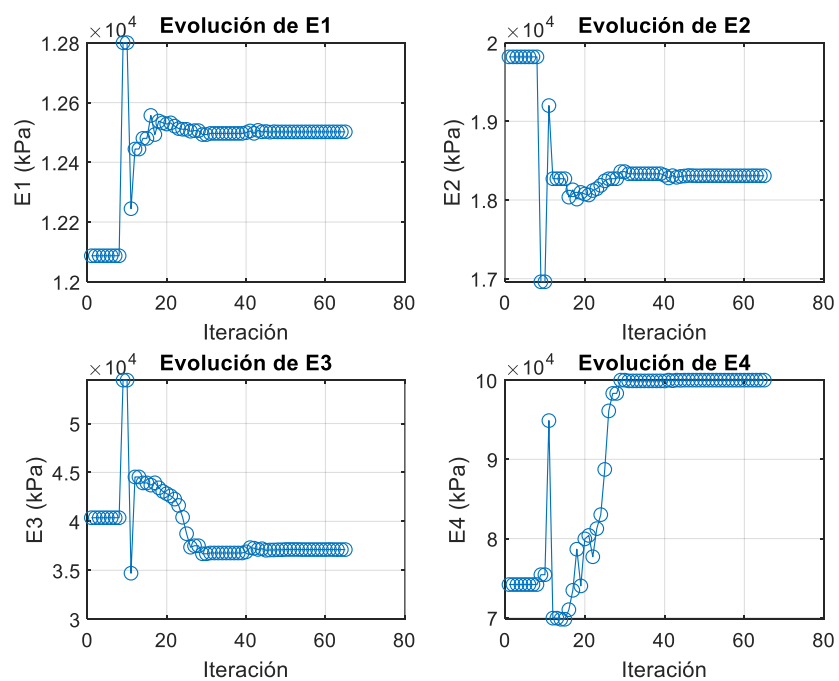


Figura A-217 – Evolución E1-E4. Enjambre de partículas con ruido

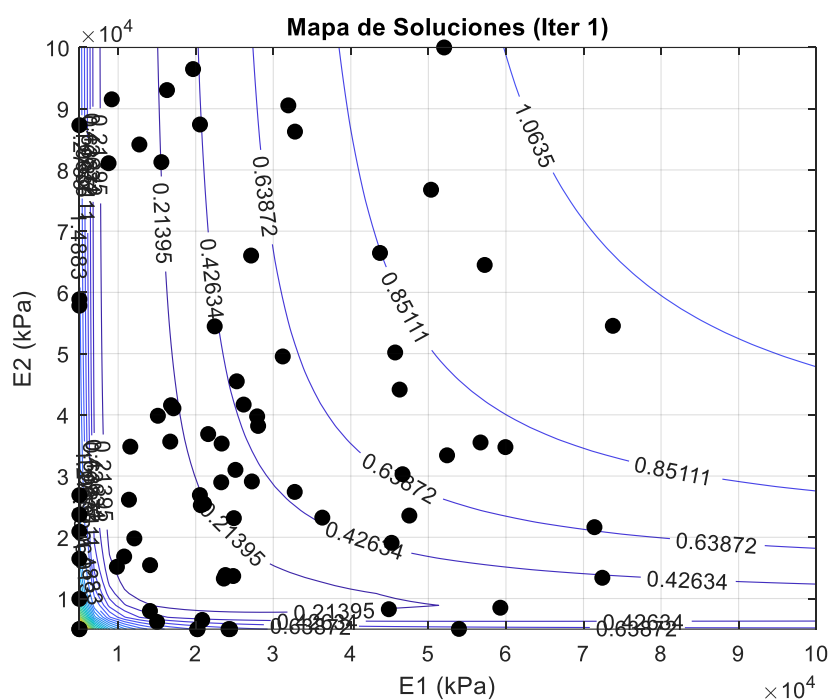


Figura A-218 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido.  
Iteración 1

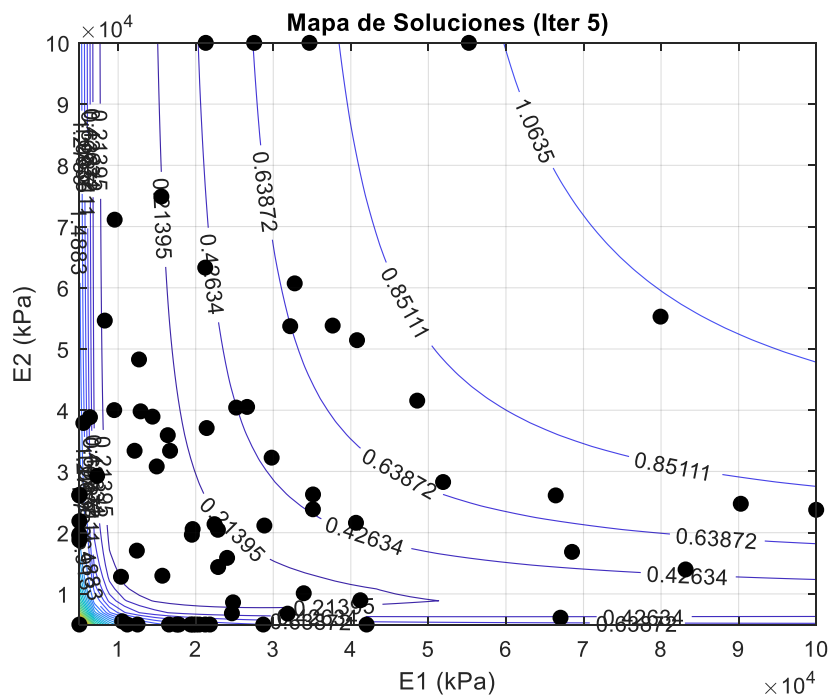


Figura A-219 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido.  
Iteración 5

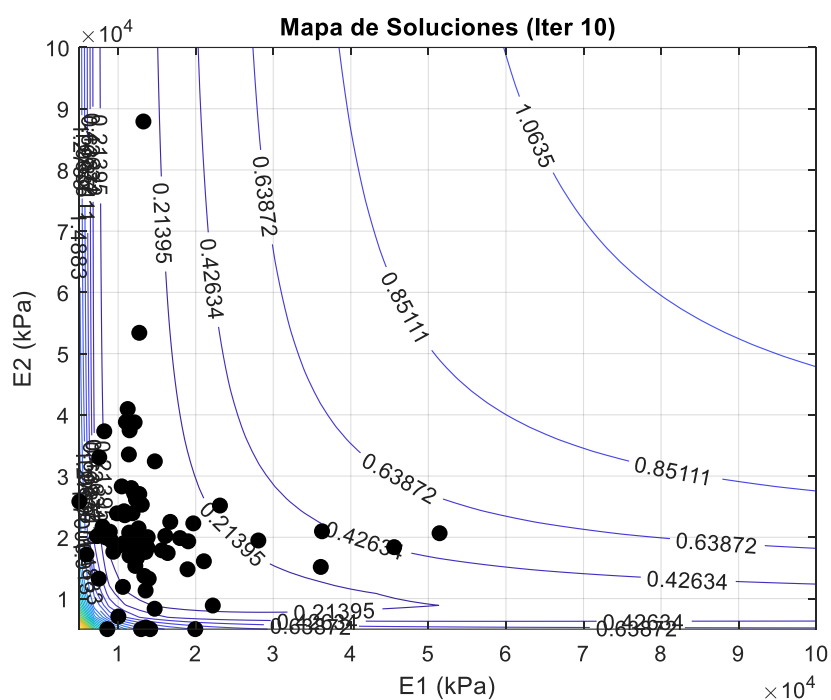


Figura A-220 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido.  
Iteración 10

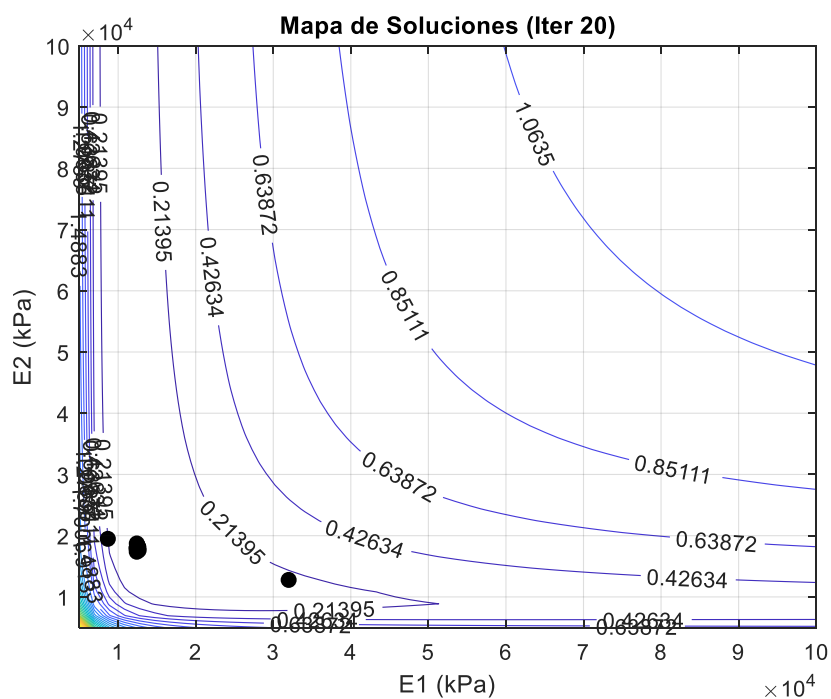


Figura A-221 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido.  
Iteración 20

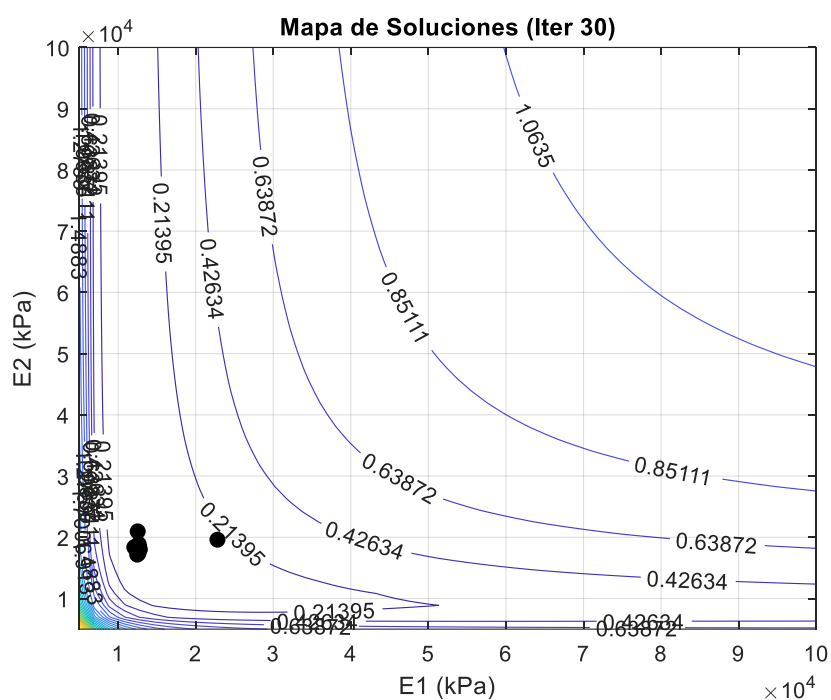


Figura A-222 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido.  
Iteración 30

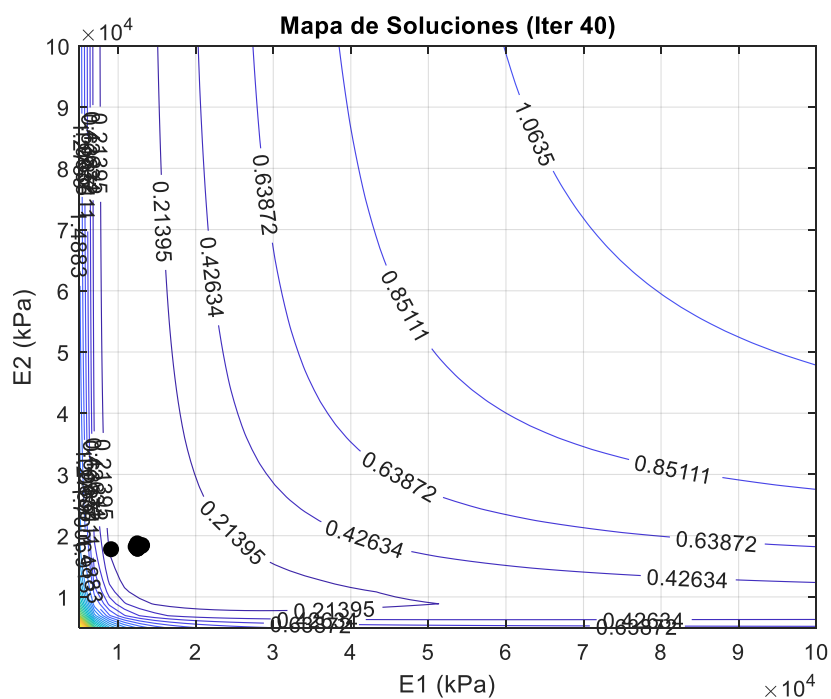


Figura A-223 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido.  
Iteración 40

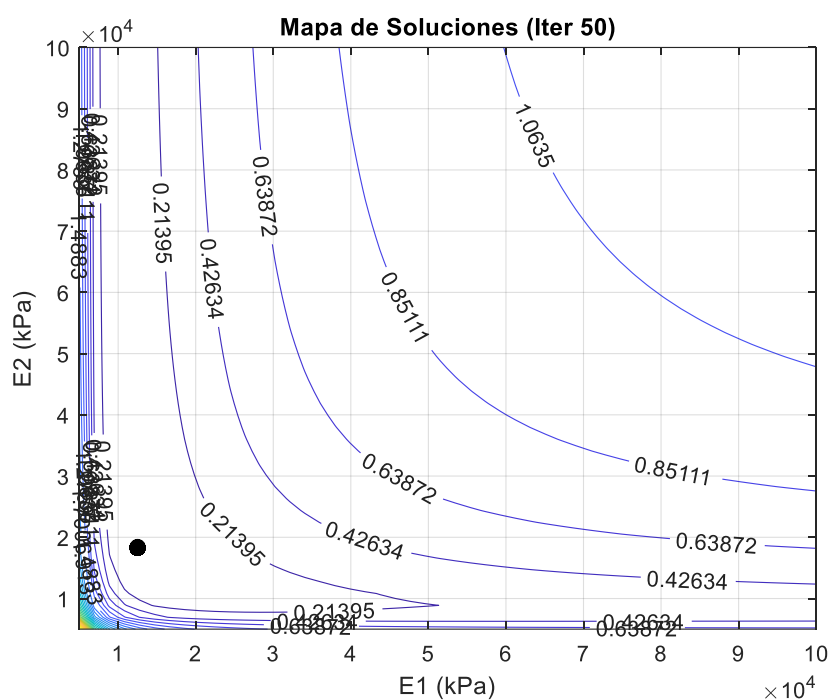


Figura A-224 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido.  
Iteración 50

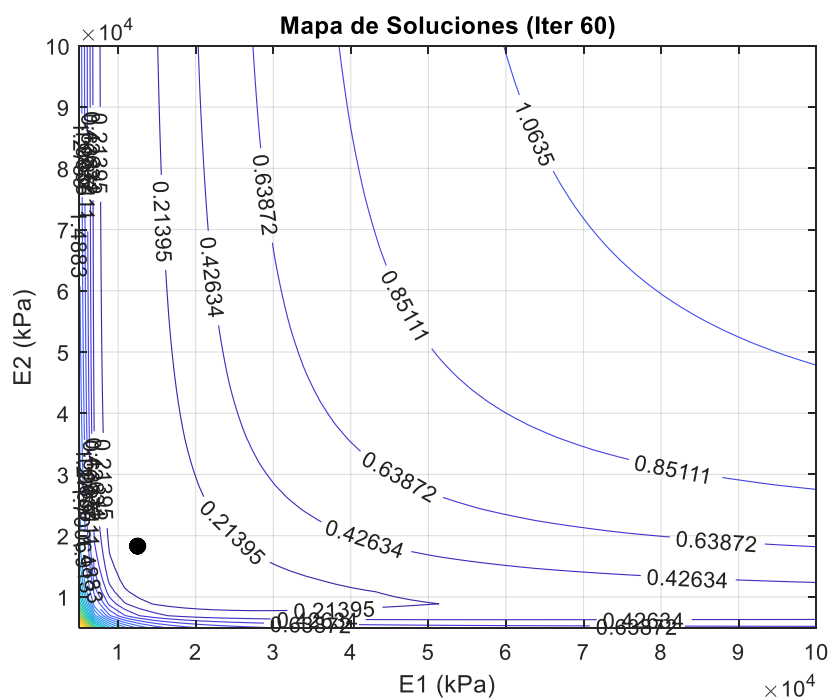


Figura A-225 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Enjambre de partículas con ruido.  
Iteración 50

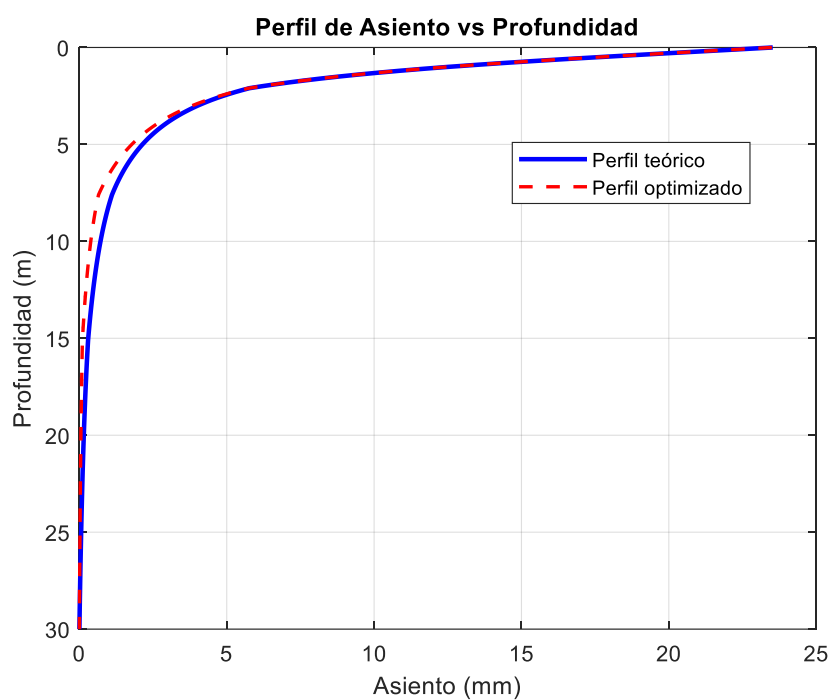


Figura A-226 – Perfil asiento retrocalculado. Enjambre de partículas con ruido

### 12.2.6 Evolución Diferencial (DE) – Sin ruido

Se adopta una población de 50, un factor de escalado de 0.8 y tasa de cruce de 0.9. Se implementan tantas iteraciones como sea necesario para alcanzar el error objetivo o 250, lo que sea menor.

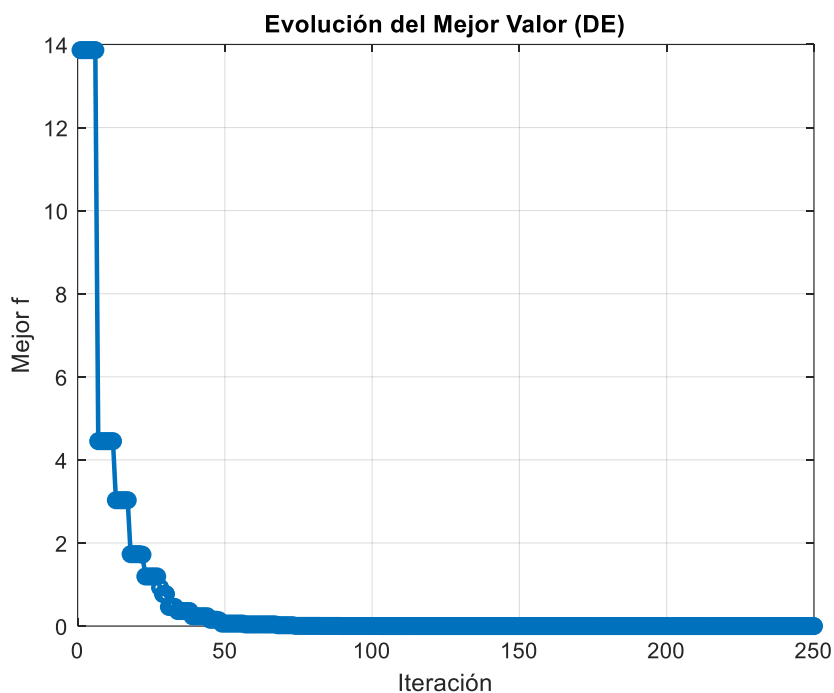


Figura A-227 – Evolución del mejor valor. Evolución diferencial sin ruido

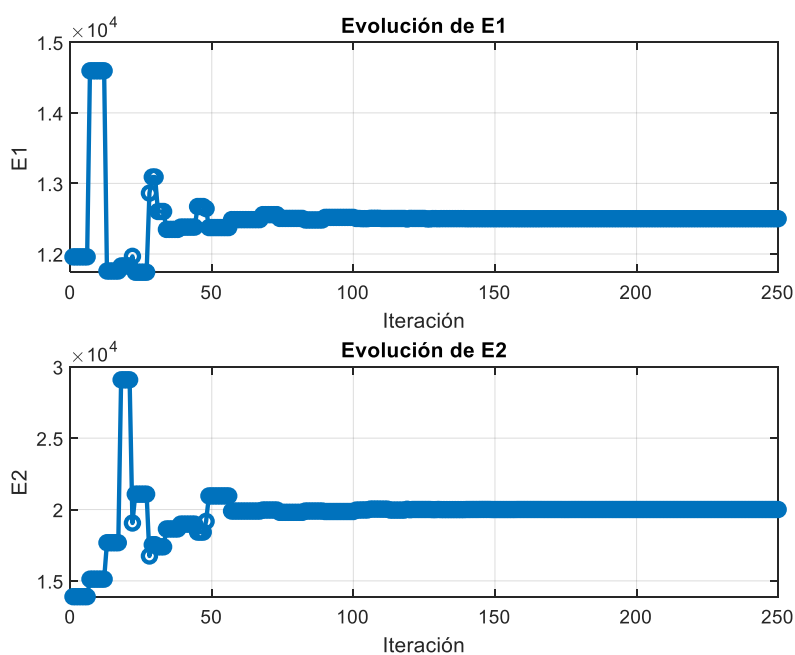


Figura A-228 – Evolución E1-E2. Evolución diferencial sin ruido

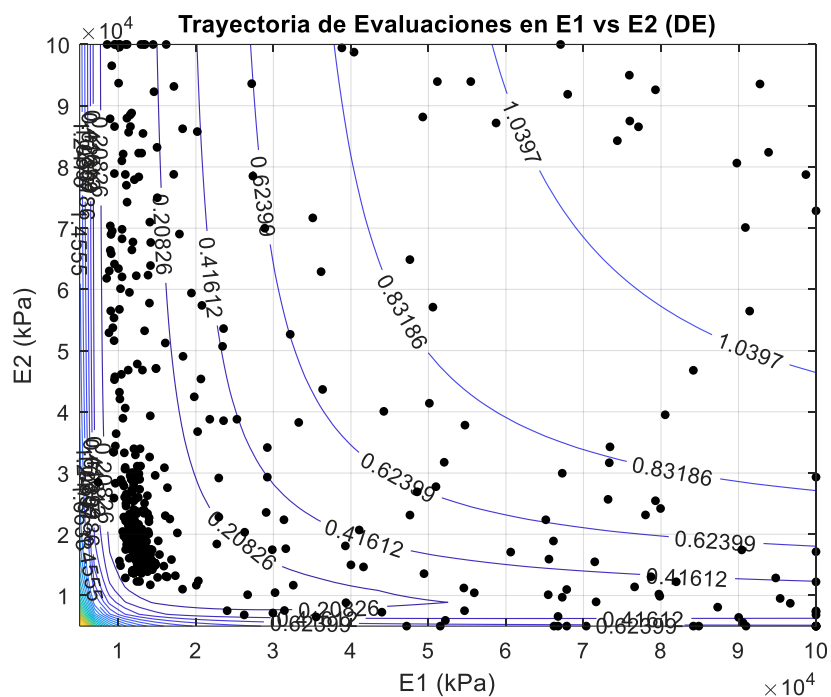


Figura A-229 – Mapa de soluciones. Evolución diferencial sin ruido

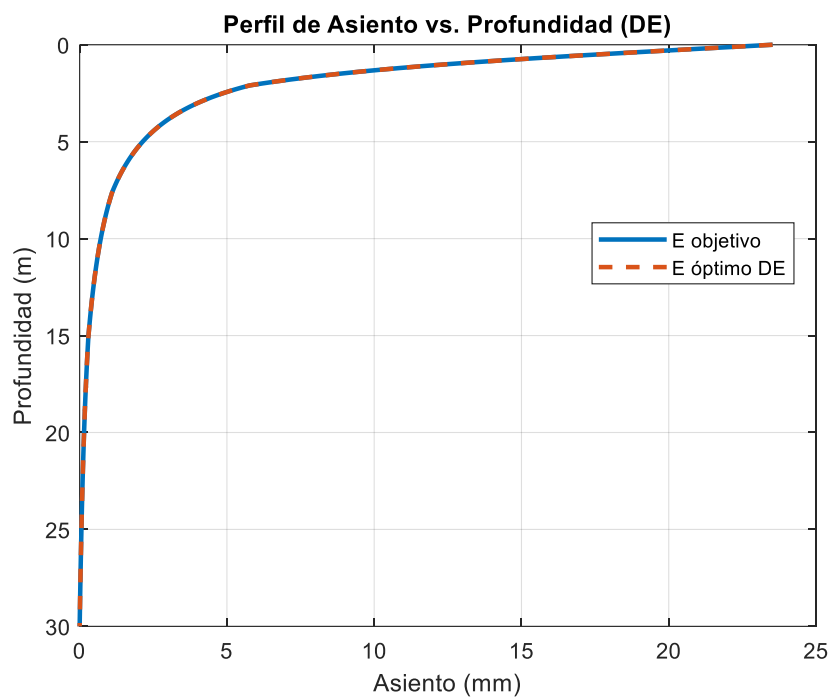


Figura A-230 – Perfil asiento retrocalculado. Evolución diferencial sin ruido



### 12.2.7 Evolución Diferencial (DE) – Con ruido

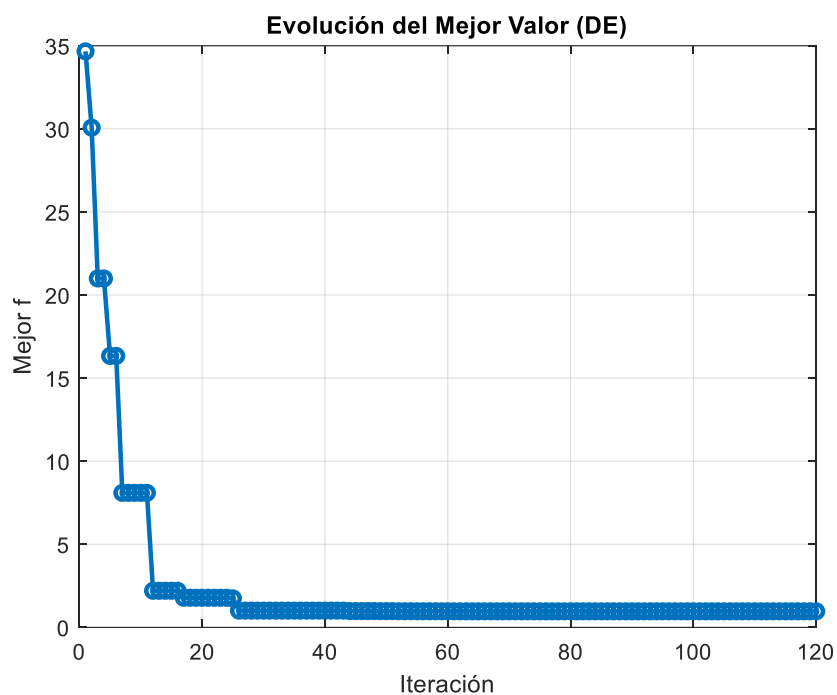


Figura A-231 – Evolución del mejor valor. Evolución diferencial con ruido

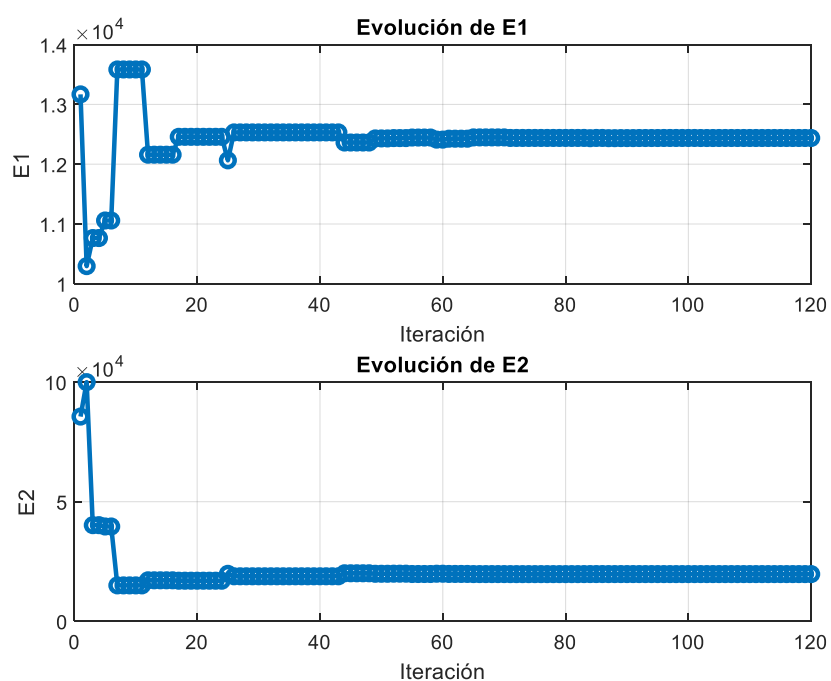


Figura A-232 – Evolución E1-E2. Evolución diferencial con ruido

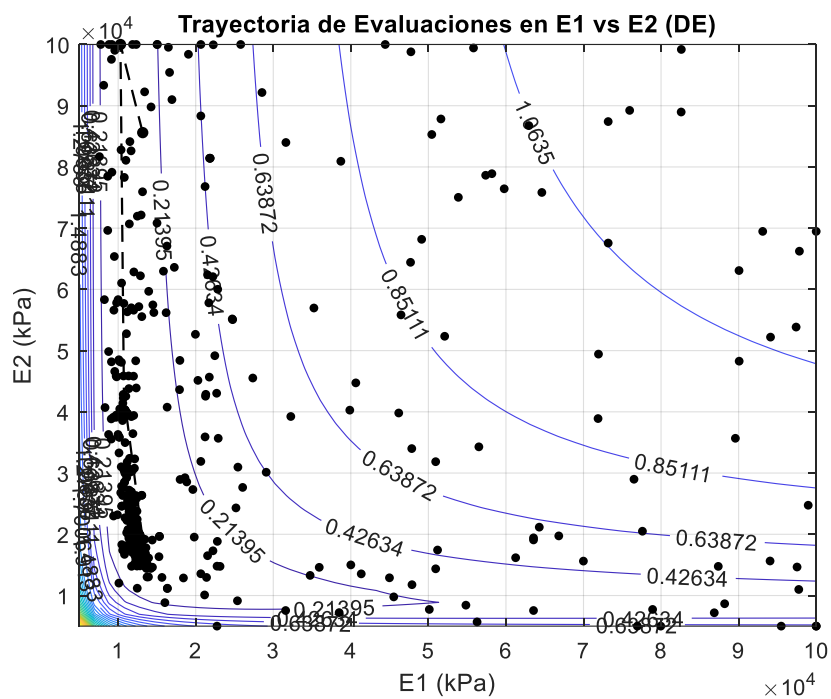


Figura A-233 – Mapa de soluciones. Evolución diferencial con ruido

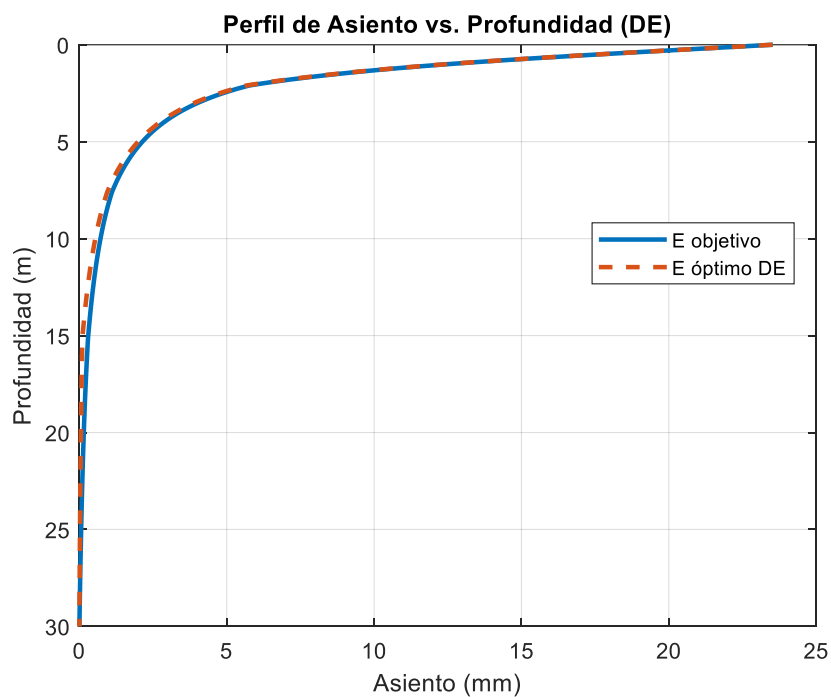


Figura A-234 – Perfil asiento retrocalculado. Evolución diferencial con ruido

### 12.2.8 Recocido simulado (SA) – Sin ruido

Se considera una temperatura inicial de 1 y un factor de enfriamiento de 0.95. Se adoptan tantas iteraciones como sean necesarias para alcanzar el error objetivo o 250, lo que sea menor.

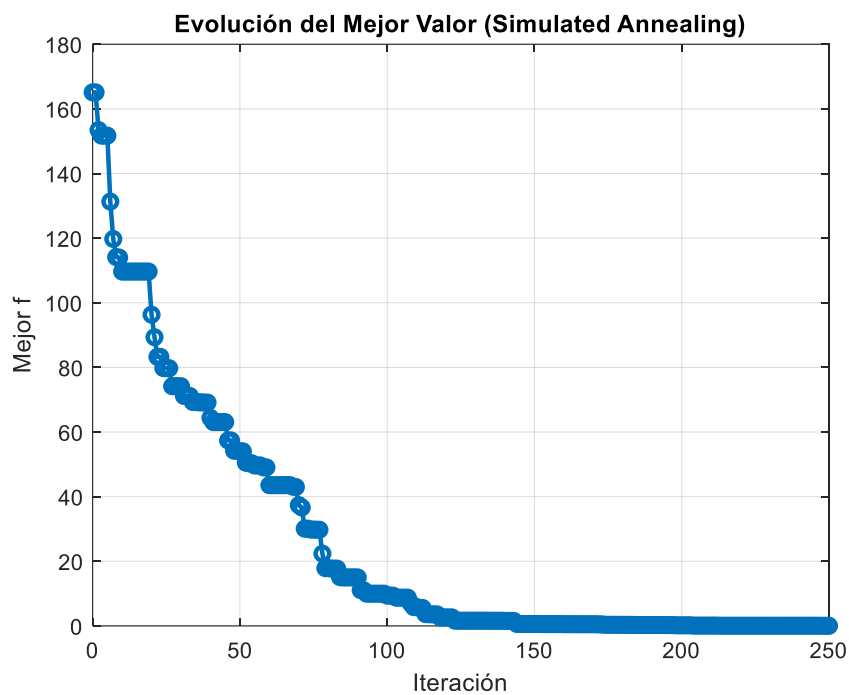


Figura A-235 – Evolución del mejor valor. Recocido simulado sin ruido

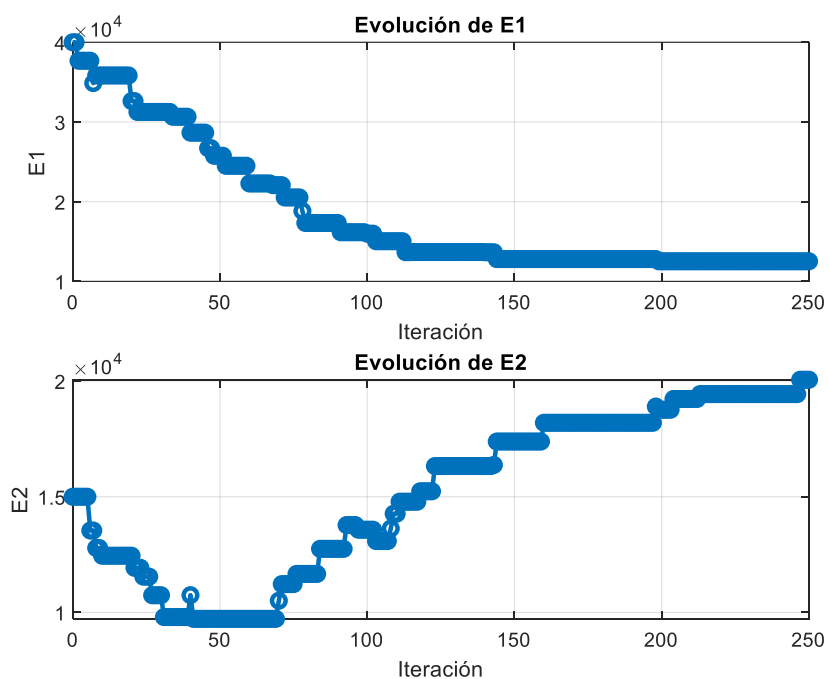


Figura A-236 – Evolución E1-E2. Recocido simulado sin ruido

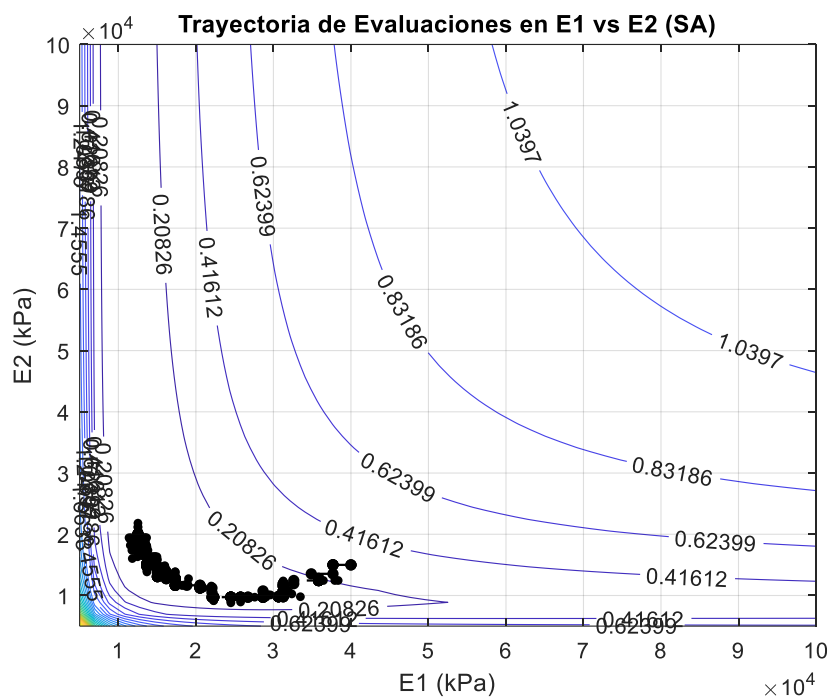


Figura A-237 – Mapa de soluciones. Recocido simulado sin ruido

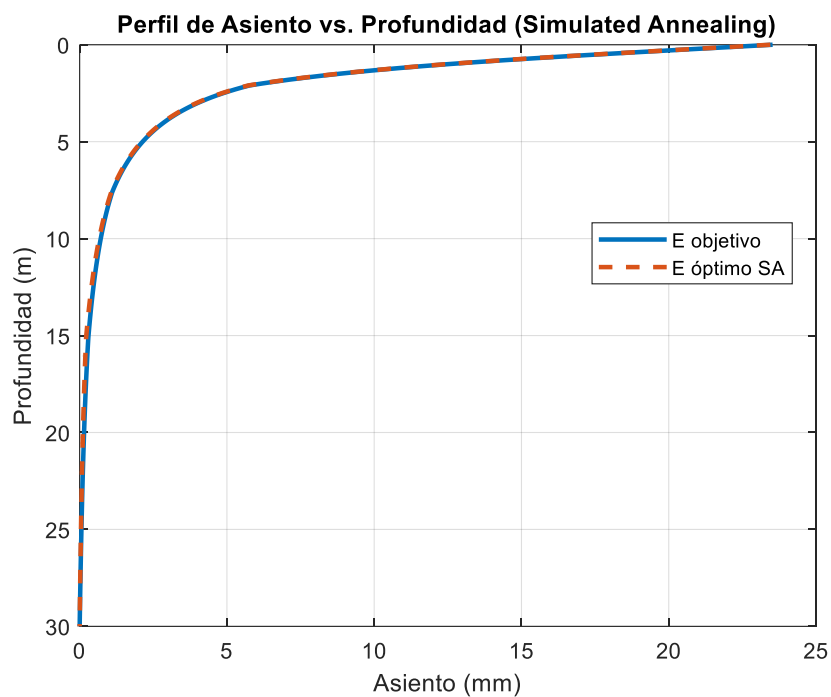


Figura A-238 – Perfil asiento retrocalculado. Recocido simulado sin ruido

### 12.2.9 Recocido simulado (SA) – Sin ruido

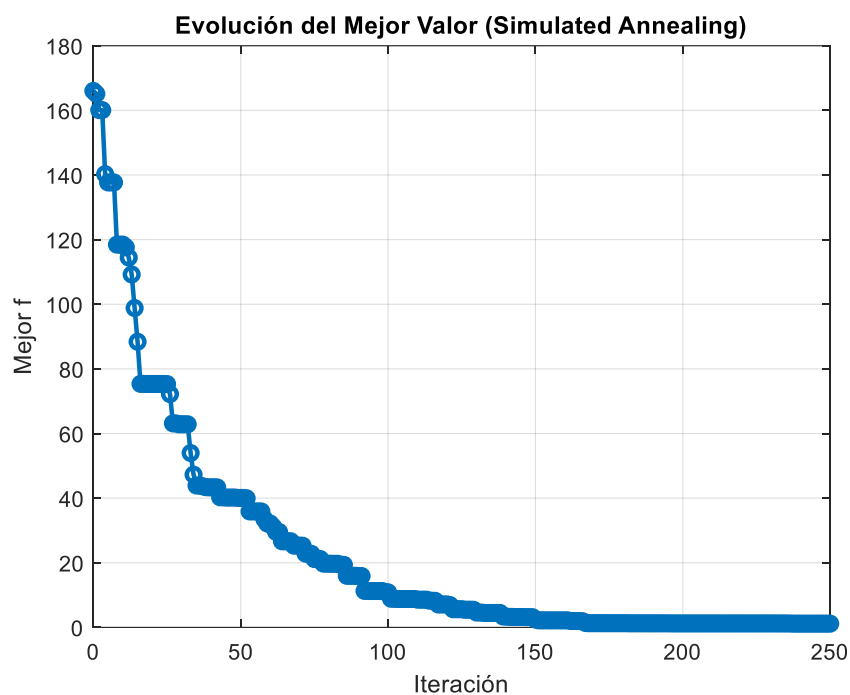


Figura A-239 – Evolución del mejor valor. Recocido simulado con ruido

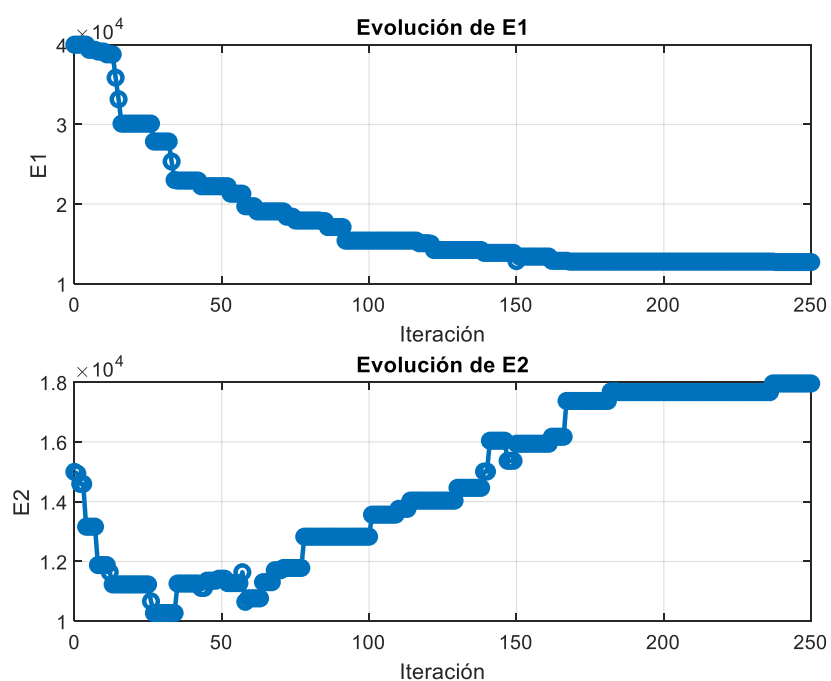


Figura A-240 – Evolución E1-E2. Recocido simulado con ruido

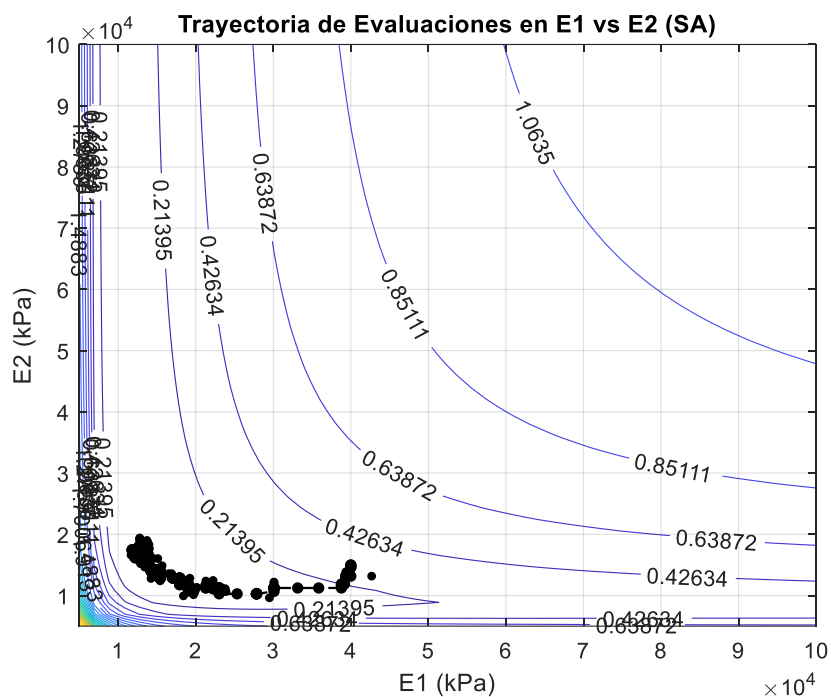


Figura A-241 – Mapa de soluciones. Recocido simulado con ruido

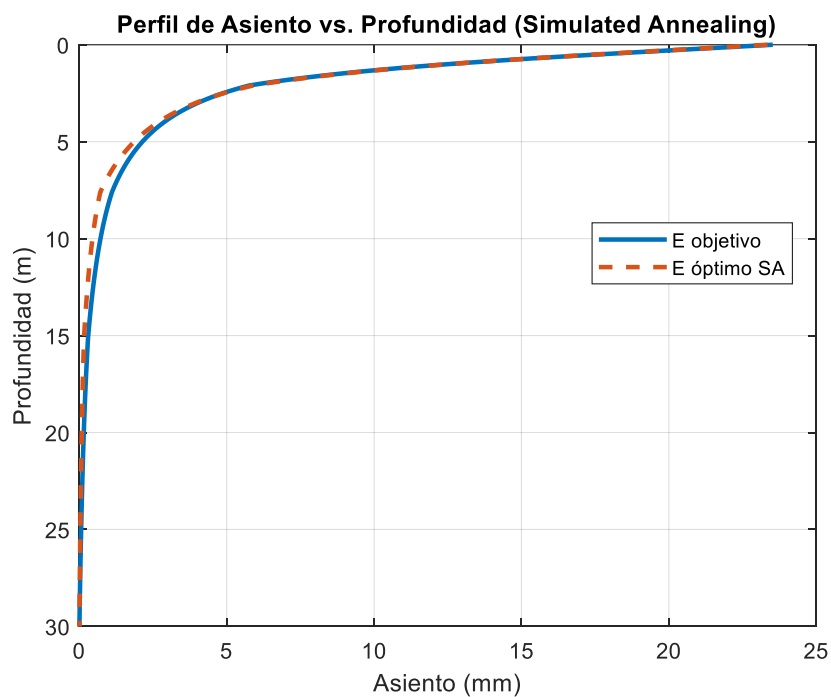


Figura A-242 – Perfil asiento retrocalculado. Recocido simulado con ruido

## 12.3 Anejo A3. Métodos de Búsqueda Directa

### 12.3.1 Nelder-Mead (Simplex) – Sin ruido

Se adopta una tolerancia de 0.10 para la malla y salto.

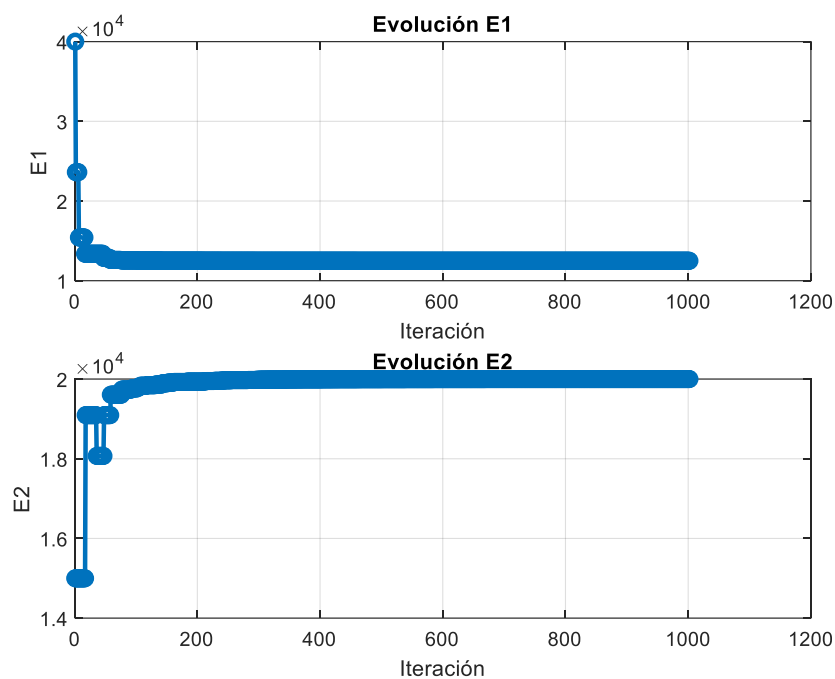


Figura A-243 – Evolución E1-E2. Nelder-Mead sin ruido

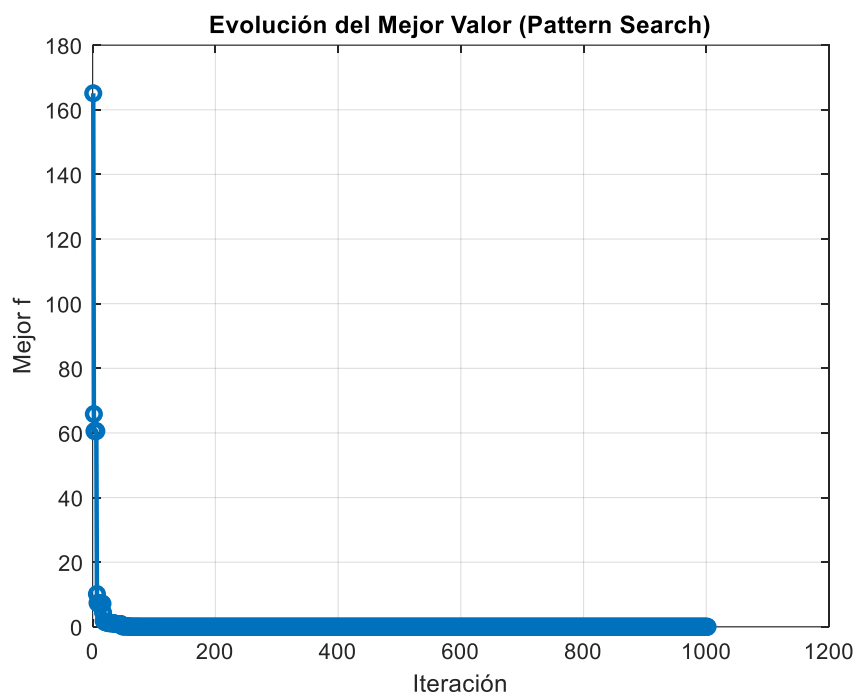


Figura A-244 – Evolución del mejor valor. Nelder-Mead sin ruido

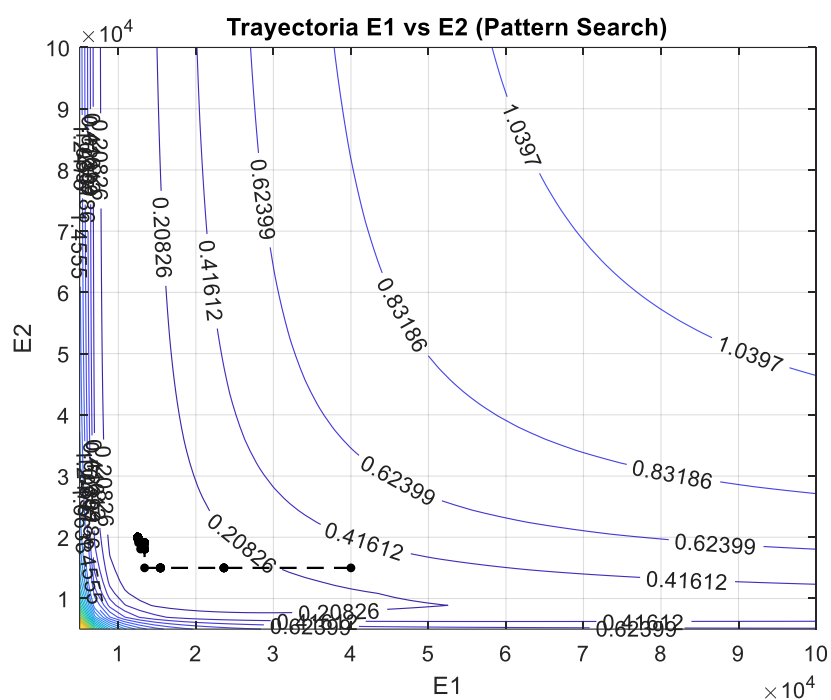


Figura A-245 – Mapa de soluciones. Nelder-Mead sin ruido

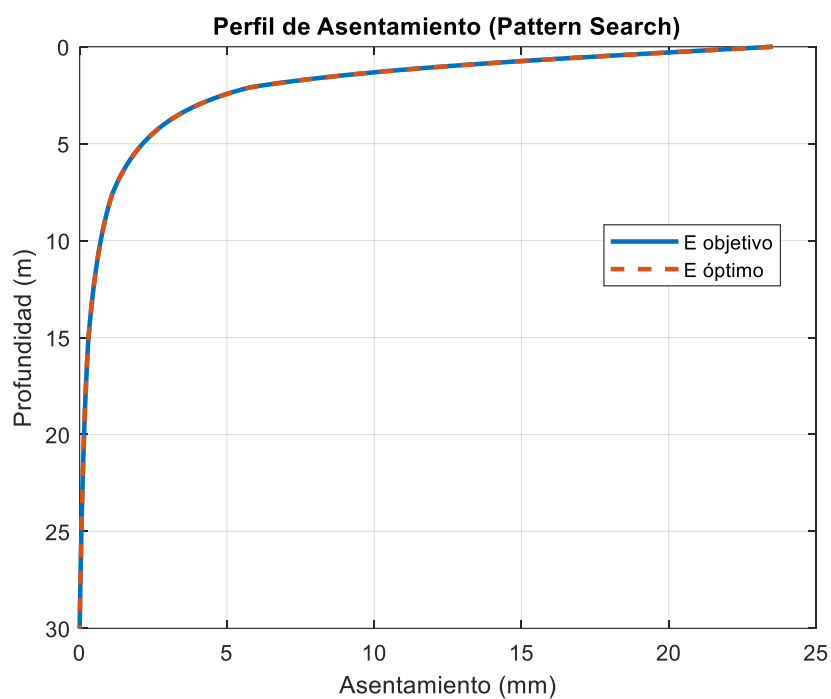


Figura A-246 – Perfil asiento retrocalculado. Nelder-Mead sin ruido



### 12.3.2 Nelder-Mead (Simplex) – Con ruido

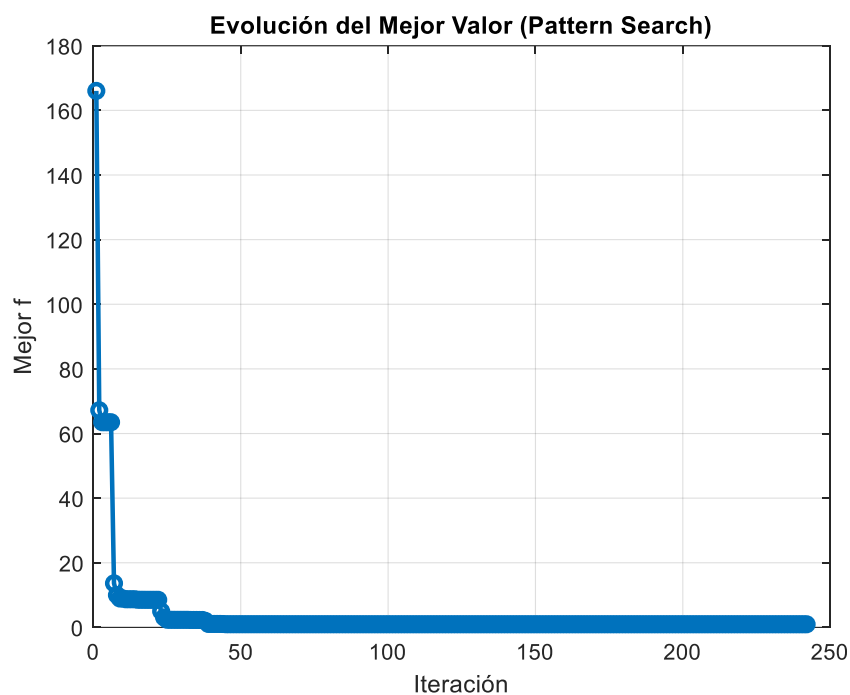


Figura A-247 – Evolución mejor valor. Nelder-Mead con ruido

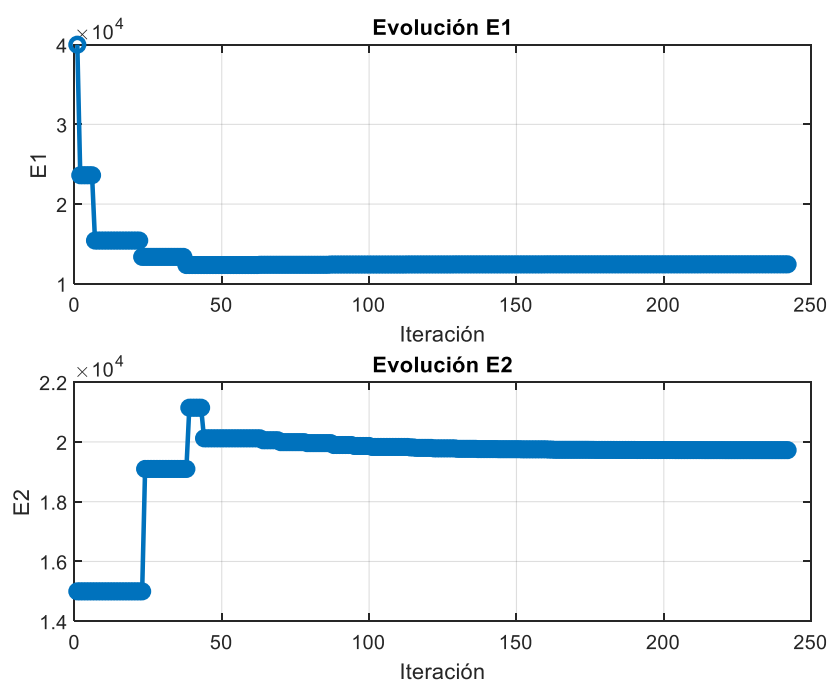


Figura A-248 – Evolución E1-E2. Nelder-Mead con ruido

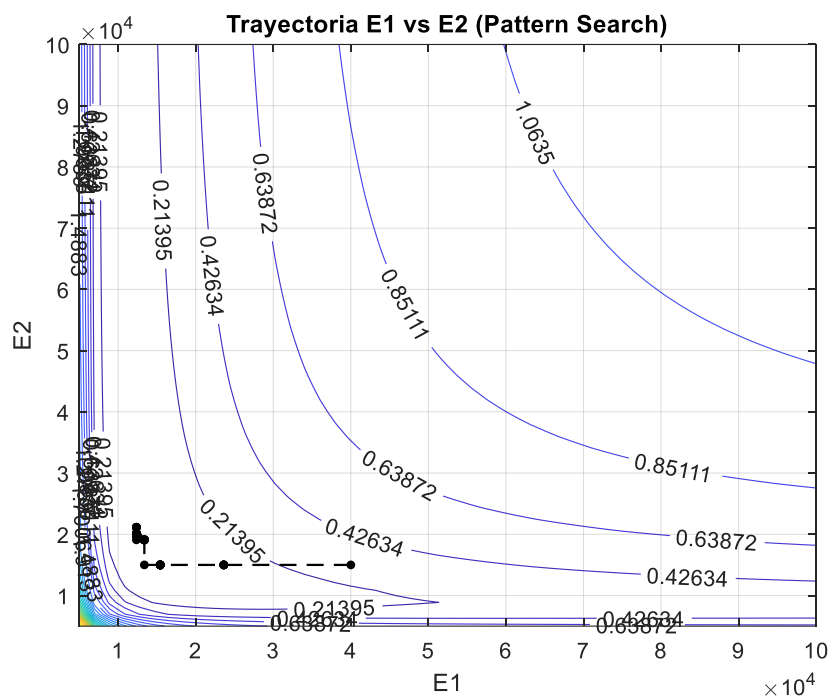


Figura A-249 – Mapa de soluciones. Nelder-Mead con ruido

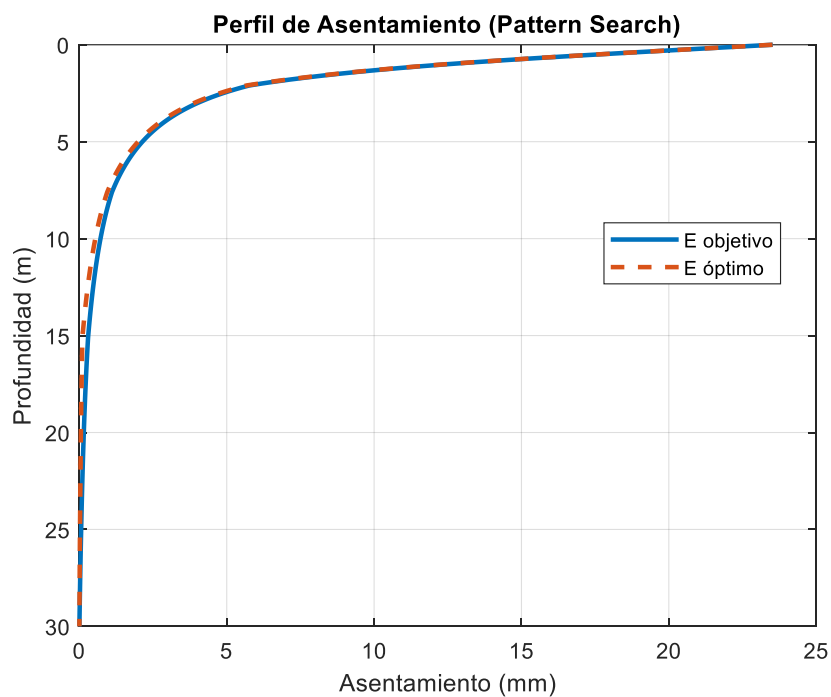


Figura A-250 – Perfil asiento retrocalculado. Nelder-Mead con ruido

## 12.4 Anejo A4. Métodos surrogados

### 12.4.1 Optimización Bayesiana (B0) – Sin ruido

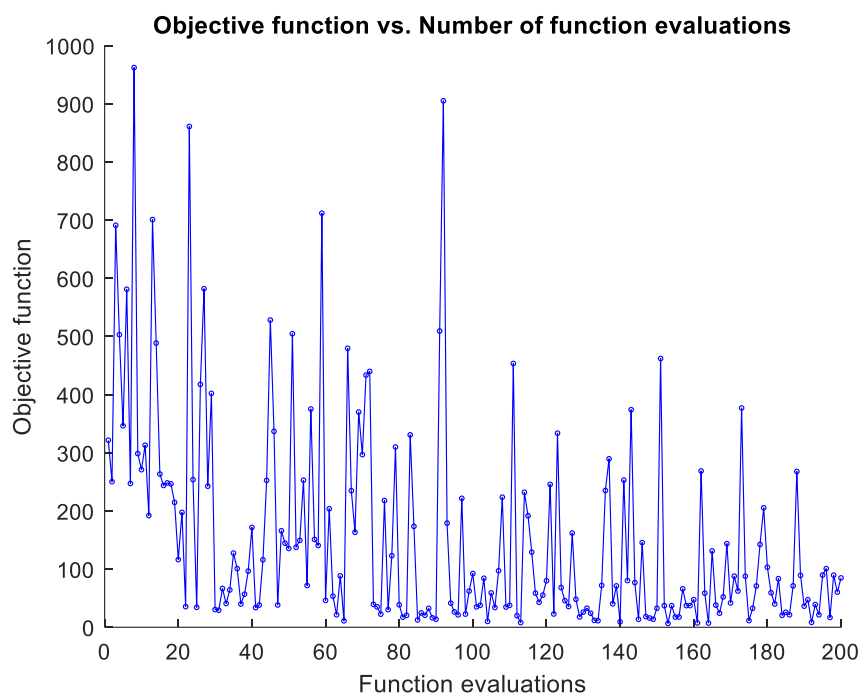


Figura A-251 – Número de evaluaciones por iteración. Optimización Bayesiana sin ruido

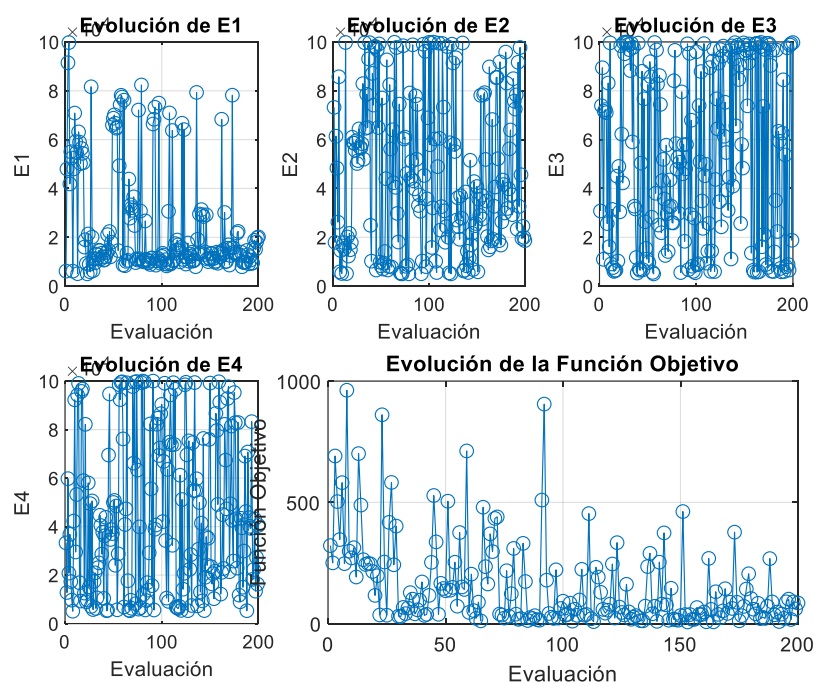


Figura A-252 – Evolución E1-E4. Optimización Bayesiana sin ruido

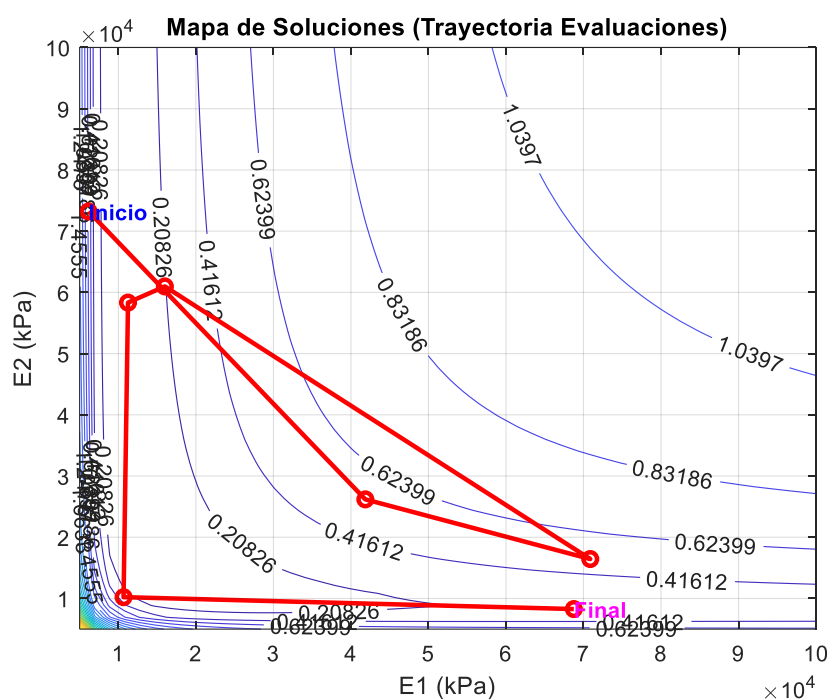


Figura A-253 – Mapa de soluciones. Optimización Bayesiana sin ruido

#### 12.4.2 Optimización Bayesiana (B0) – Con ruido

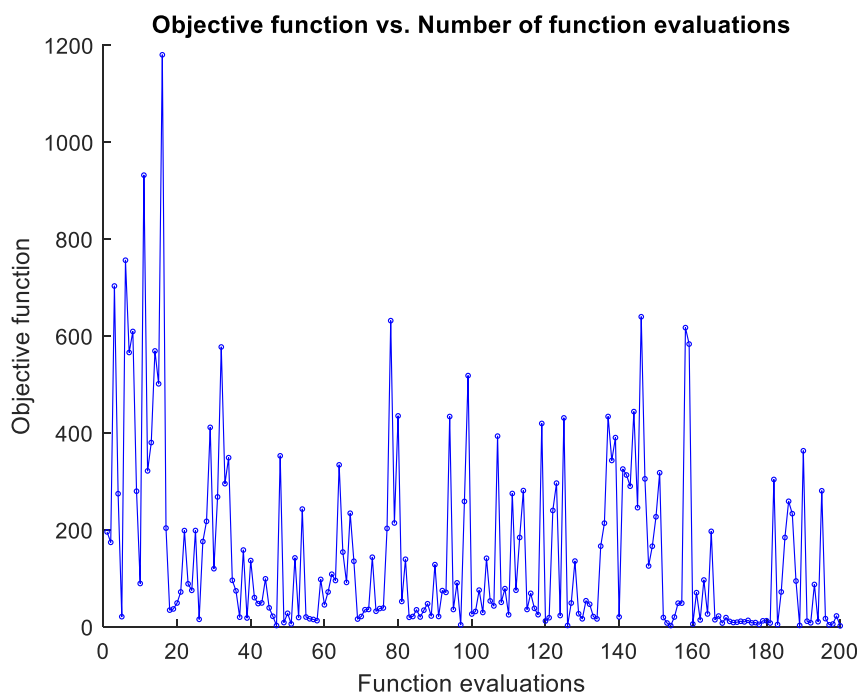


Figura A-254 – Número de evaluaciones por iteración. Optimización Bayesiana con ruido

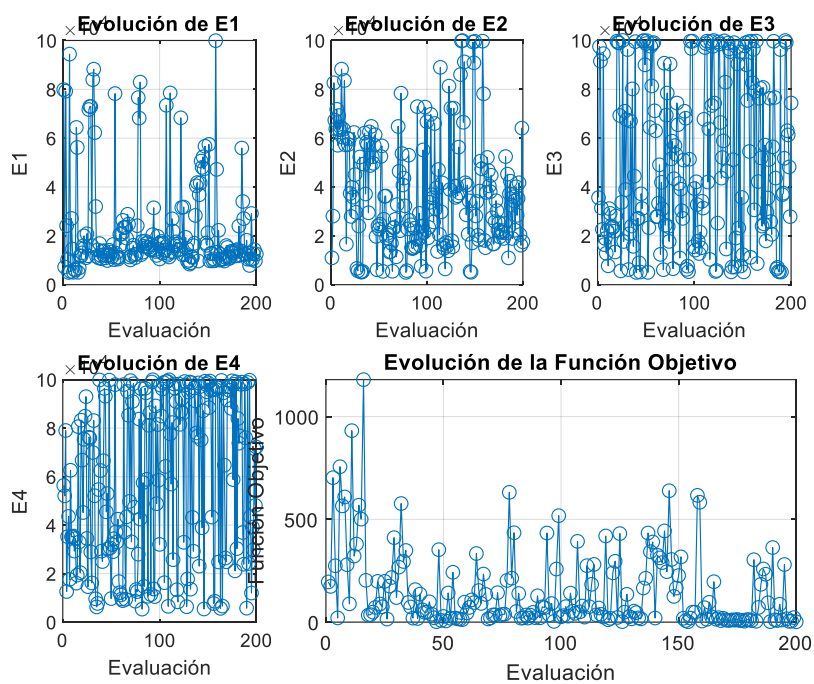


Figura A-255 – Evolución E1-E4. Optimización Bayesiana con ruido

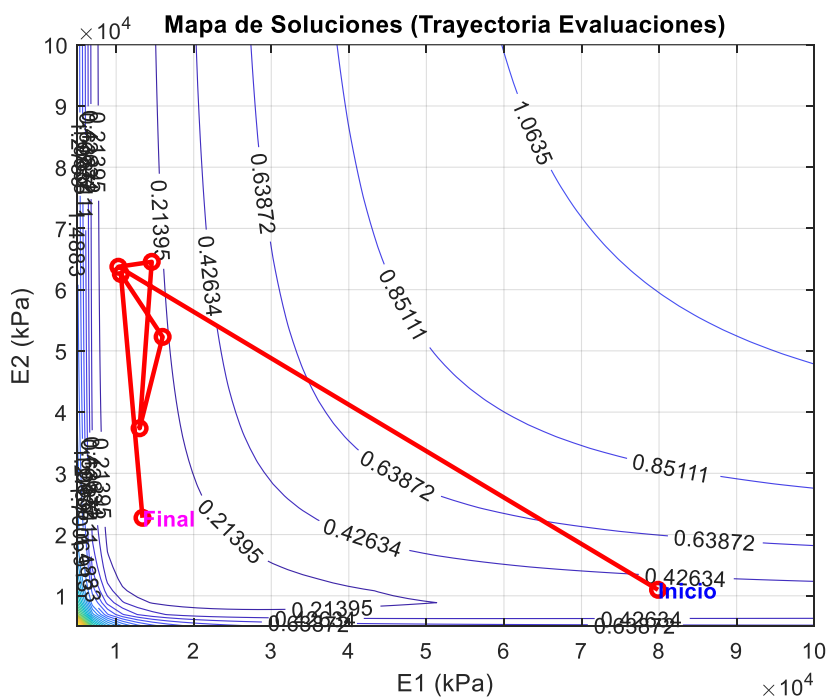


Figura A-256 – Mapa de soluciones. Optimización Bayesiana con ruido

### 12.4.3 Procesos Gaussianos (GP) – Sin ruido

Se adopta un máximo de iteraciones 300 y 30 puntos iniciales.

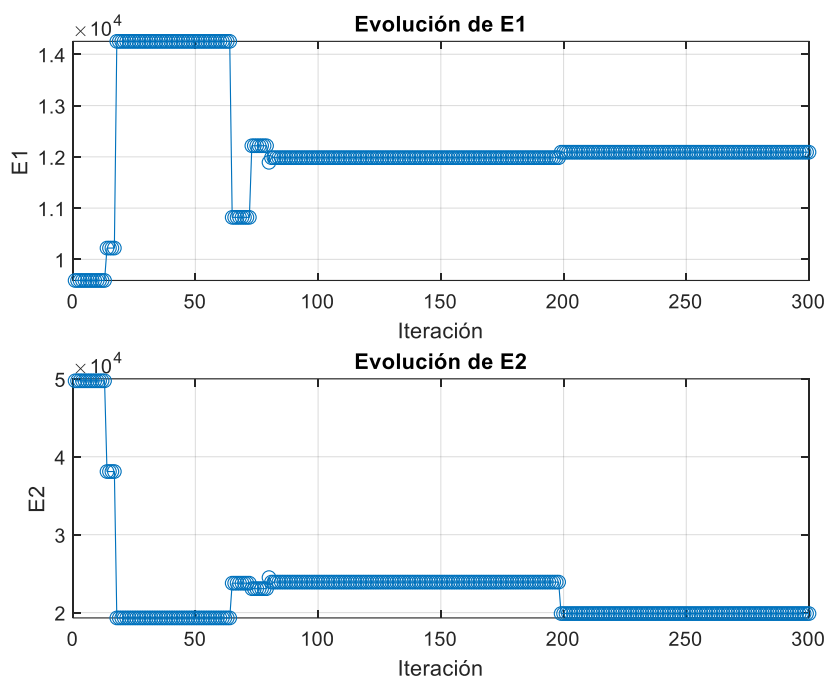


Figura A-257 – Evolución E1-E4. Proceso Gaussiano sin ruido

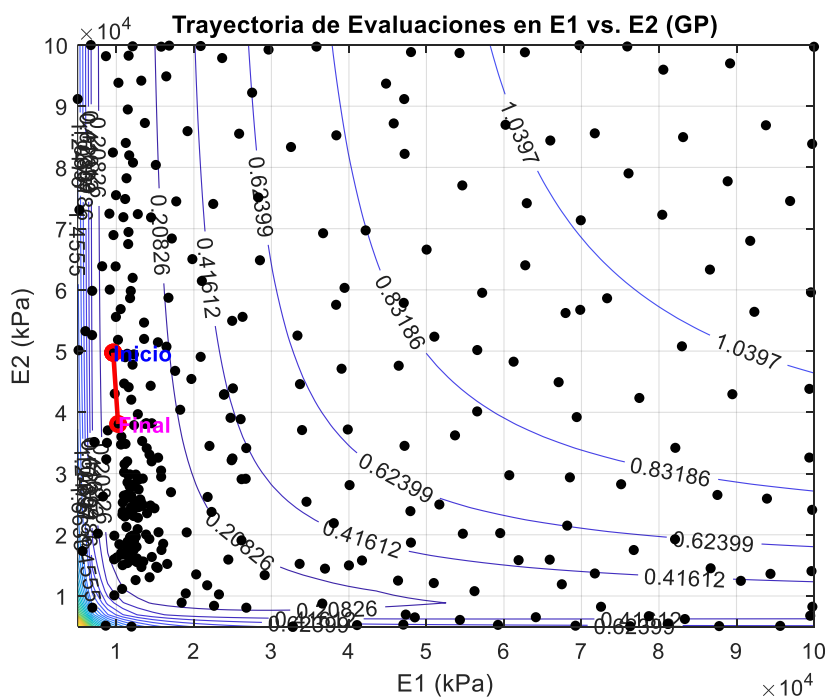


Figura A-258 – Mapa de soluciones. Proceso Gaussiano sin ruido

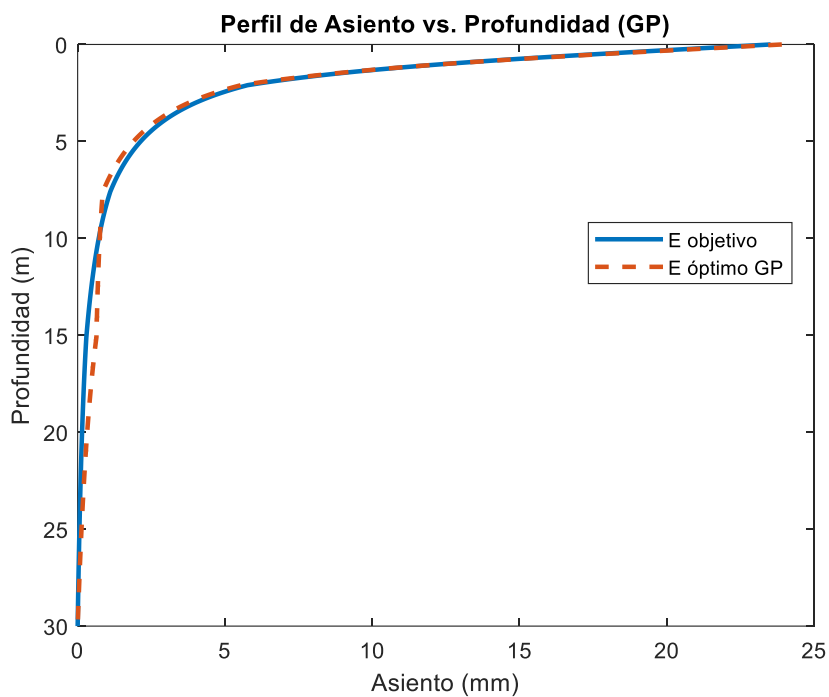


Figura A-259 – Perfil asiento retrocalculado. Proceso Gaussiano sin ruido

#### 12.4.4 Procesos Gaussianos (GP) – Con ruido

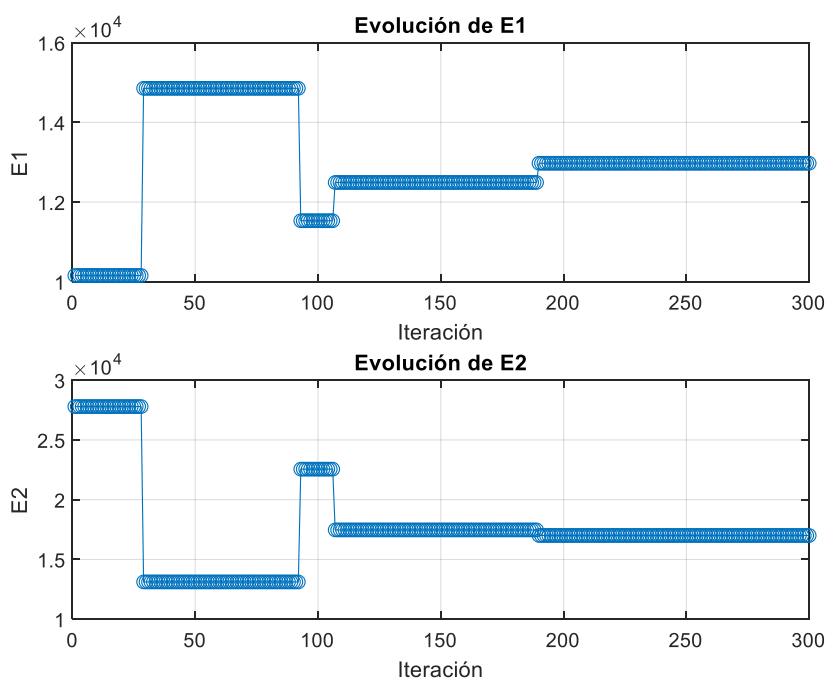


Figura A-260 – Evolución E1-E4. Proceso Gaussiano con ruido

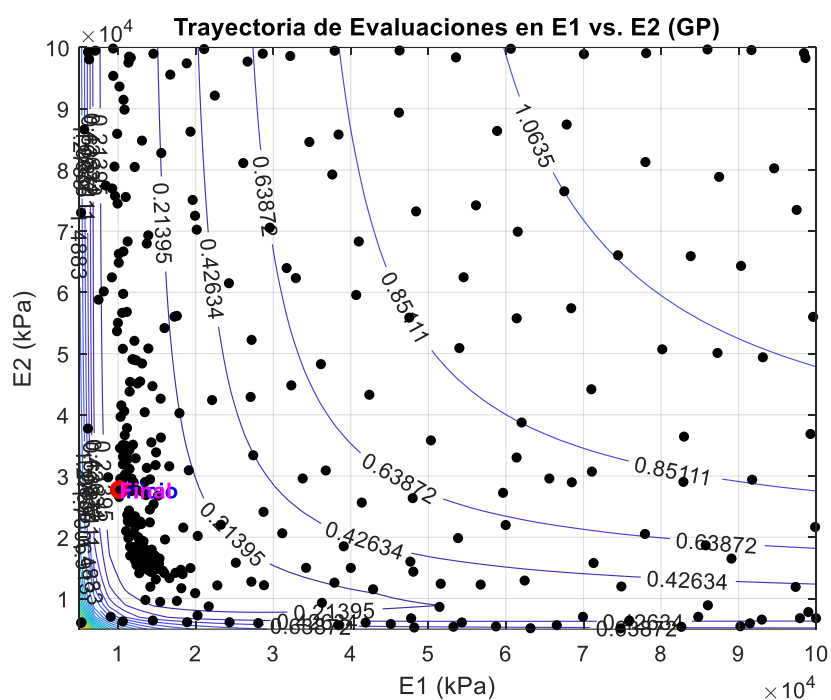


Figura A-261 – Mapa de soluciones. Proceso Gaussiano con ruido

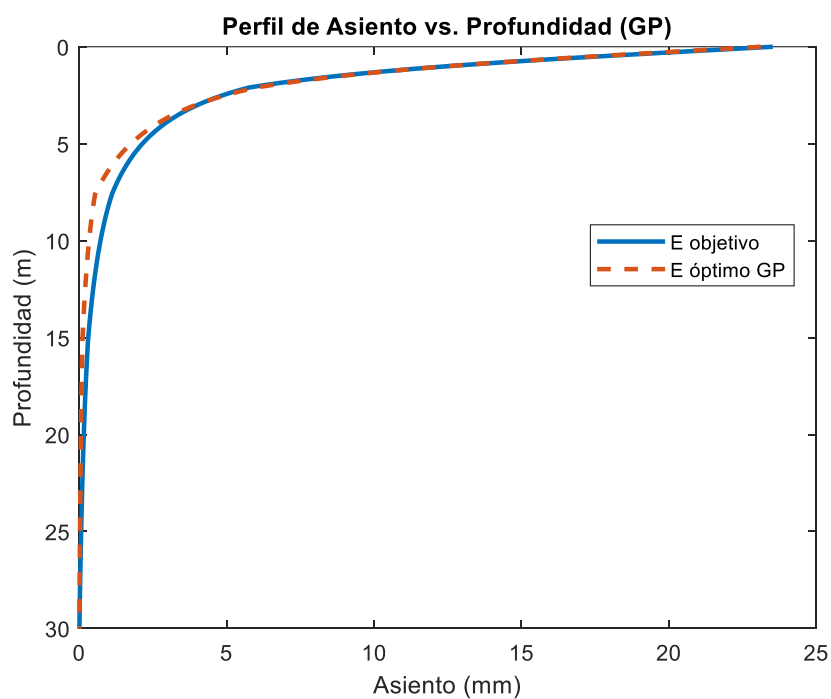


Figura A-262 – Perfil asiento retrocalculado. Proceso Gaussiano con ruido



### 12.4.5 Modelos de superficie de respuesta (Kriging) – Sin ruido

Se consideran un máximo de 300 iteraciones y 30 puntos iniciales.

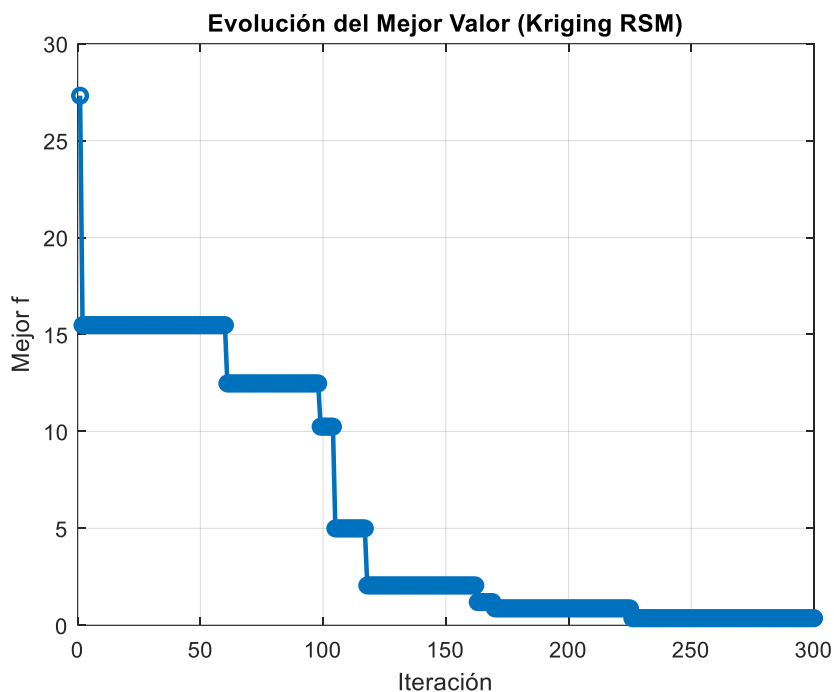


Figura A-263 – Evolución mejor resultado. Kriging sin ruido

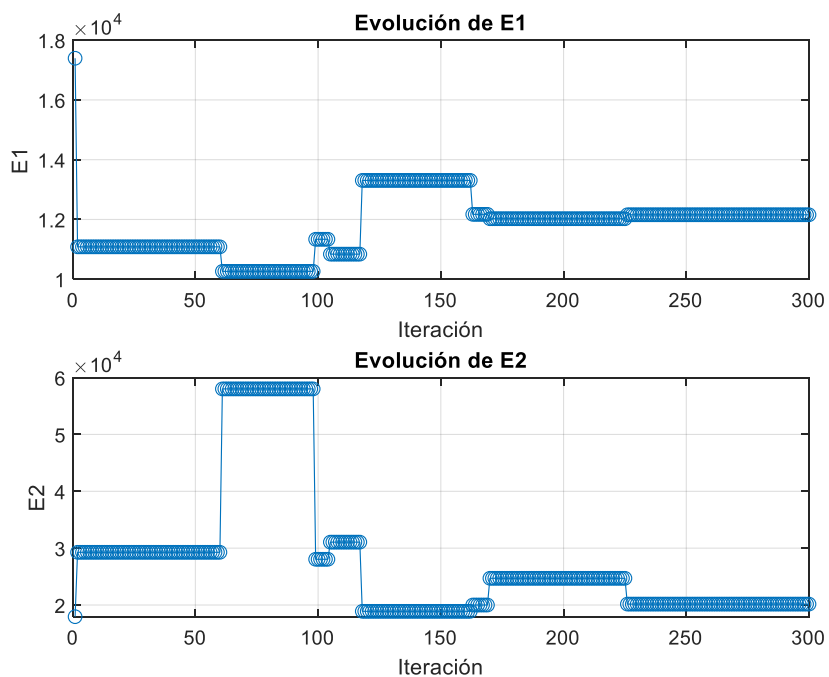
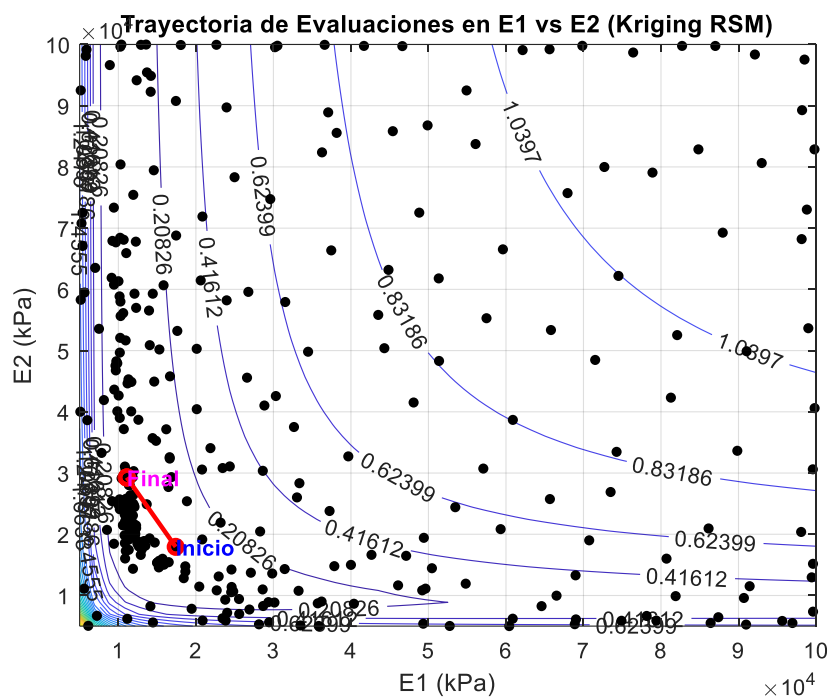


Figura A-264 – Evolución E1-E4. Kriging sin ruido



### 12.4.6 Modelos de superficie de respuesta (Kriging) – Con ruido

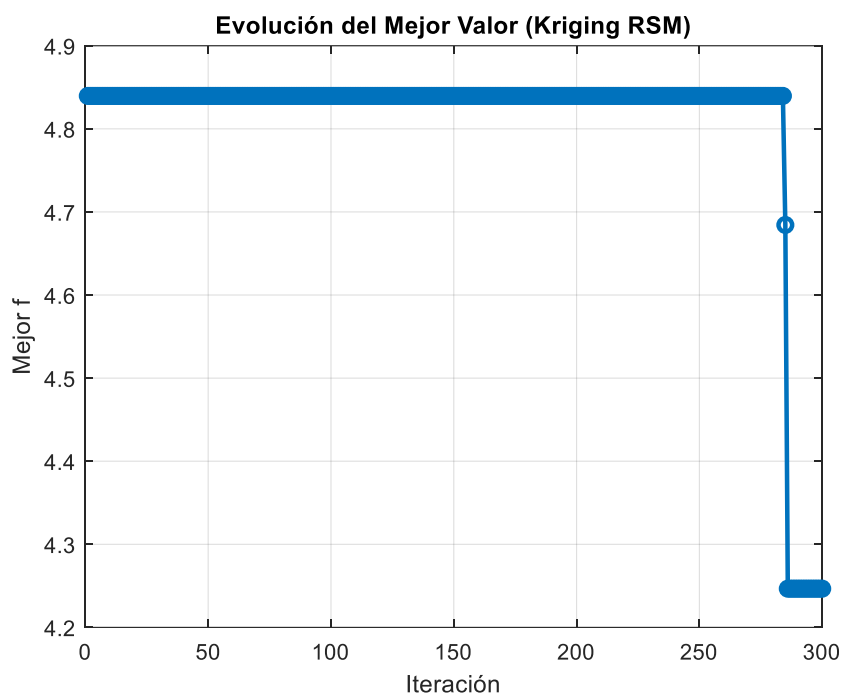


Figura A-267 – Evolución mejor resultado. Kriging con ruido

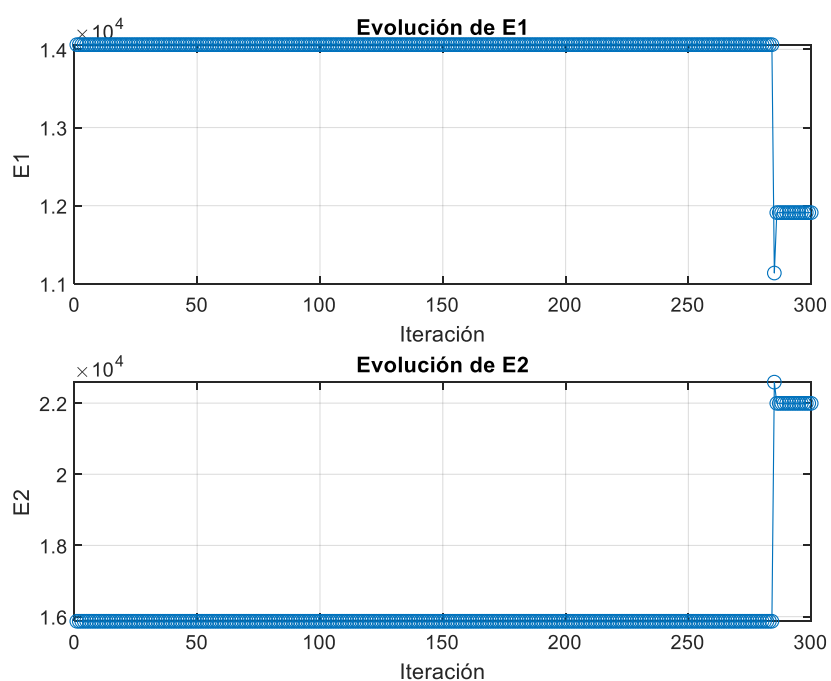


Figura A-268 – Evolución E1-E4. Kriging con ruido

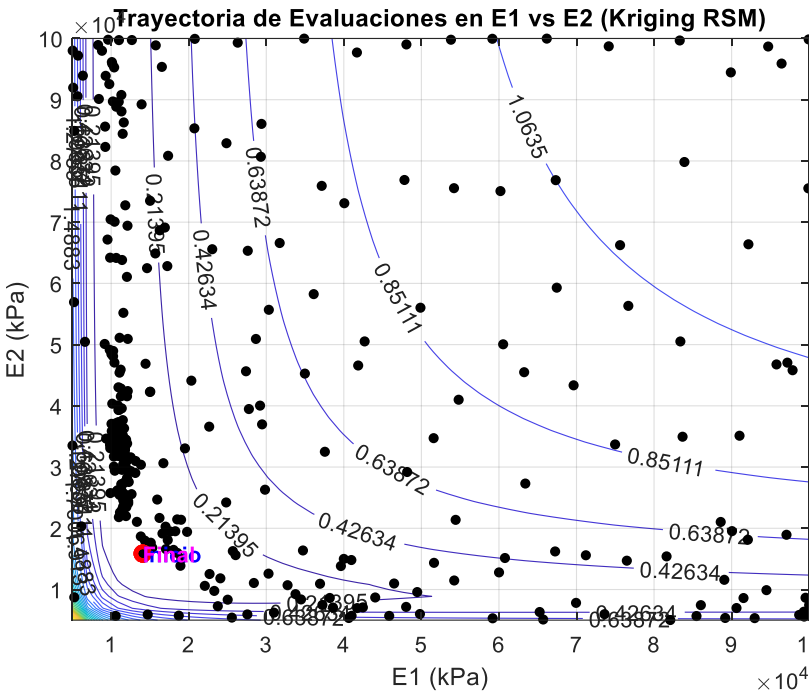


Figura A-269 – Mapa de soluciones. Kriging con ruido

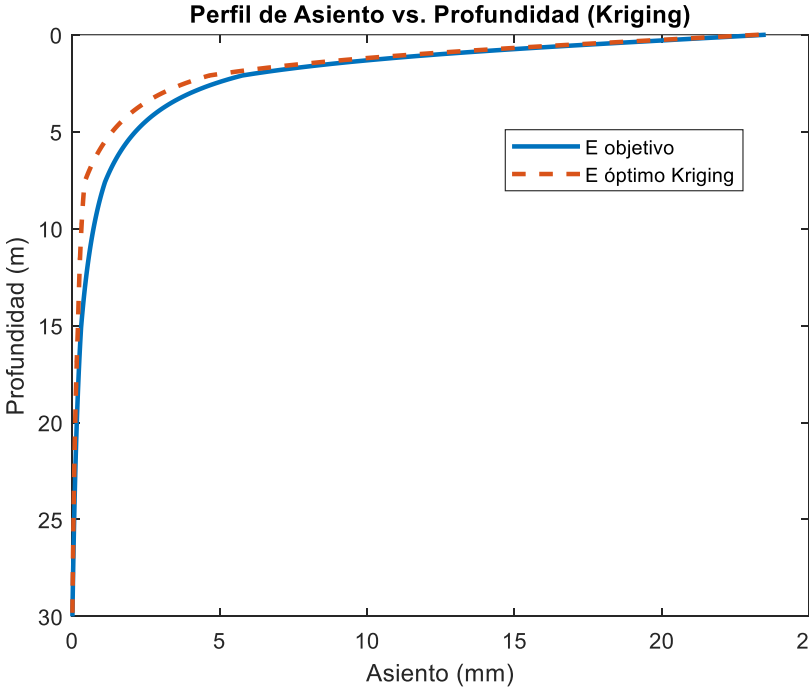


Figura A-270 – Perfil asiento retrocalculado. Kriging con ruido

## 12.5 Anejo A5. Métodos basados en programación matemática

### 12.5.1 Programación cuadrática – Sin ruido

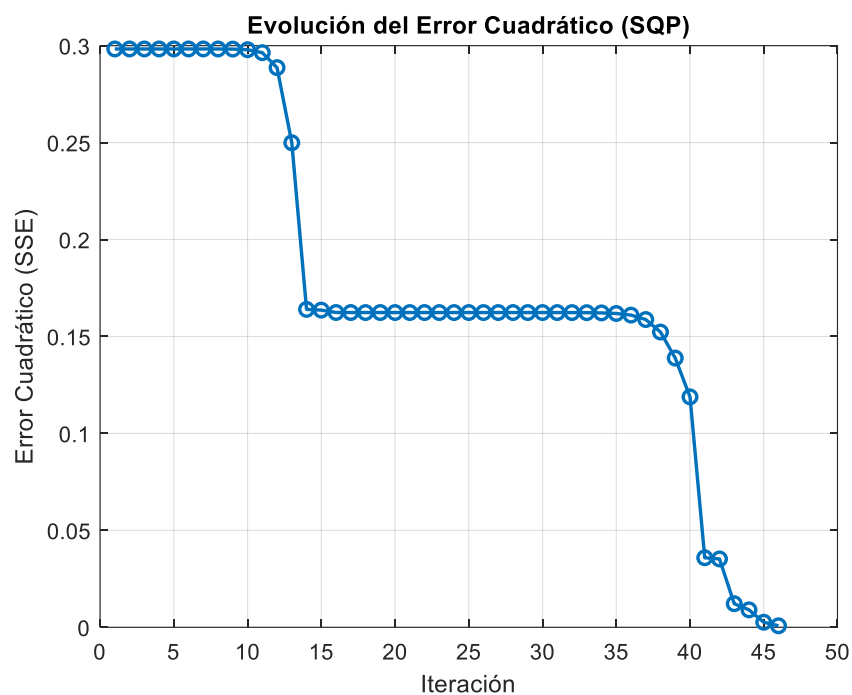


Figura A-271 – Evolución mejor resultado. Programación matemática sin ruido

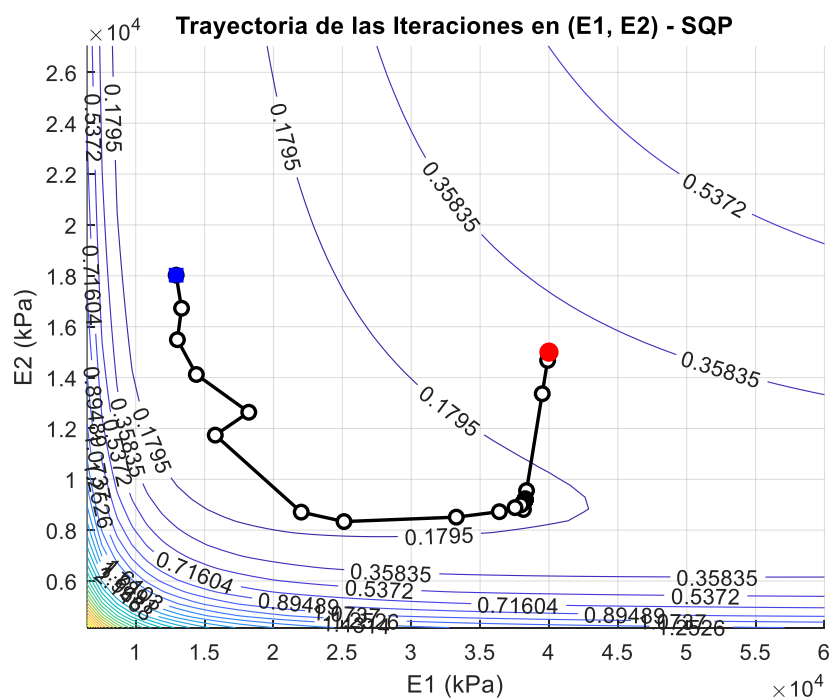


Figura A-272 – Mapa de soluciones. Programación matemática sin ruido

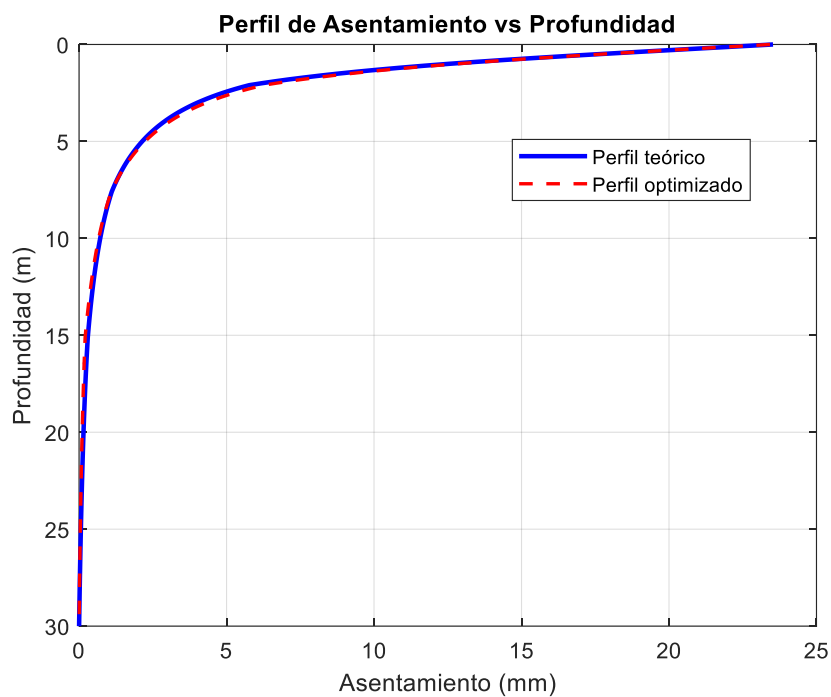


Figura A-273 – Perfil asiento retrocalculado. Programación matemática sin ruido

### 12.5.2 Programación cuadrática – Con ruido

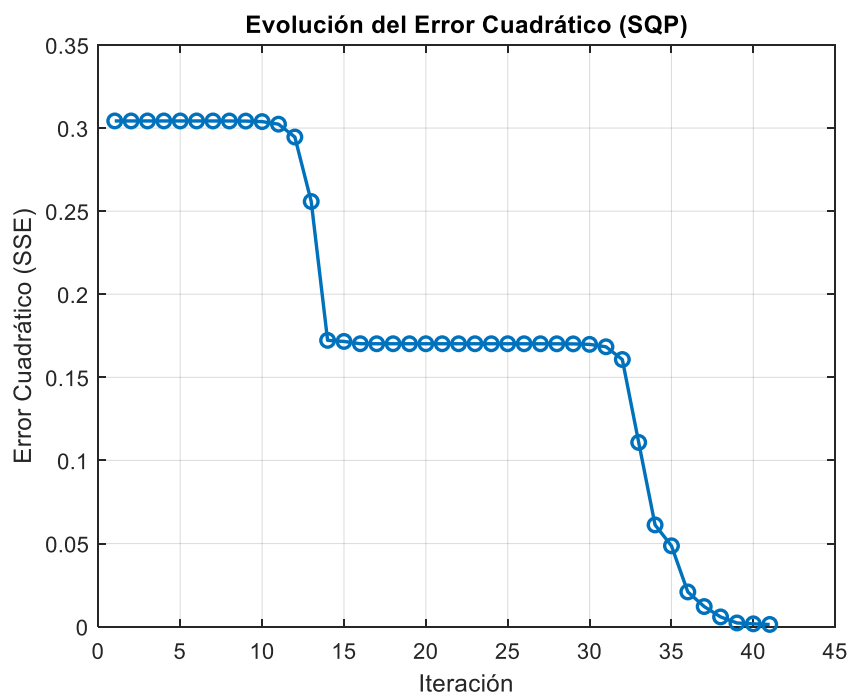


Figura A-274 – Evolución mejor resultado. Programación matemática con ruido

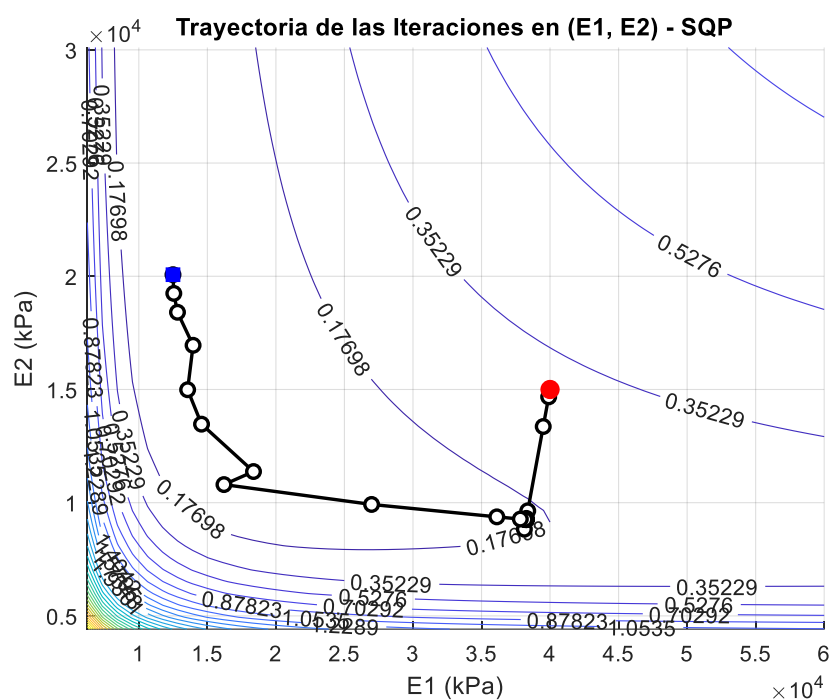


Figura A-275 – Mapa de soluciones. Programación matemática con ruido

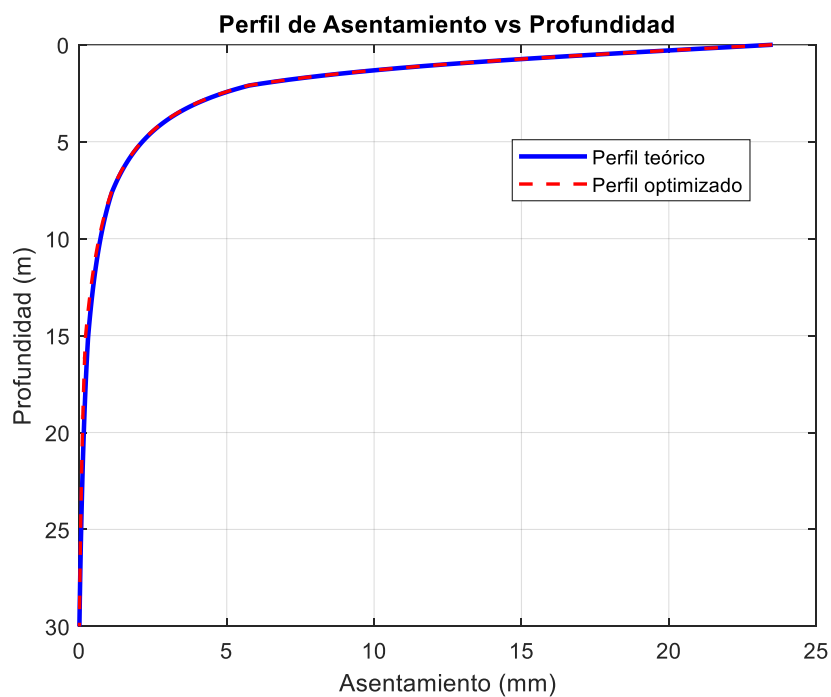


Figura A-276 – Perfil asiento retrocalculado. Programación matemática con ruido

### 12.5.3 Programación No Lineal – Sin ruido

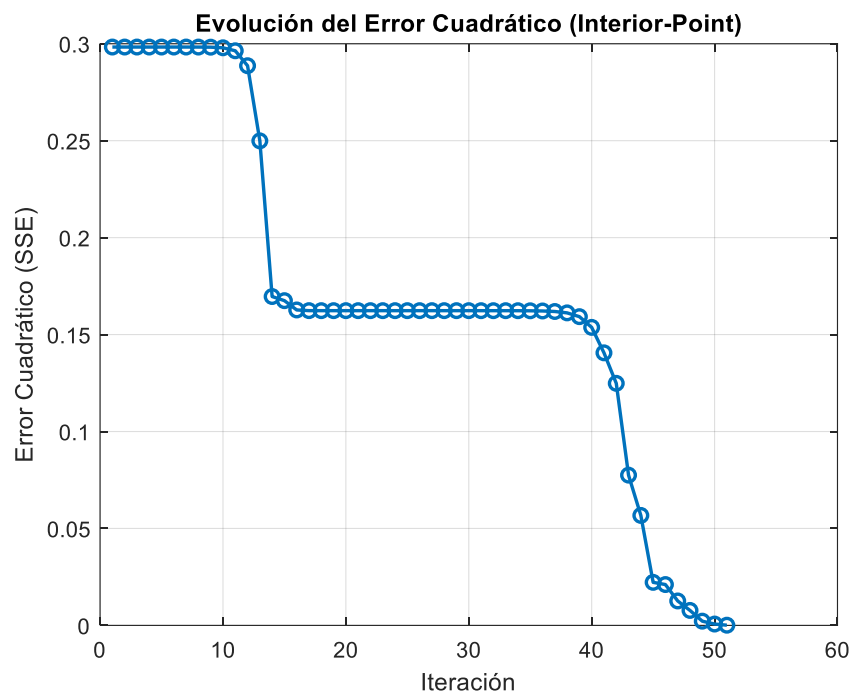


Figura A-277 – Evolución mejor resultado. Programación no lineal sin ruido

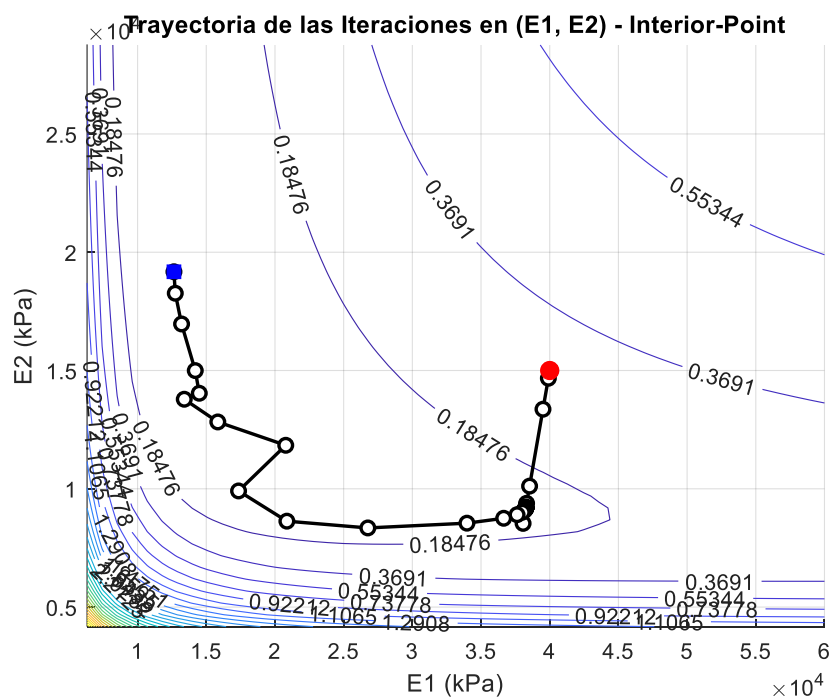


Figura A-278 – Mapa de soluciones. Programación no lineal sin ruido



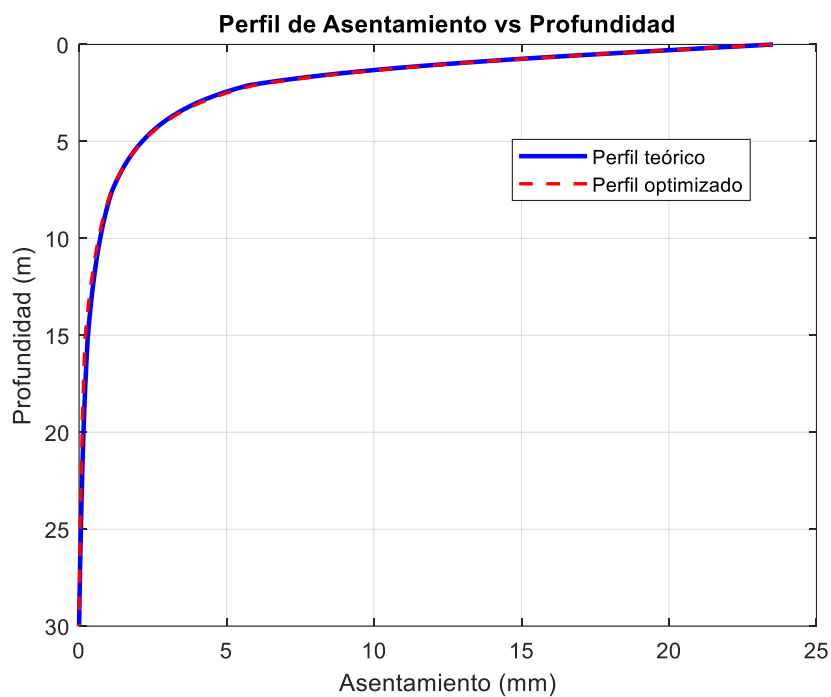


Figura A-279 – Perfil asiento retrocalculado. Programación no lineal sin ruido

#### 12.5.4 Programación No Lineal – Con ruido

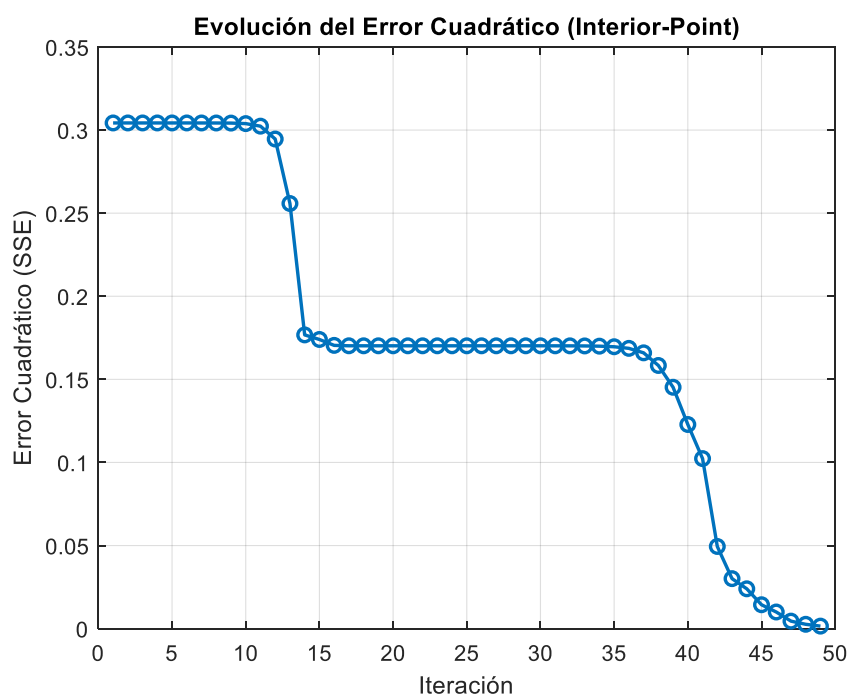


Figura A-280 – Evolución mejor resultado. Programación no lineal con ruido

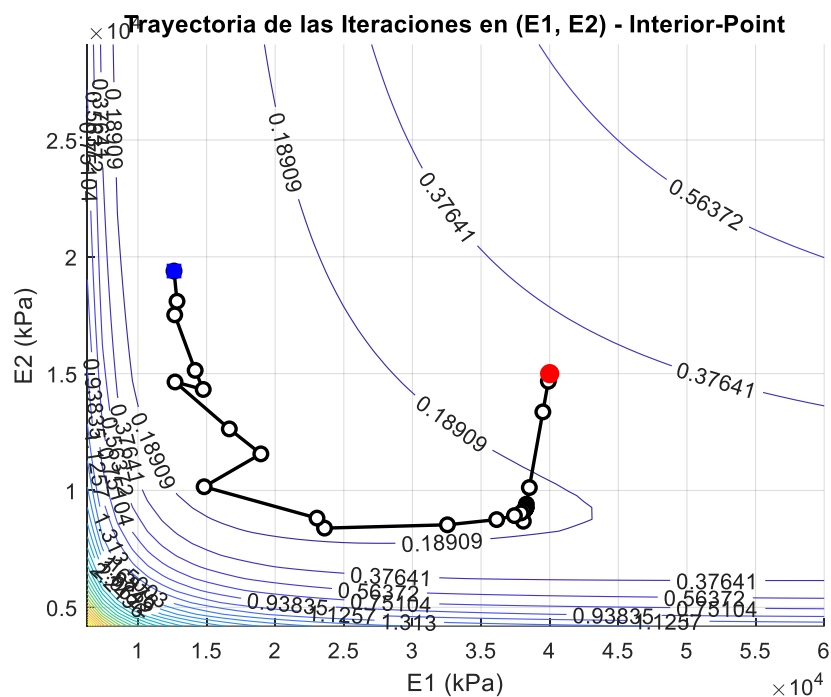


Figura A-281 – Mapa de soluciones. Programación no lineal con ruido

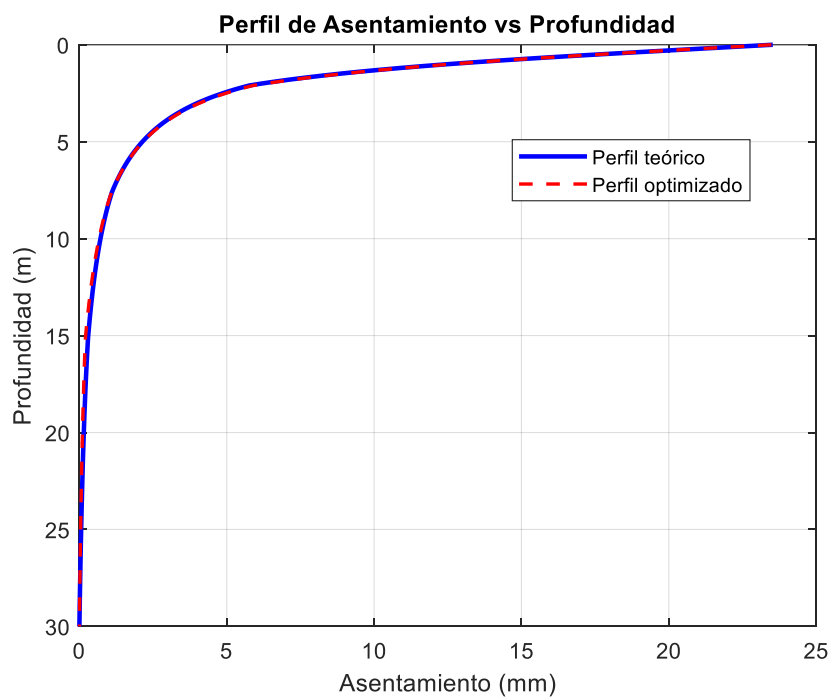


Figura A-282 – Perfil asiento retrocalculado. Programación no lineal con ruido

## 12.6 Anejo A5. Otros métodos

### 12.6.1 Optimización robusta – Sin ruido

Se consideran 20 escenarios con una perturbación del 5%.

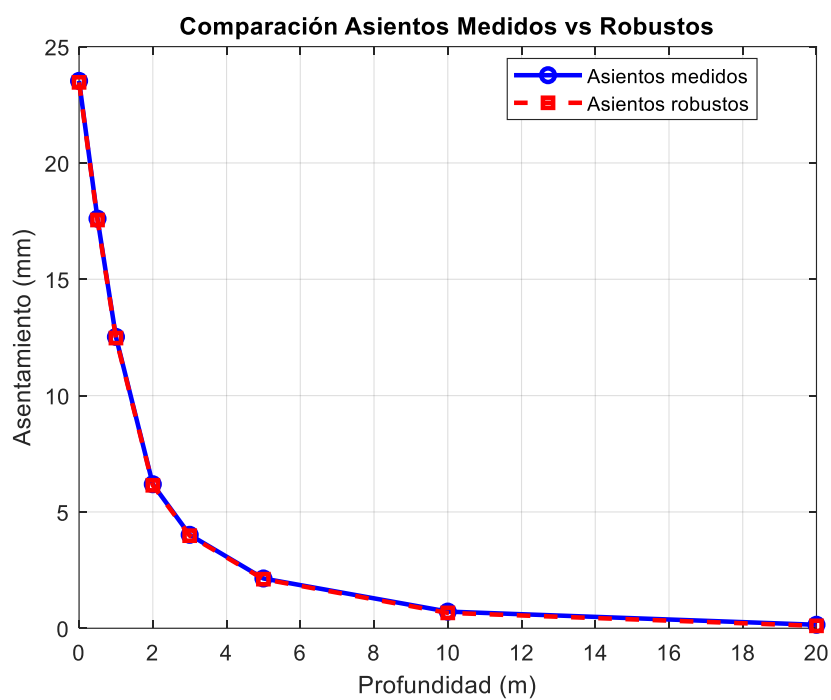


Figura A-283 – Perfil asiento retrocalculado. Optimización robusta sin ruido

### 12.6.2 Optimización robusta – Con ruido

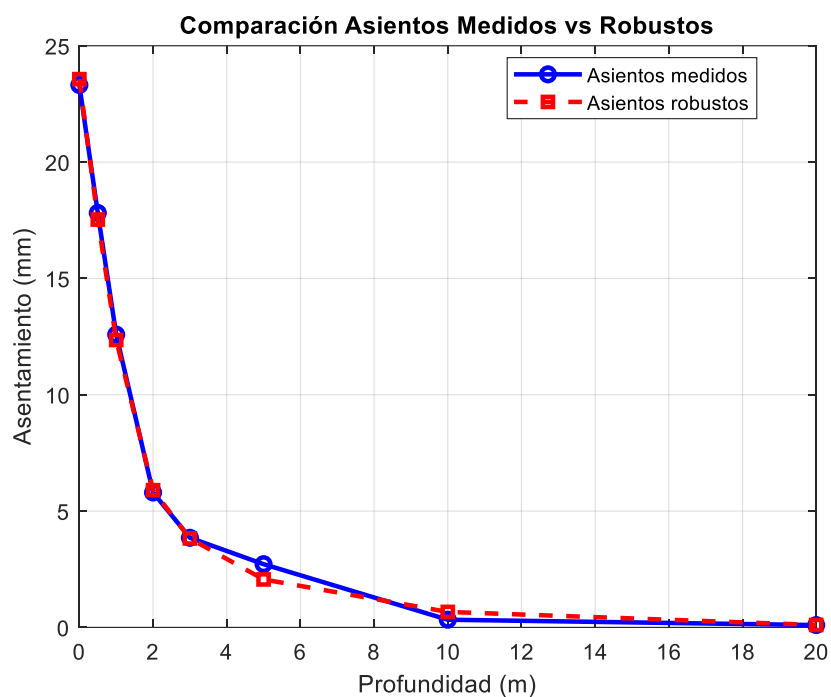


Figura A-284 – Perfil asiento retrocalculado. Optimización robusta con ruido

### 12.6.3 Optimización distribuidamente robusta – Sin ruido

Se adoptan 100 muestras con una perturbación del 2.5% (desviación estándar).

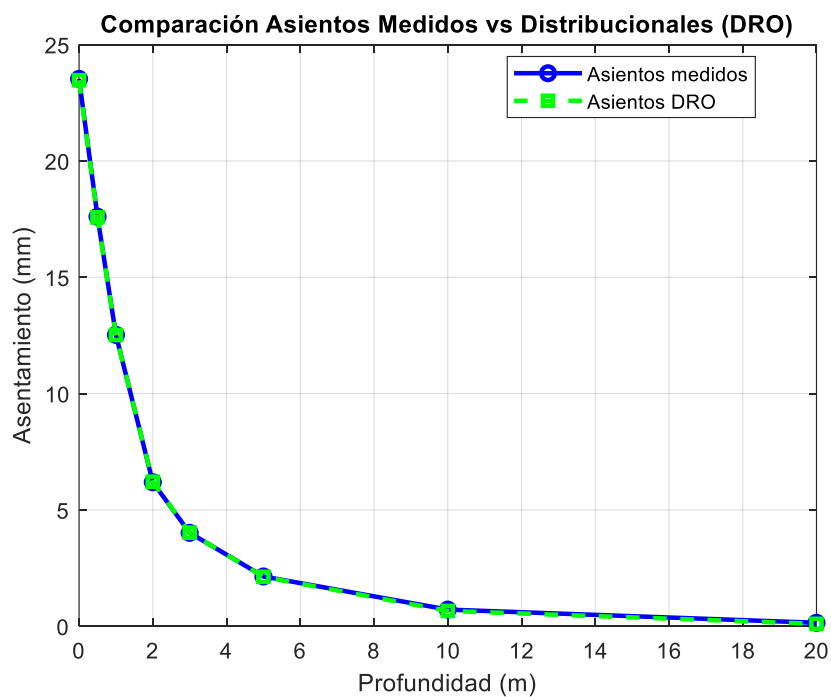


Figura A-285 – Perfil asiento retrocalculado. Optimización distribuidamente robusta sin ruido

### 12.6.4 Optimización distribuidamente robusta – Con ruido

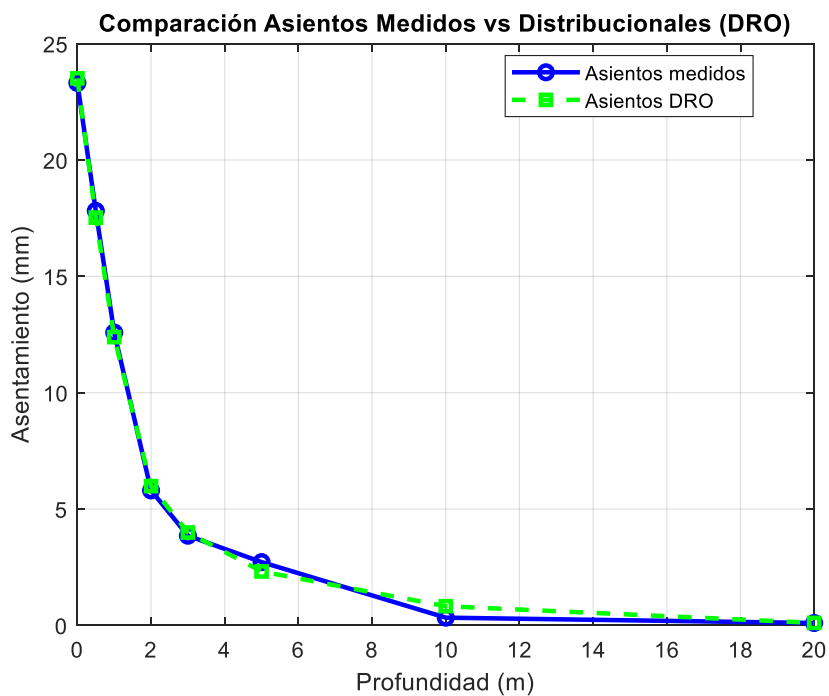


Figura A-286 – Perfil asiento retrocalculado. Optimización distribuidamente robusta con ruido

## 12.7 Anejo A6. Métodos híbridos

### 12.7.1 Genético simple con GN – Sin ruido

El algoritmo de búsqueda global considera una población de 50 individuos con un máximo de 10 generaciones, seguido del refinamiento en la fase local.

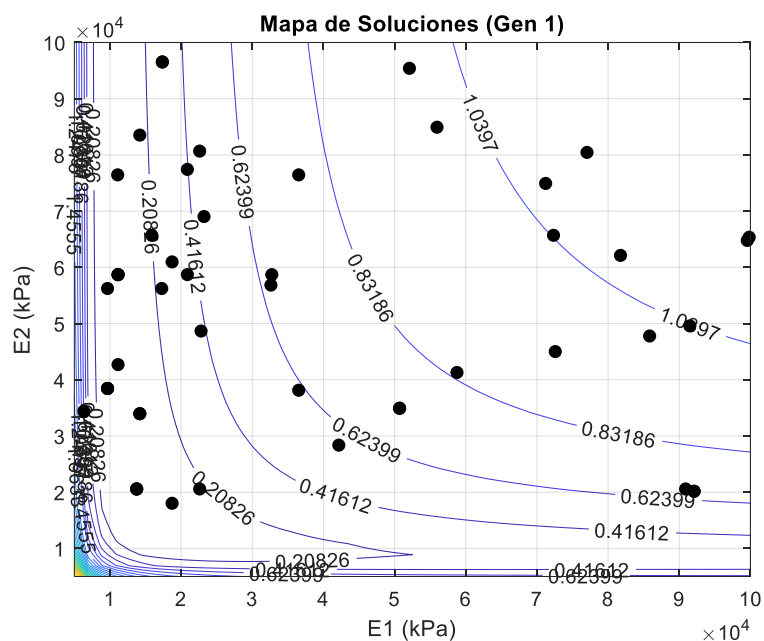


Figura A-287 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 1

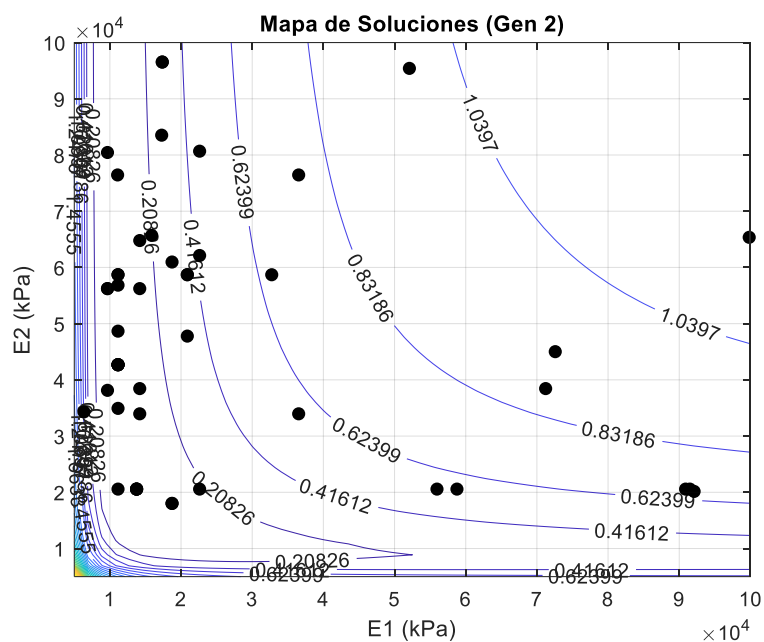


Figura A-288 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 2

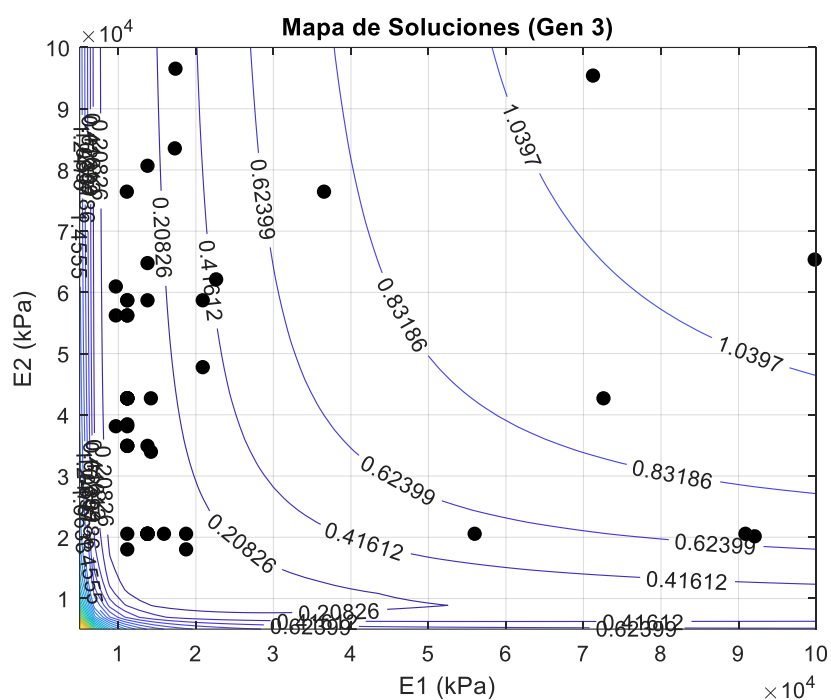


Figura A-289 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 3

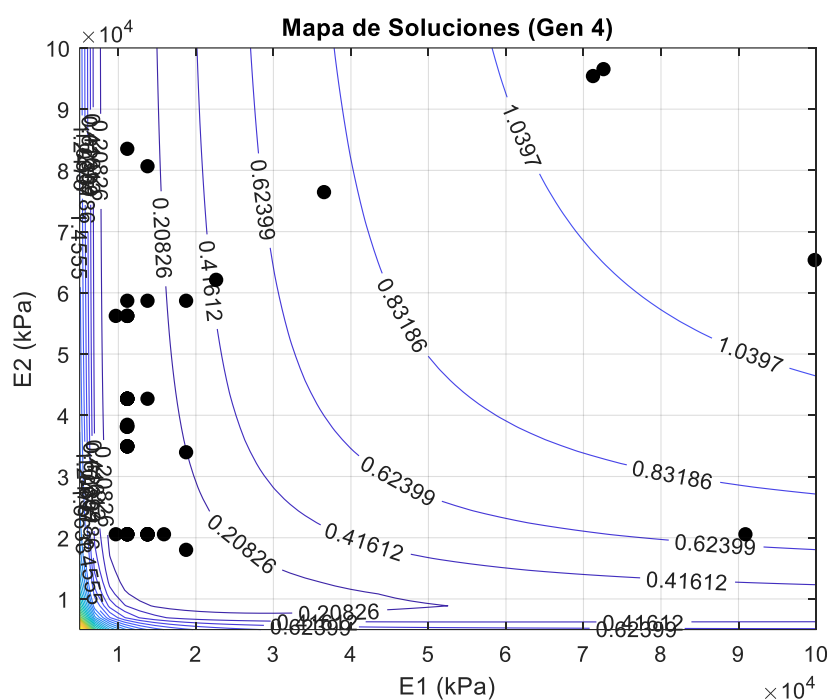


Figura A-290 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 4



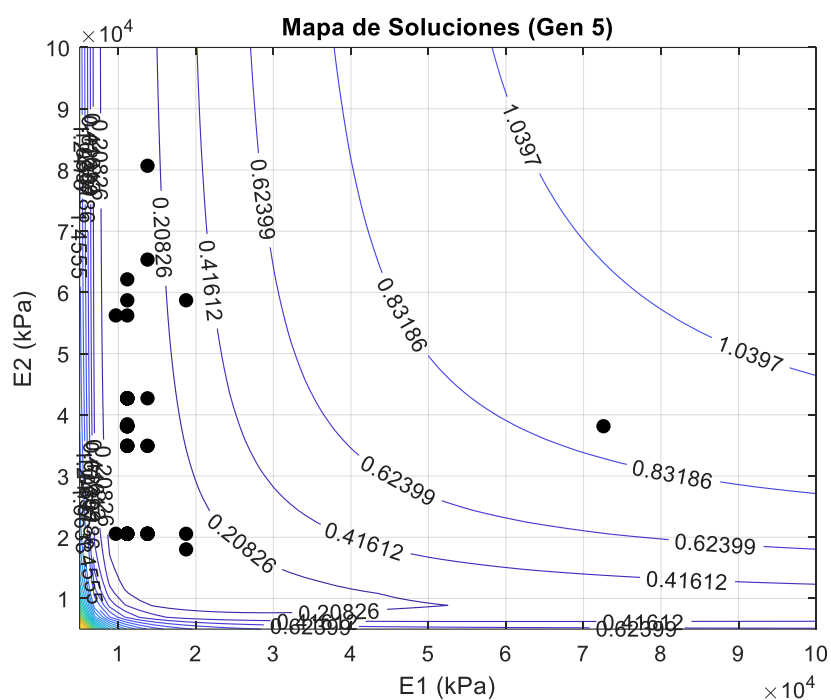


Figura A-291 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 5

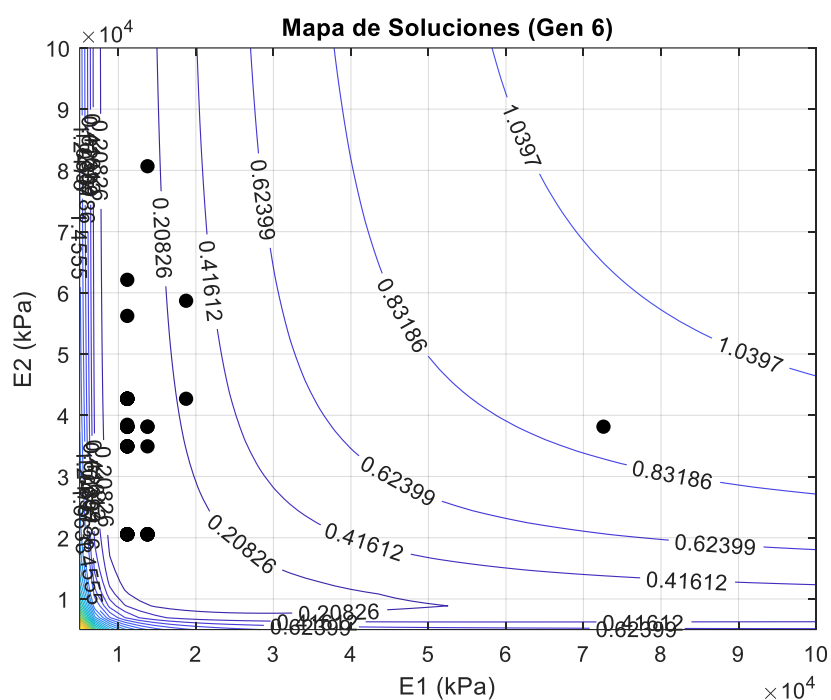


Figura A-292 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 6

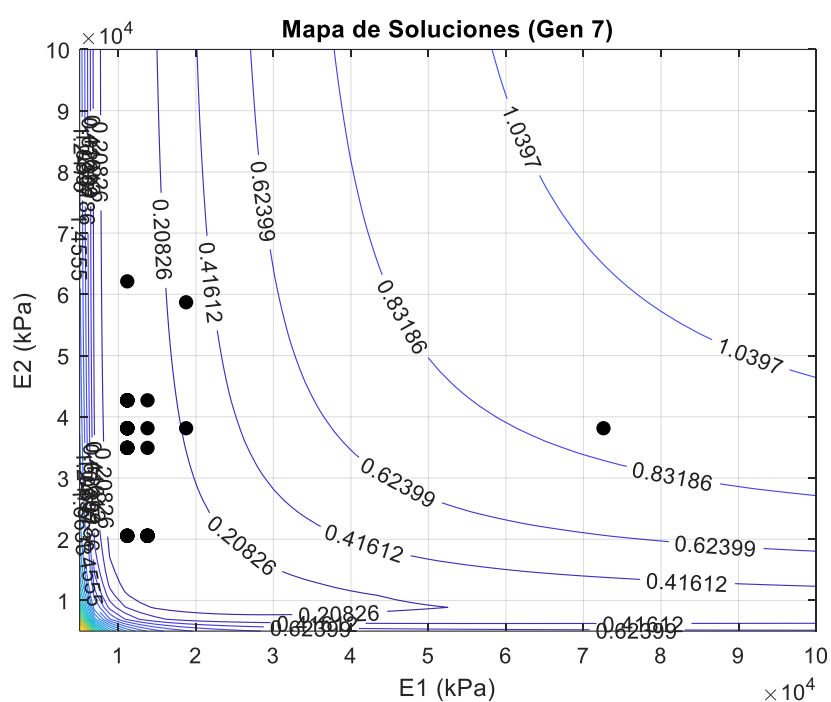


Figura A-293 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 7

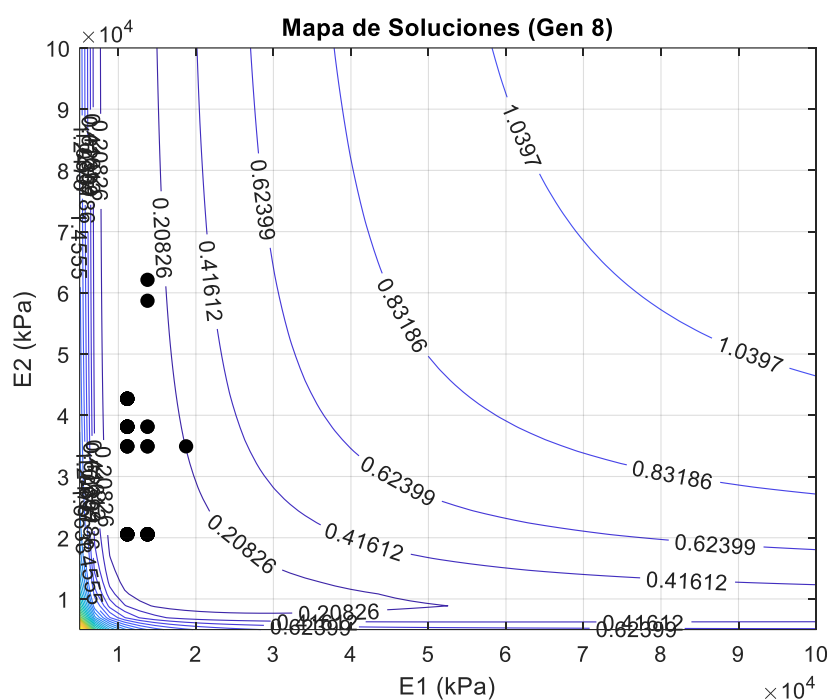


Figura A-294 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 8

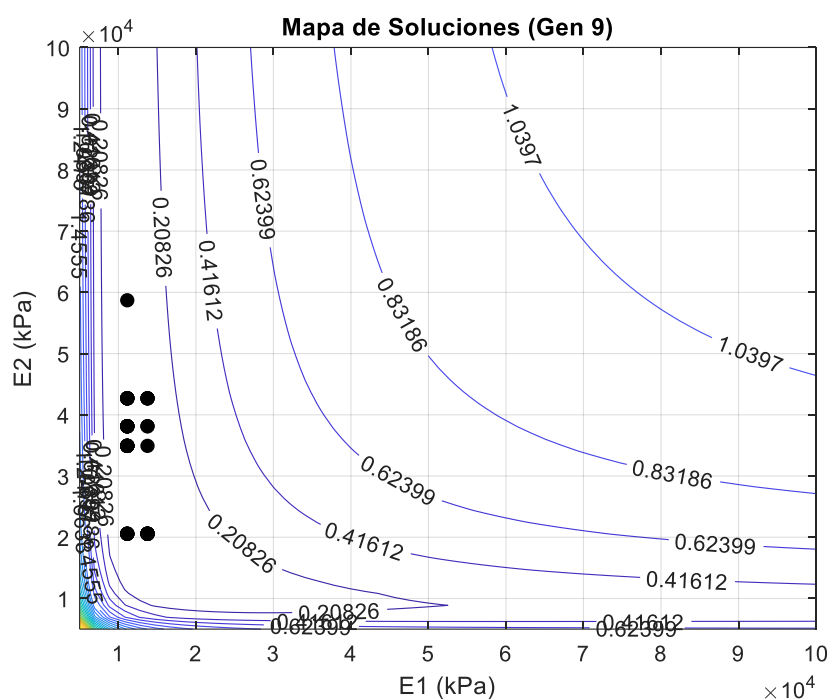


Figura A-295 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 9

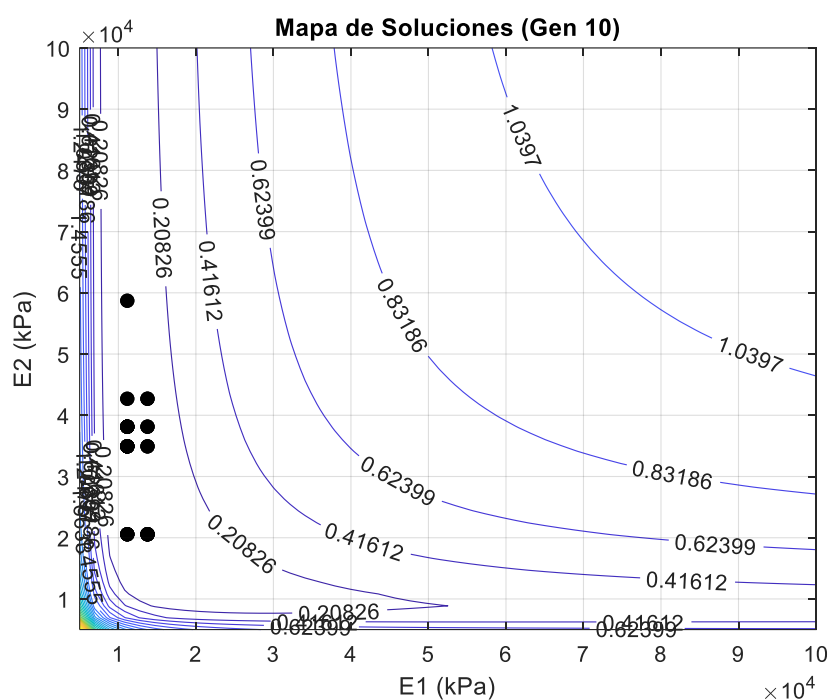


Figura A-296 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 10

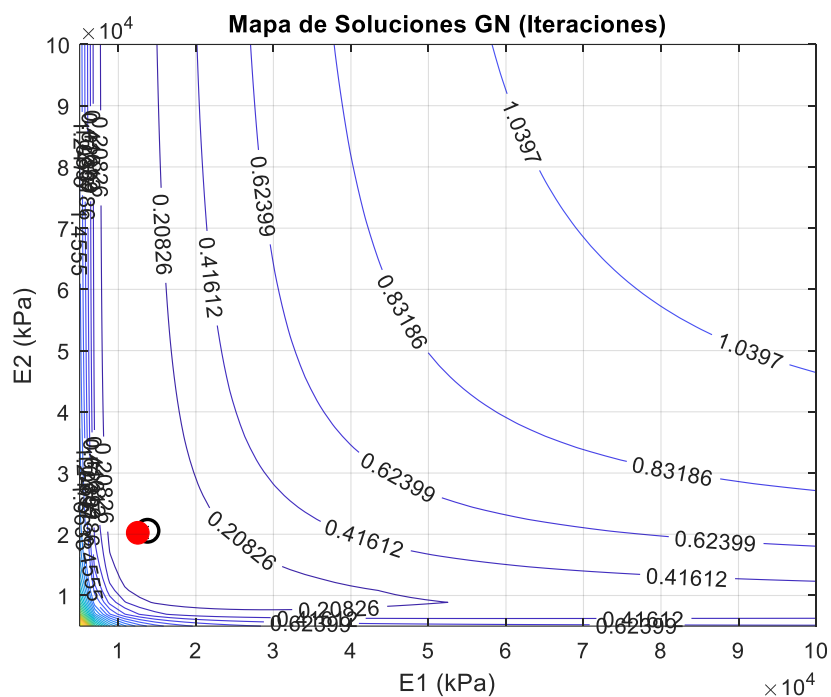


Figura A-297 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

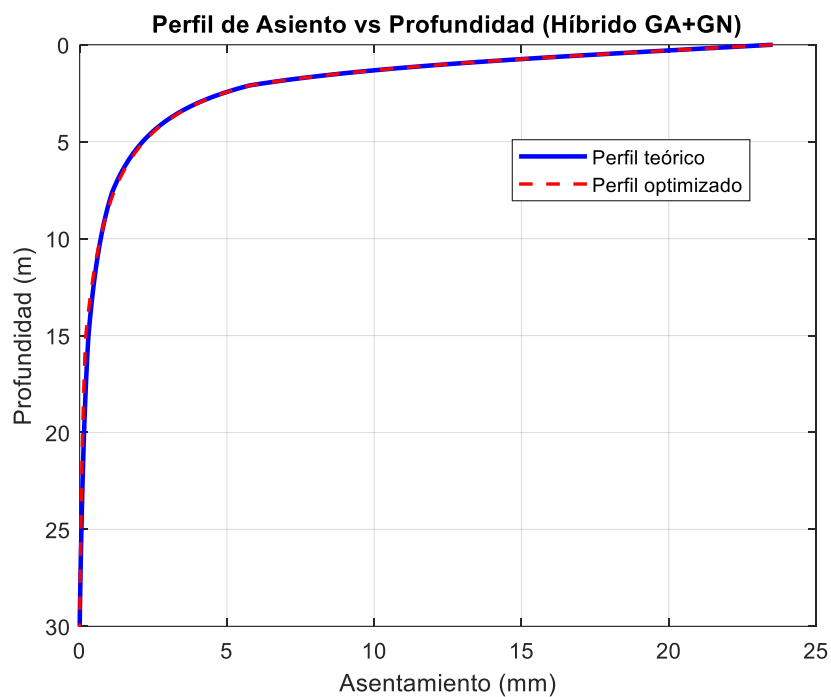


Figura A-298 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido GS+GN sin ruido.



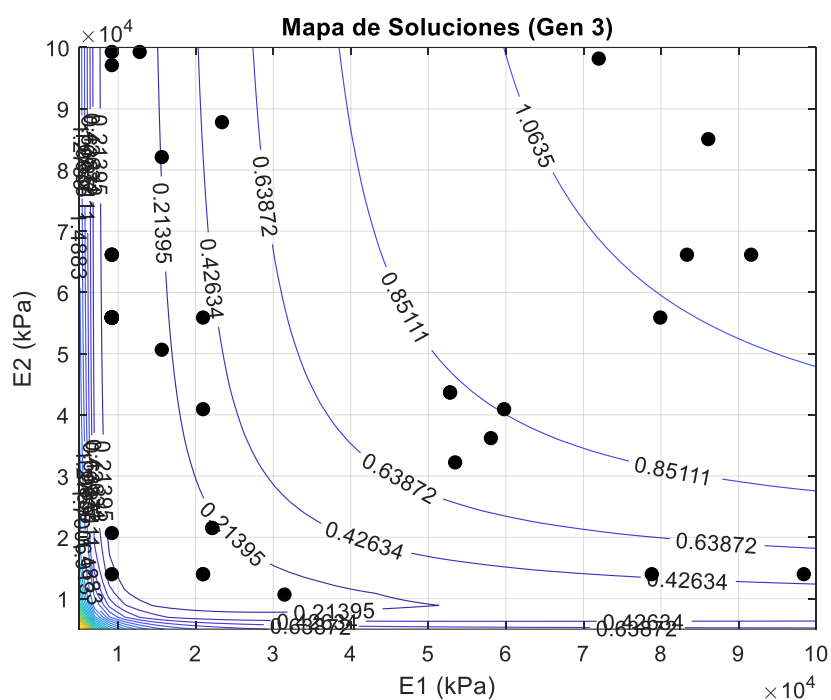


Figura A-301 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 3

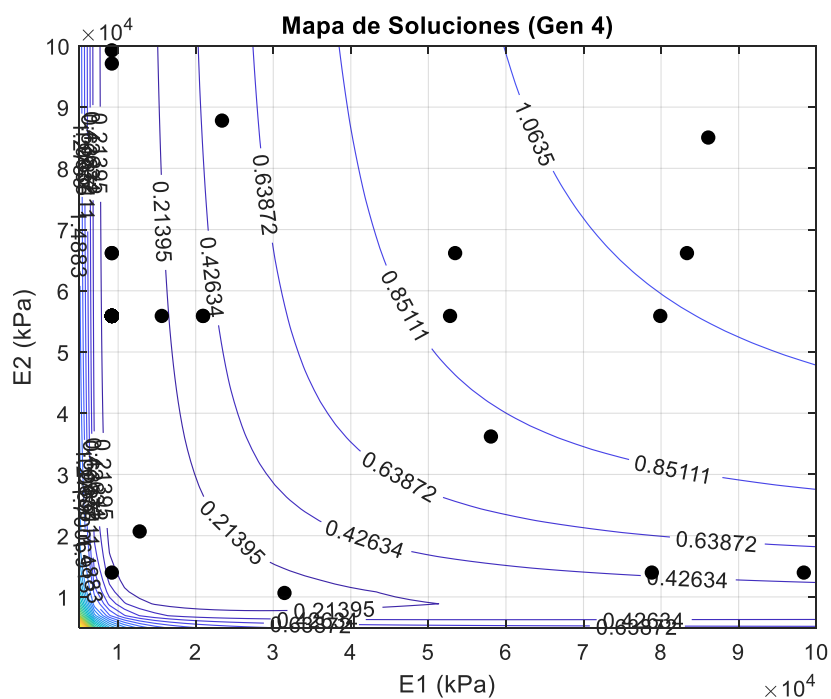


Figura A-302 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.

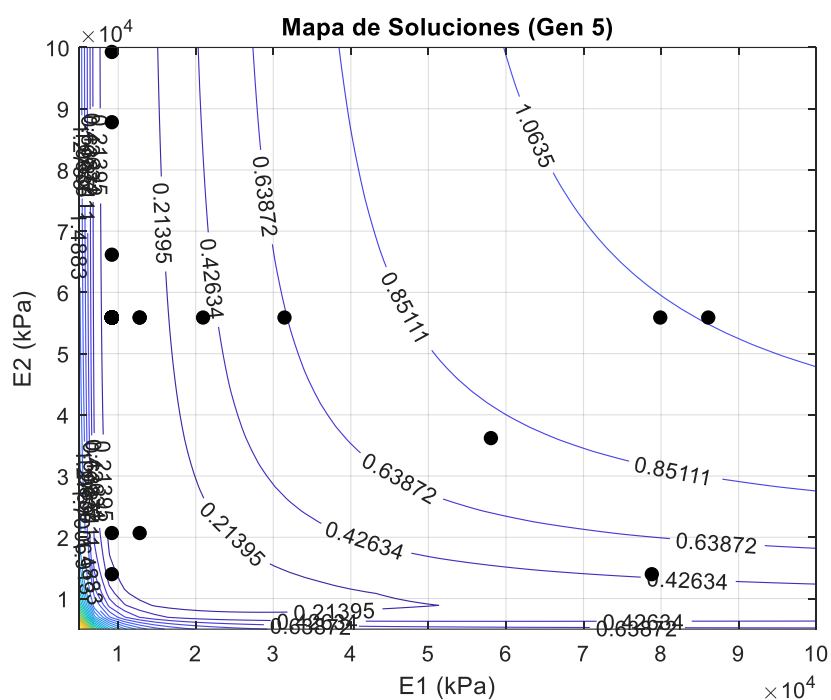


Figura A-303 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 5

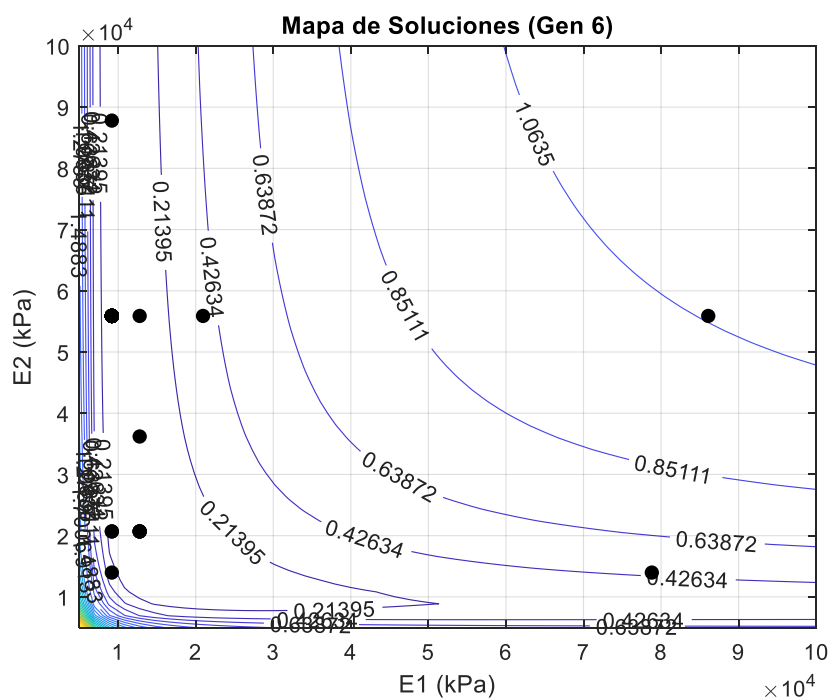


Figura A-304 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 6

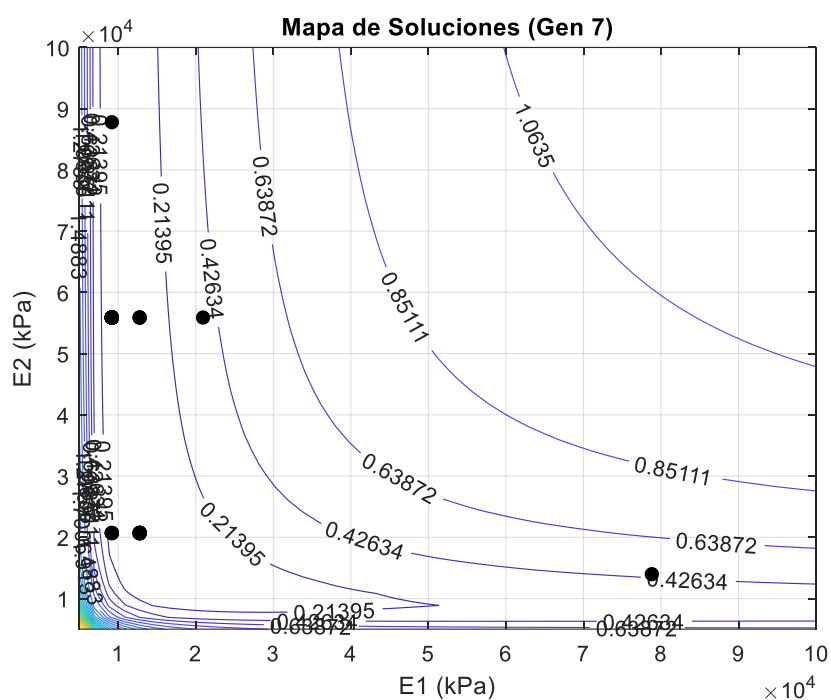


Figura A-305 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 7

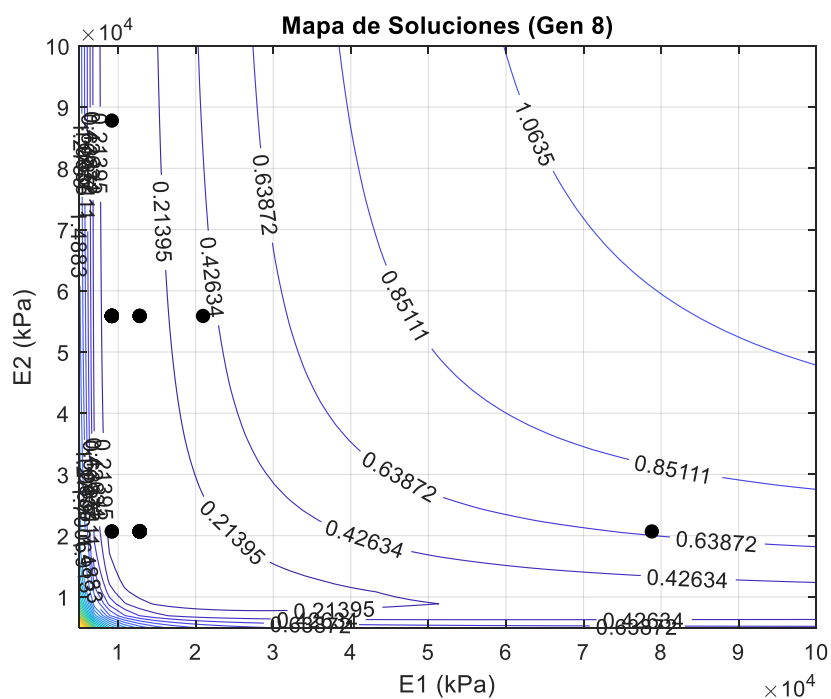


Figura A-306 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 8



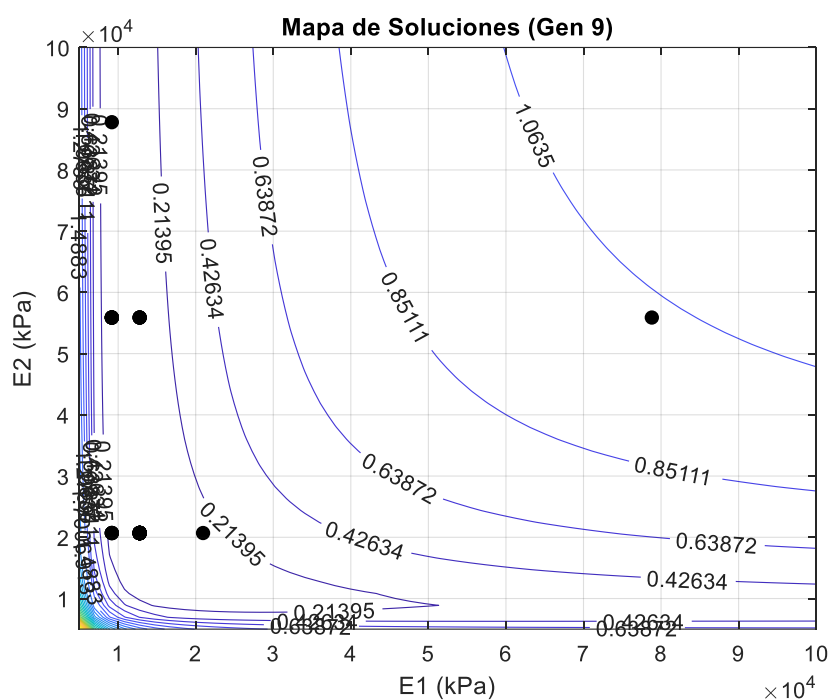


Figura A-307 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 9

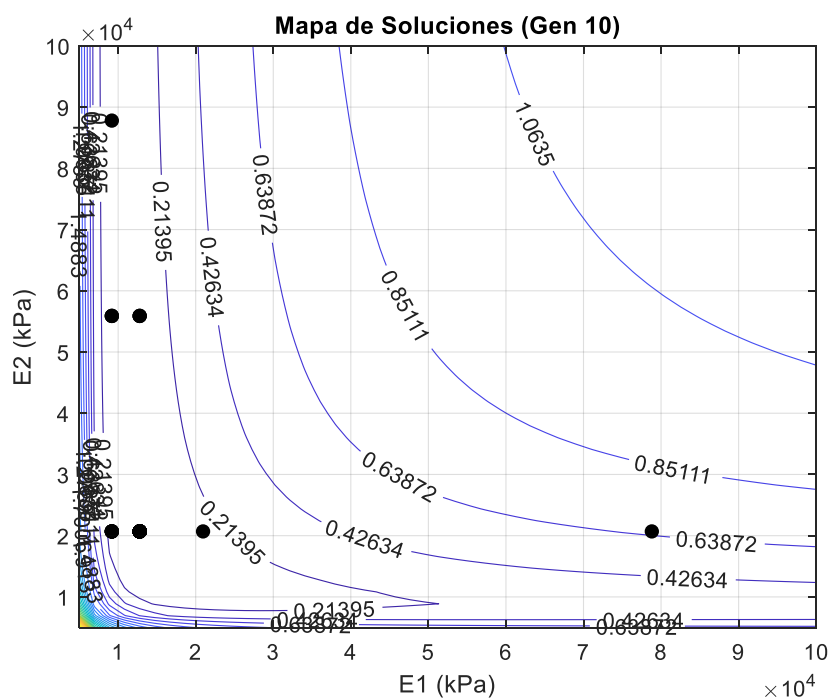


Figura A-308 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple con ruido.  
Generación 10

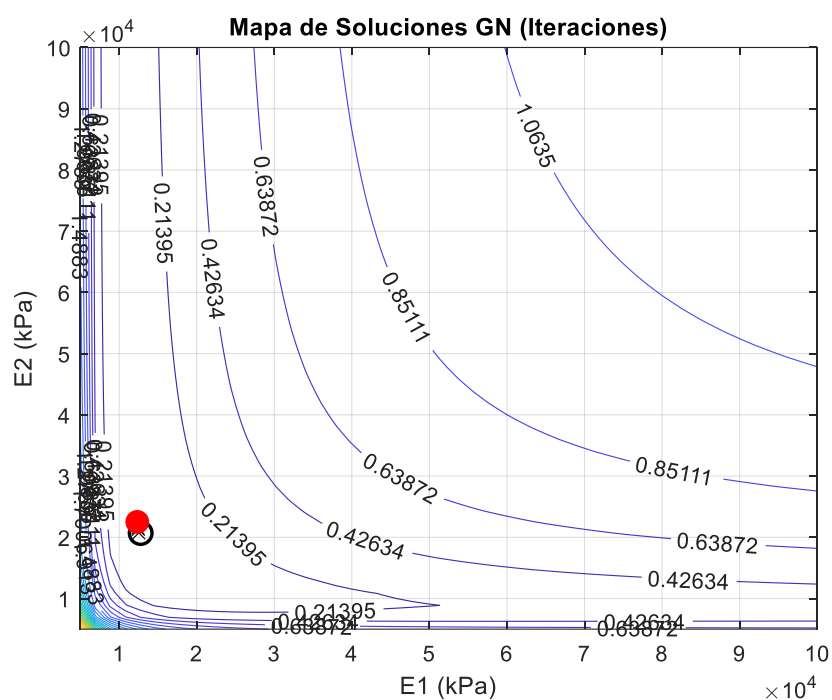


Figura A-309 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

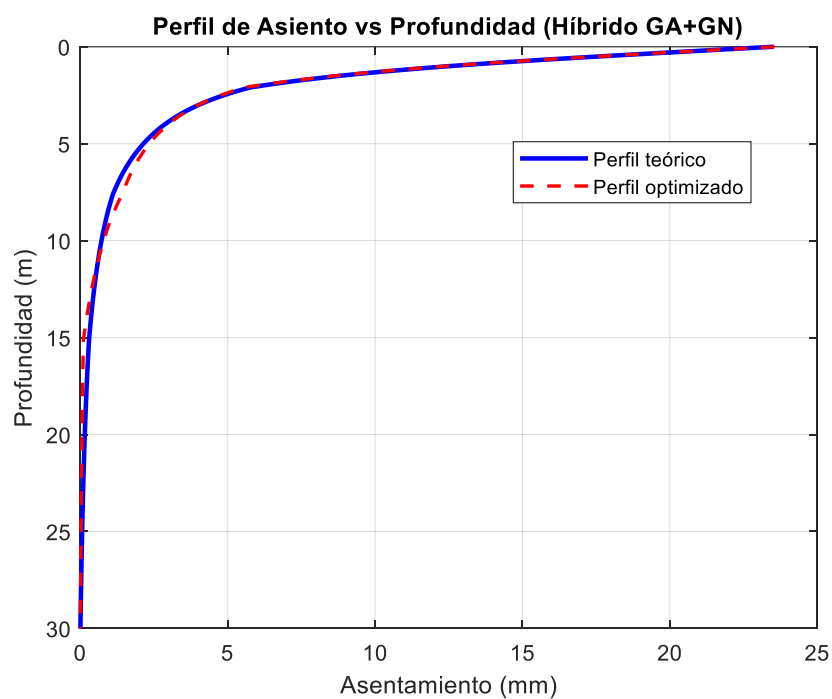


Figura A-310 – Perfil de asiento retrocalculado. Híbrido GS+GN con ruido.

### 12.7.3 Genético simple con LM – Sin ruido

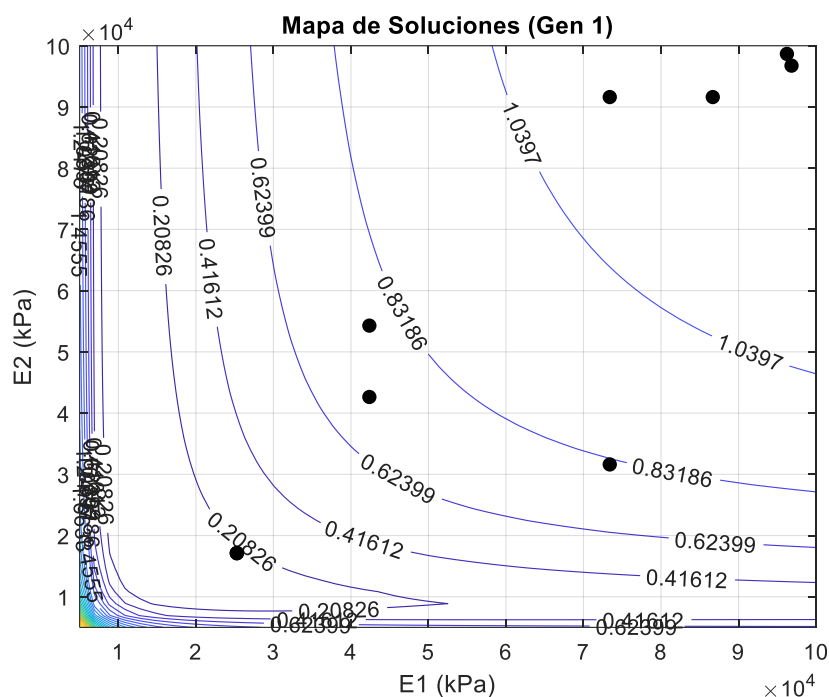


Figura A-311 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 1

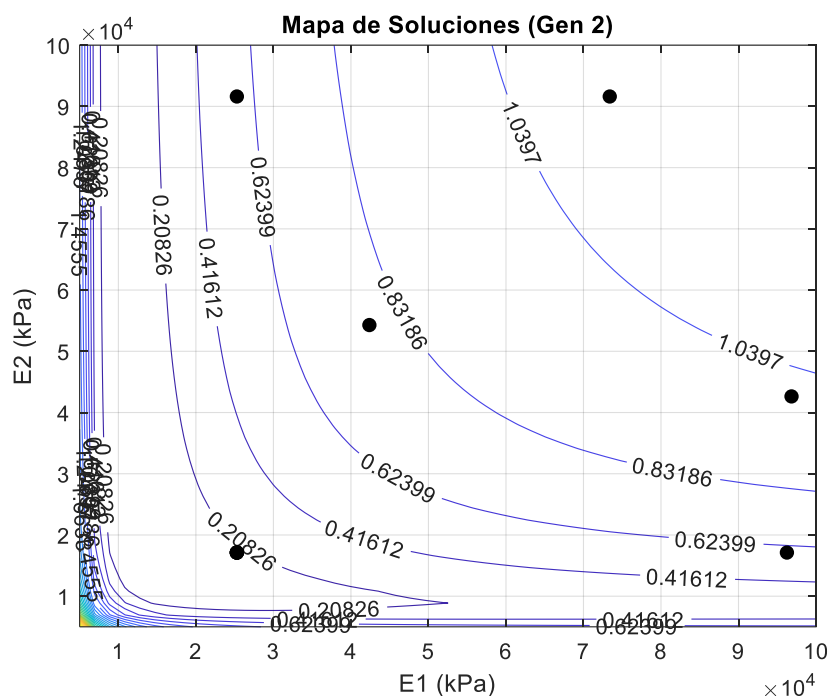


Figura A-312 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido. Generación 2

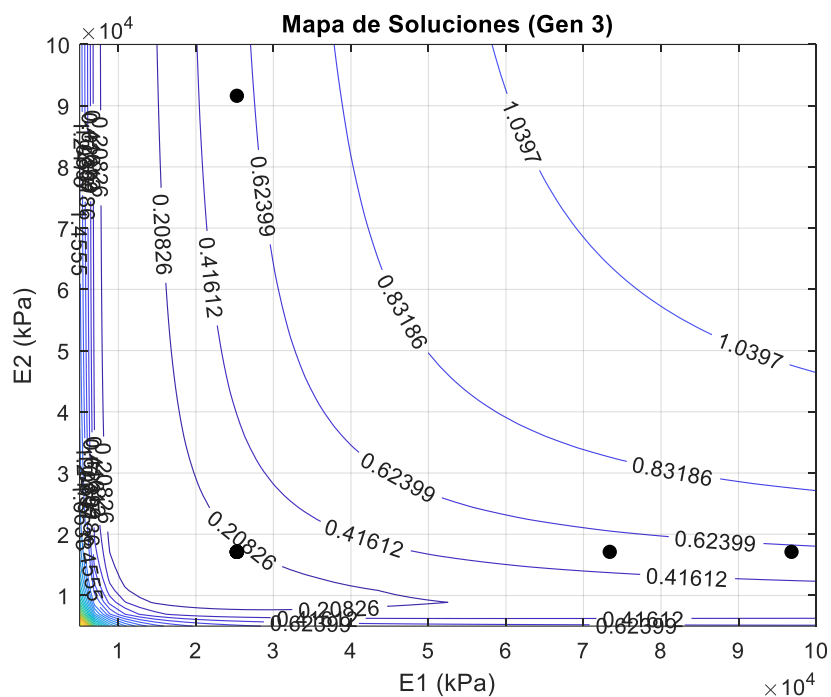


Figura A-313 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 3

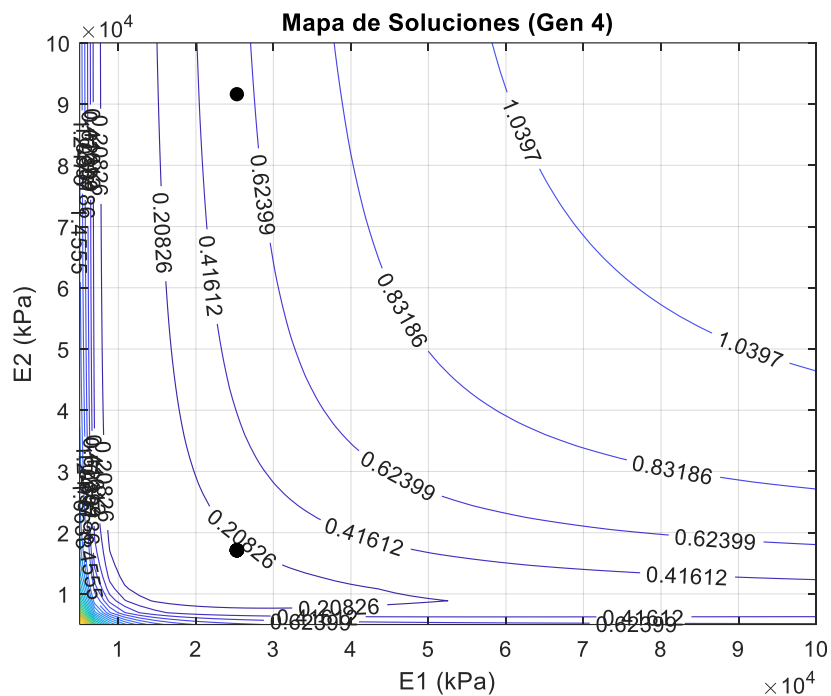


Figura A-314 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 4

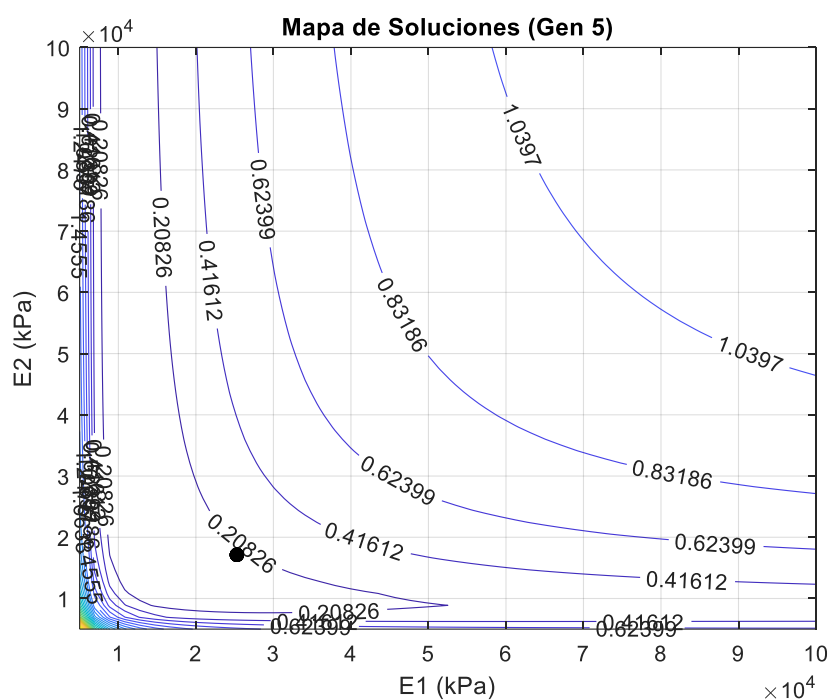


Figura A-315 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 5

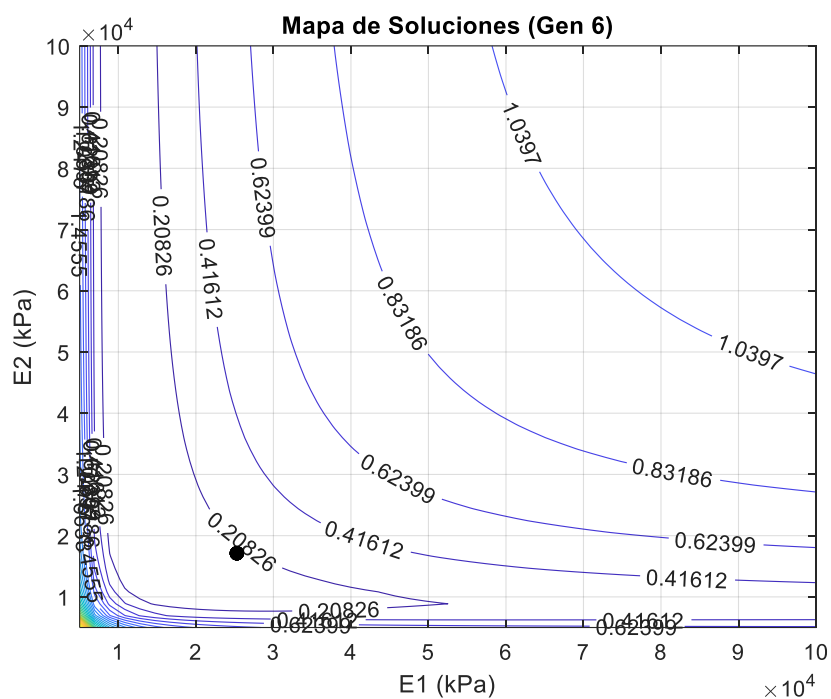


Figura A-316 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 6

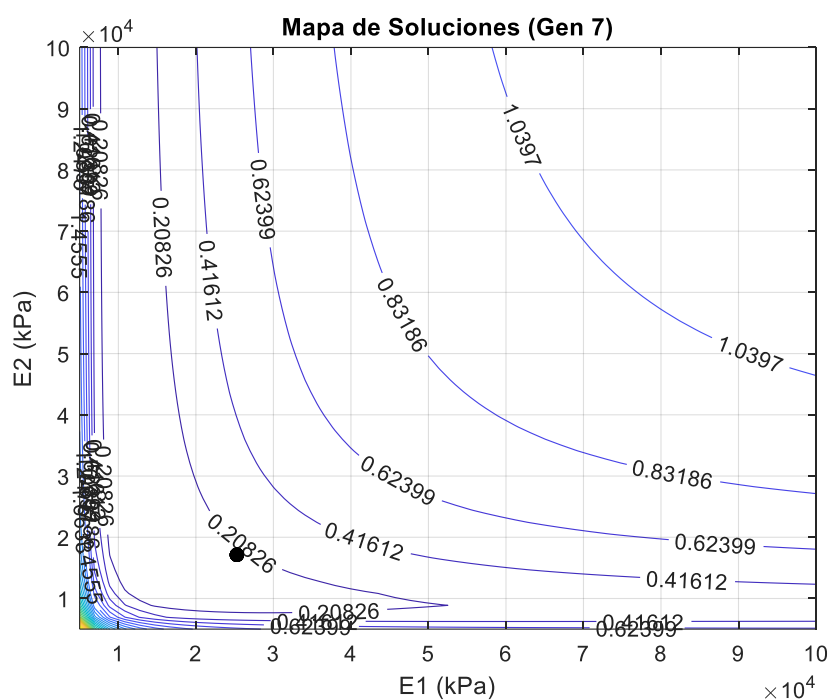


Figura A-317 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 7

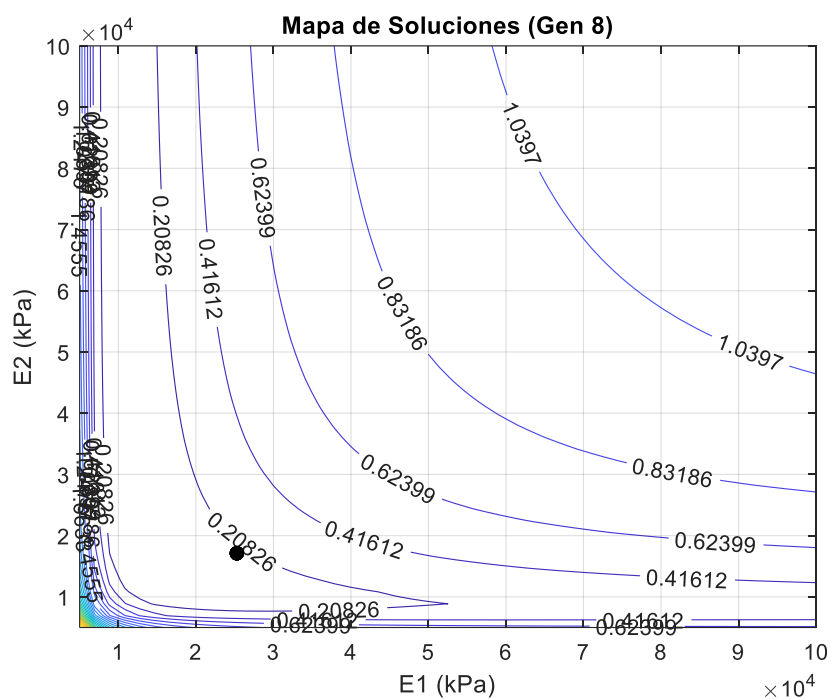


Figura A-318 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 8

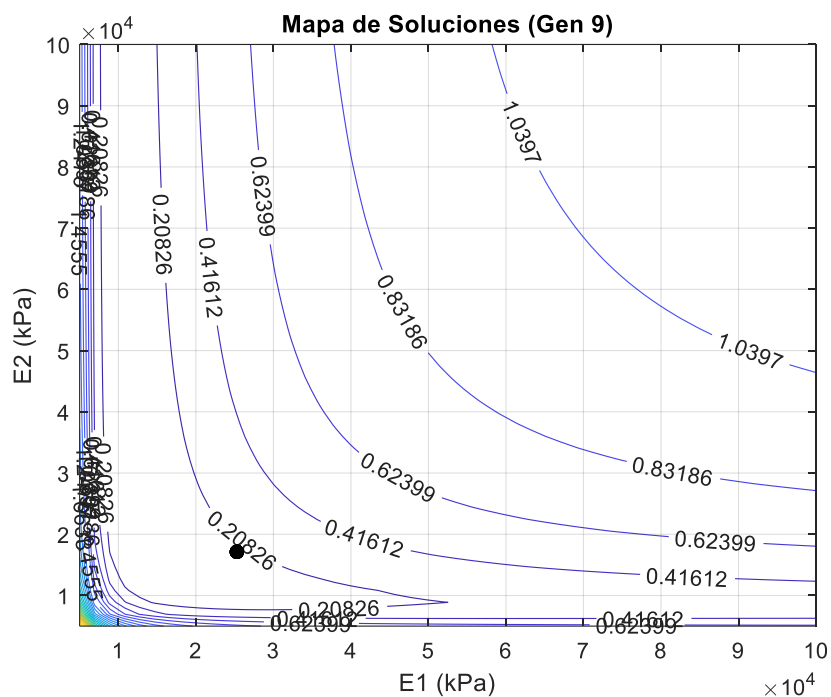


Figura A-319 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 9

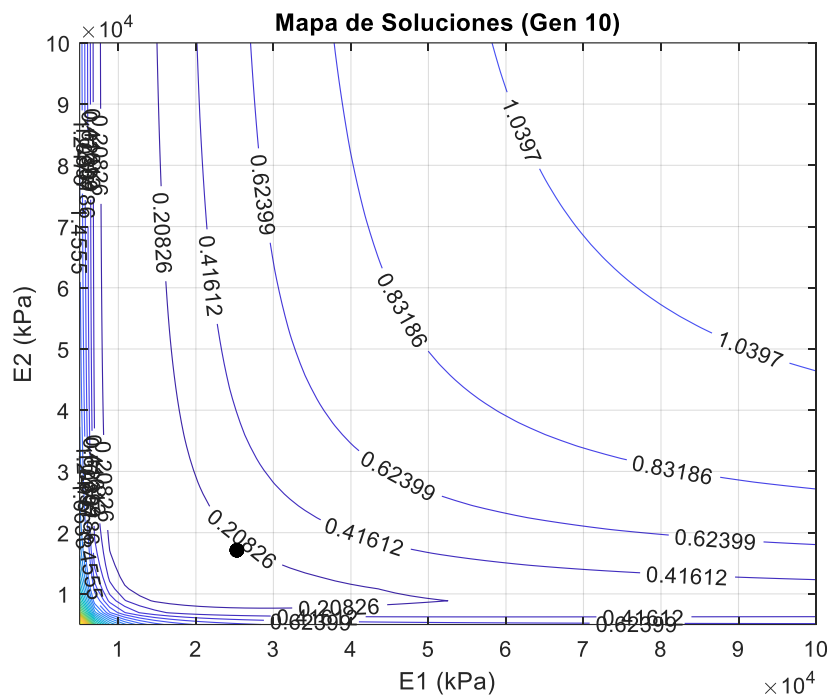


Figura A-320 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético simple sin ruido.  
Generación 10

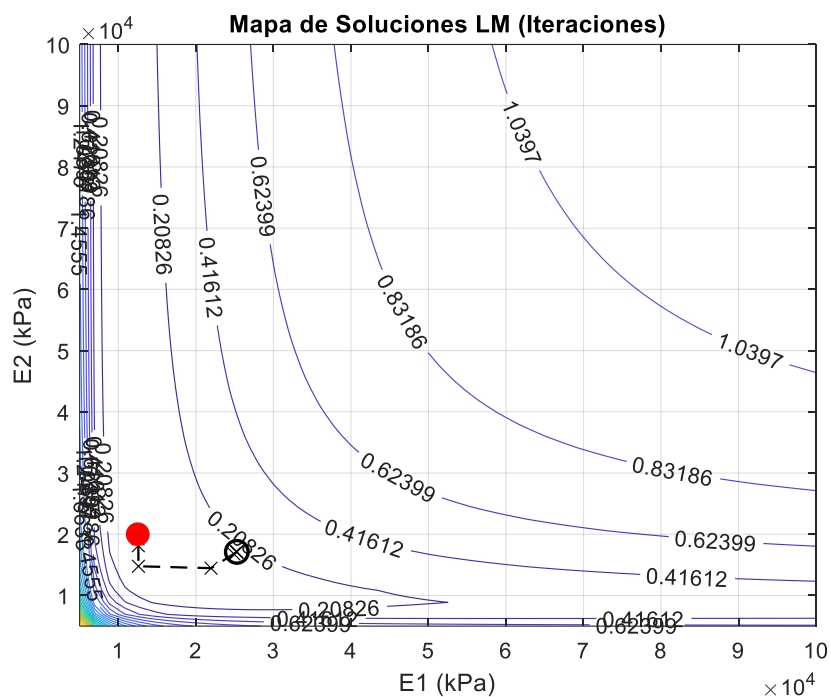


Figura A-321 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido.

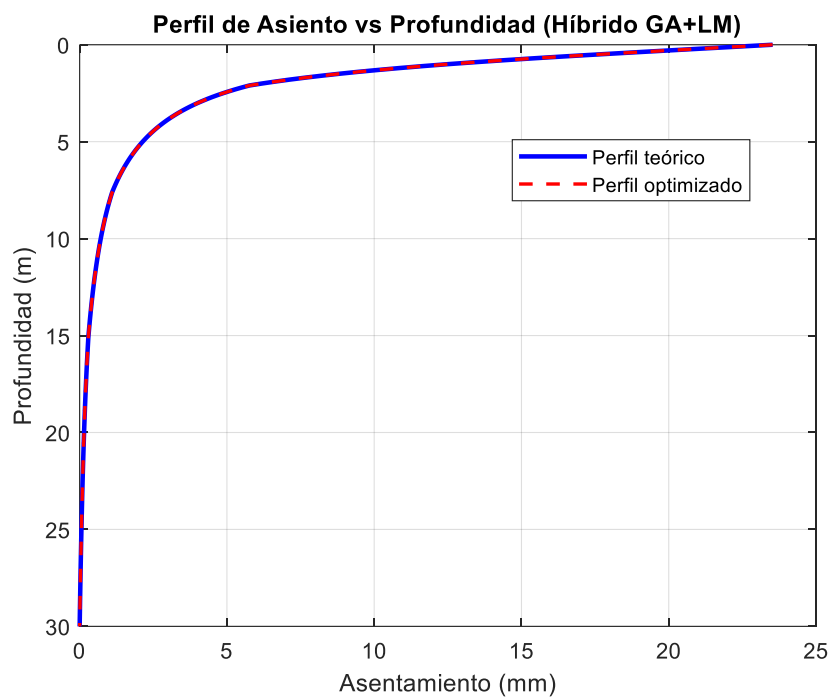


Figura A-322 – Perfil de asiento retrocalculado. Híbrido GS + LM sin ruido.



### 12.7.4 Genético Adaptativo con GN o LN – Sin ruido

El algoritmo de búsqueda global considera una población de 50 individuos con un máximo de 50 generaciones, seguido del refinamiento en la fase local.

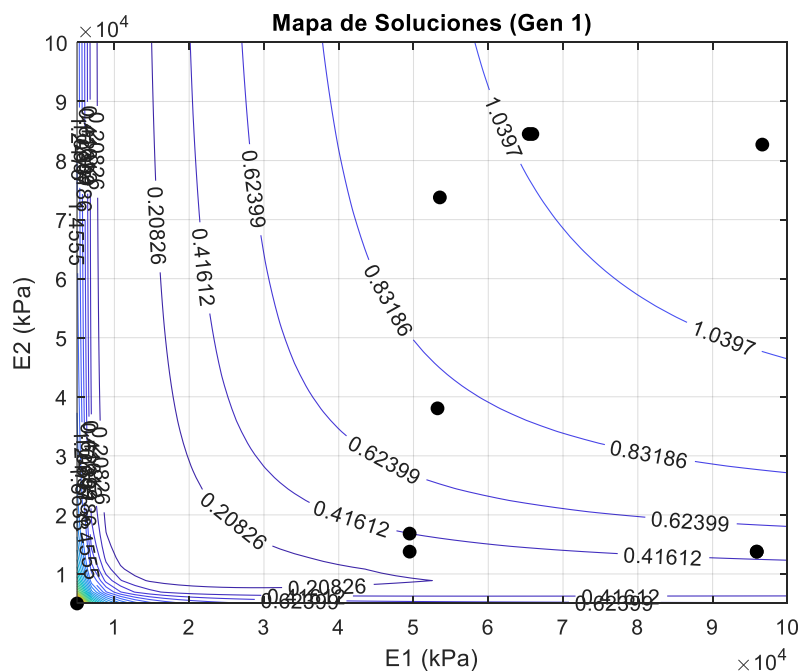


Figura A-323 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 1

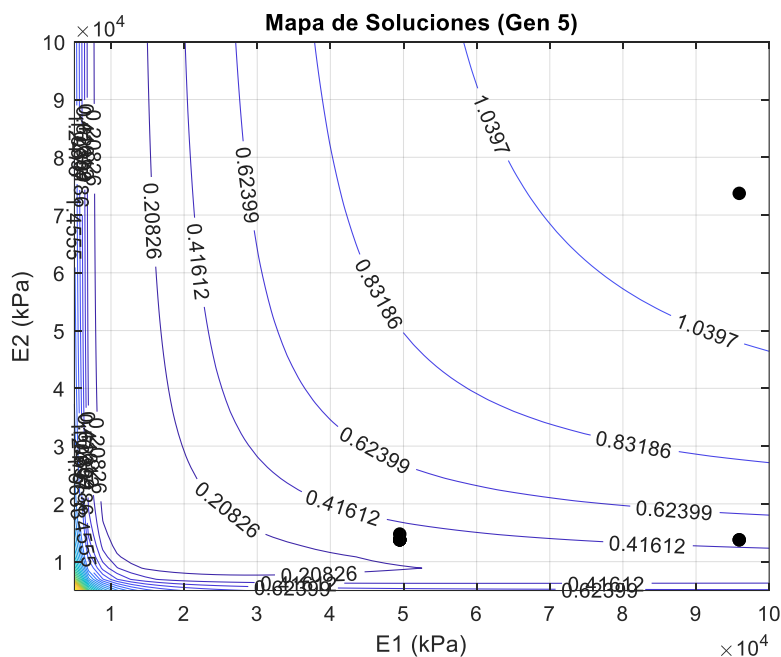


Figura A-324 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 5

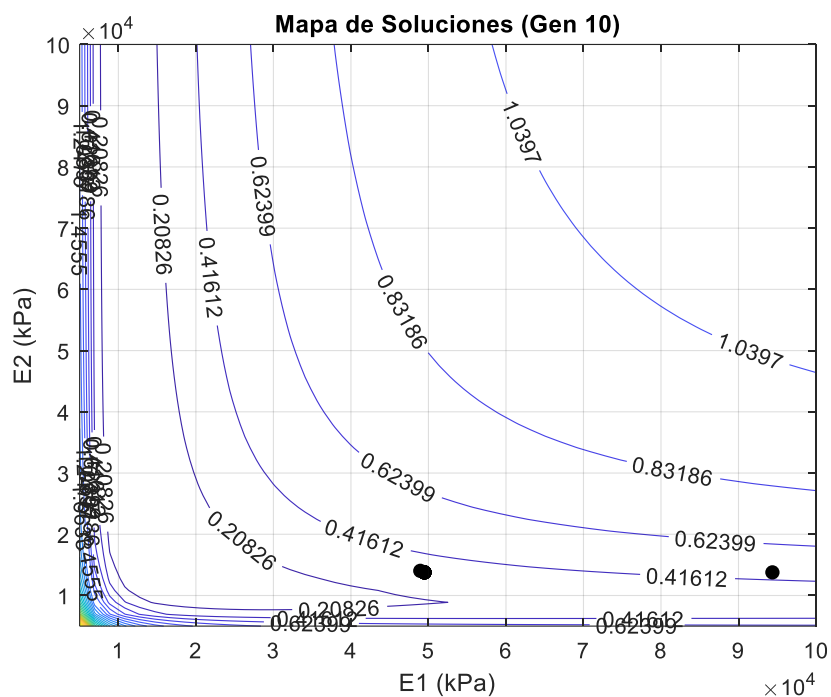


Figura A-325 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo sin ruido. Generación 10

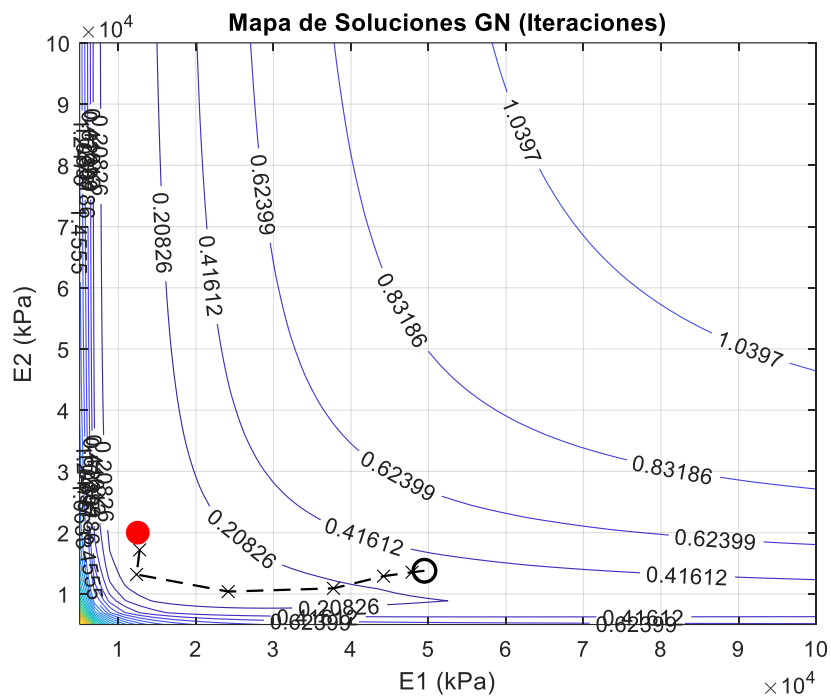


Figura A-326 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. GN sin ruido.

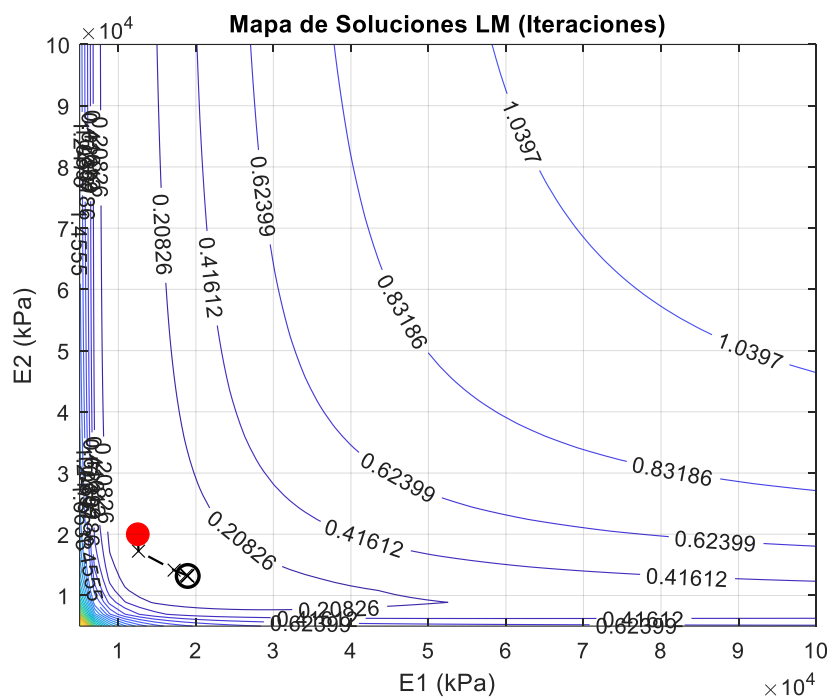


Figura A-327 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido.

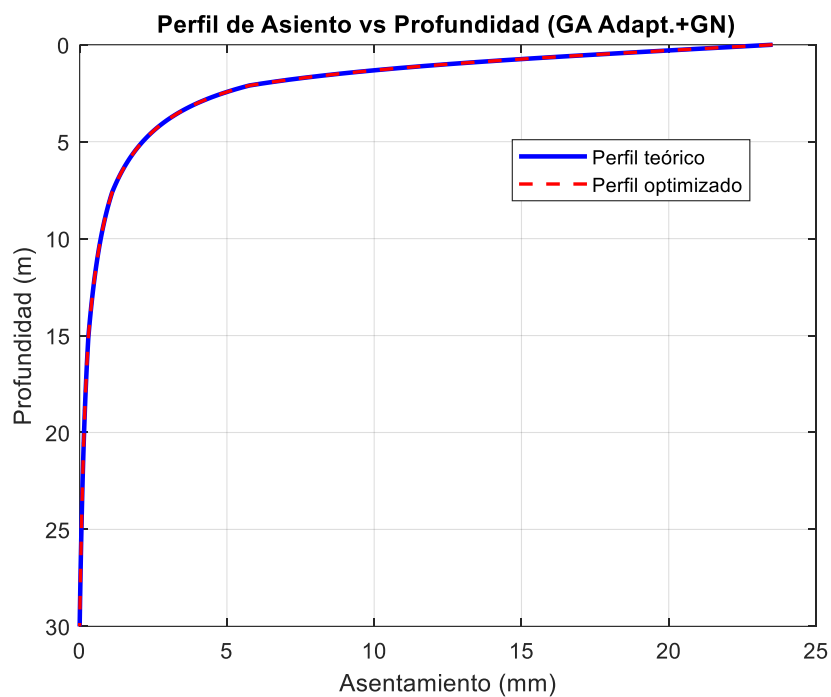


Figura A-328 – Perfil de asiento retrocalculado. Híbrido GA + GN sin ruido.

### 12.7.5 Genético Adaptativo con GN o LN – Con ruido

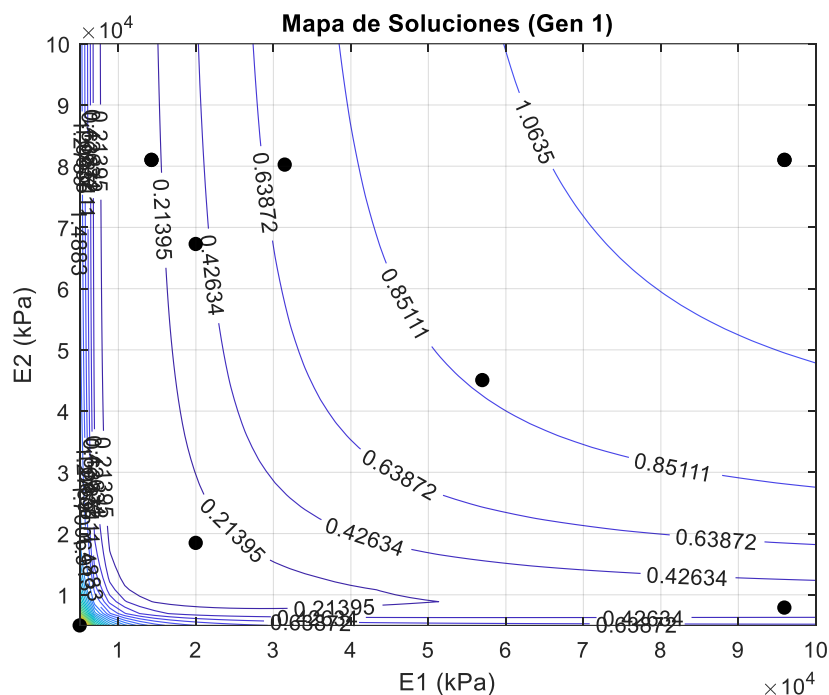


Figura A-329 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 1

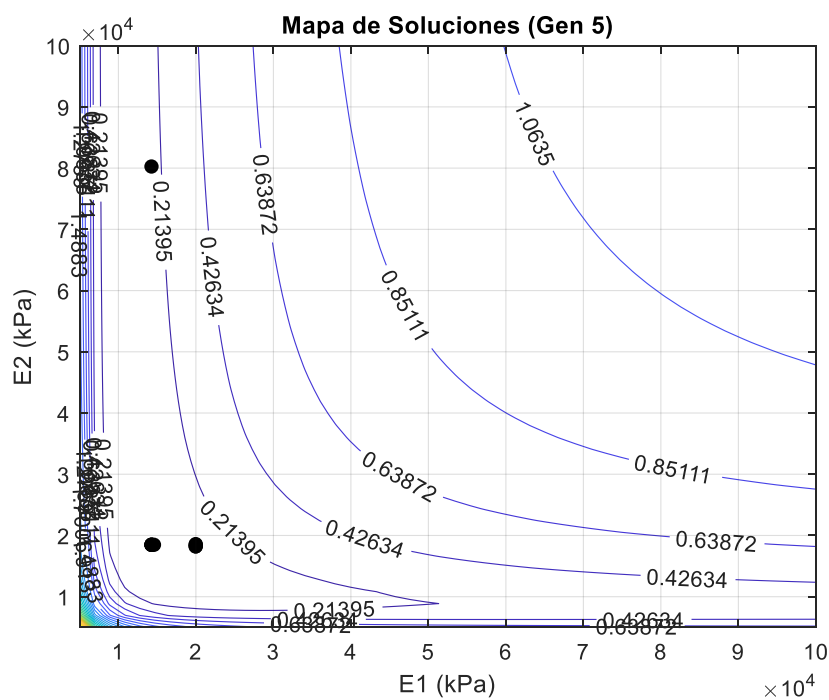


Figura A-330 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 5

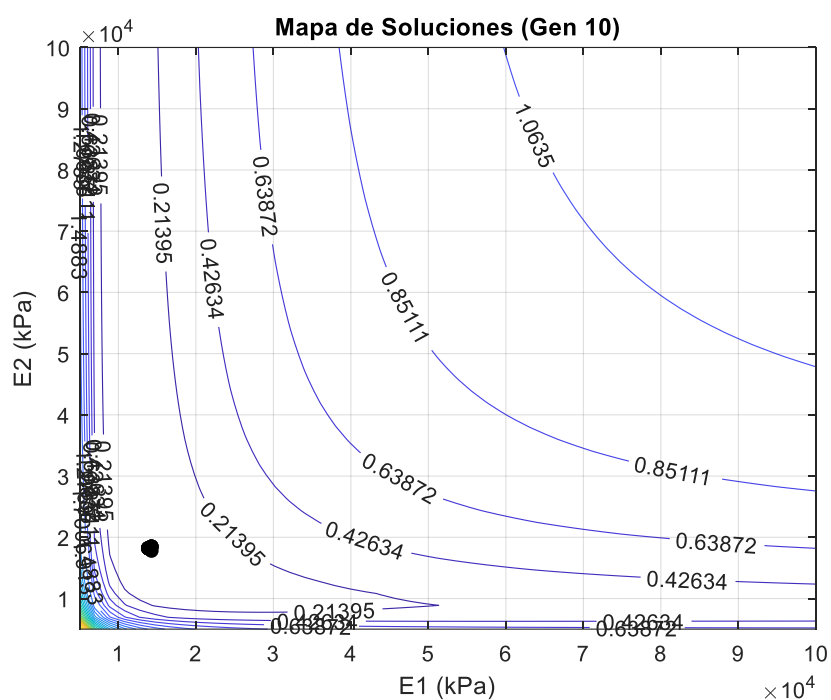


Figura A-331 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Algoritmo genético adaptativo con ruido. Generación 10

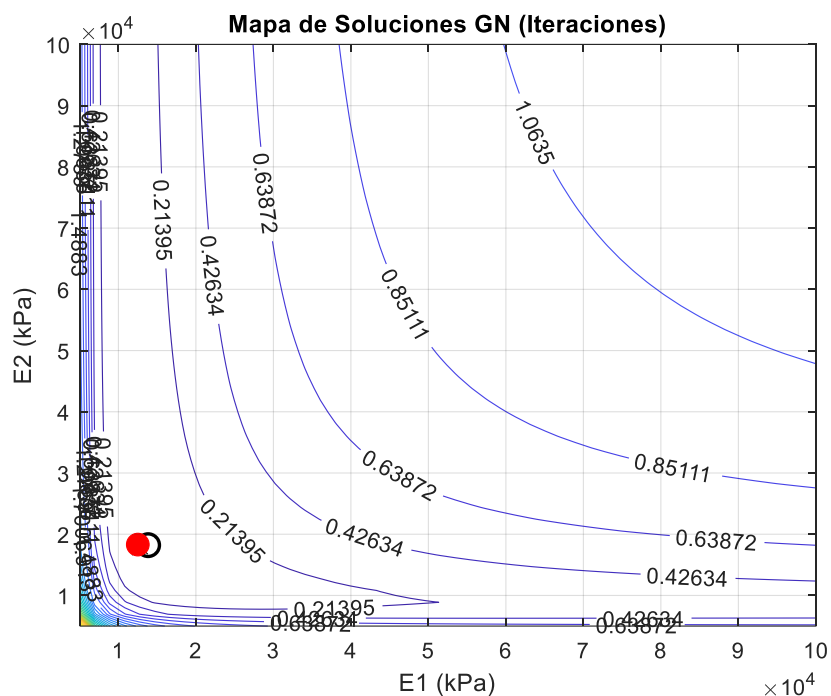


Figura A-332 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. GN con ruido.

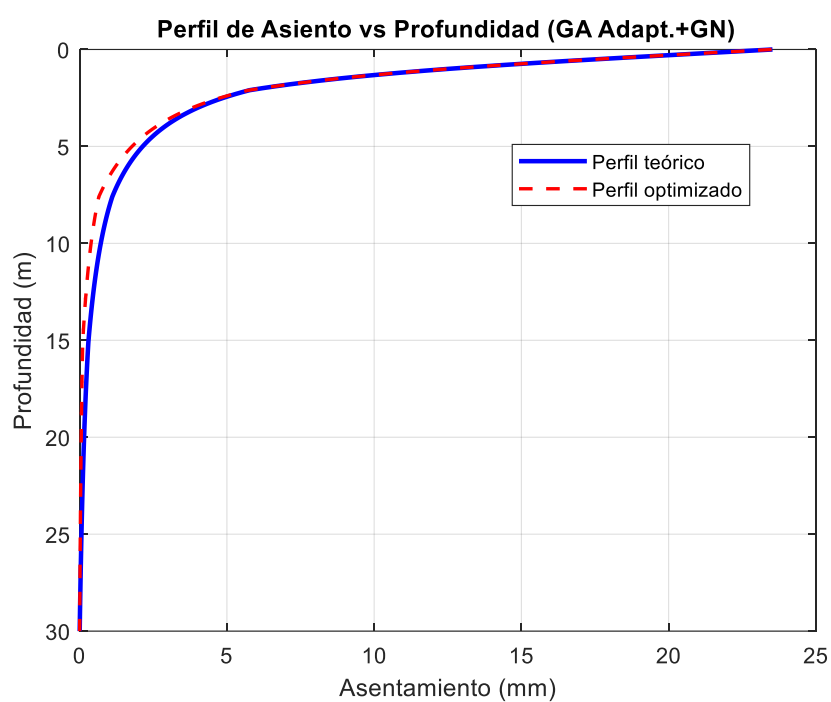


Figura A-333 – Perfil de asiento retrocalculado. Híbrido GA + GN con ruido.

### 12.7.6 Enjambre de partículas (PSO) con GN o LN – Sin ruido

El algoritmo de búsqueda global considera una población de 50 partículas con un máximo de 10 generaciones, seguido del refinamiento en la fase local.

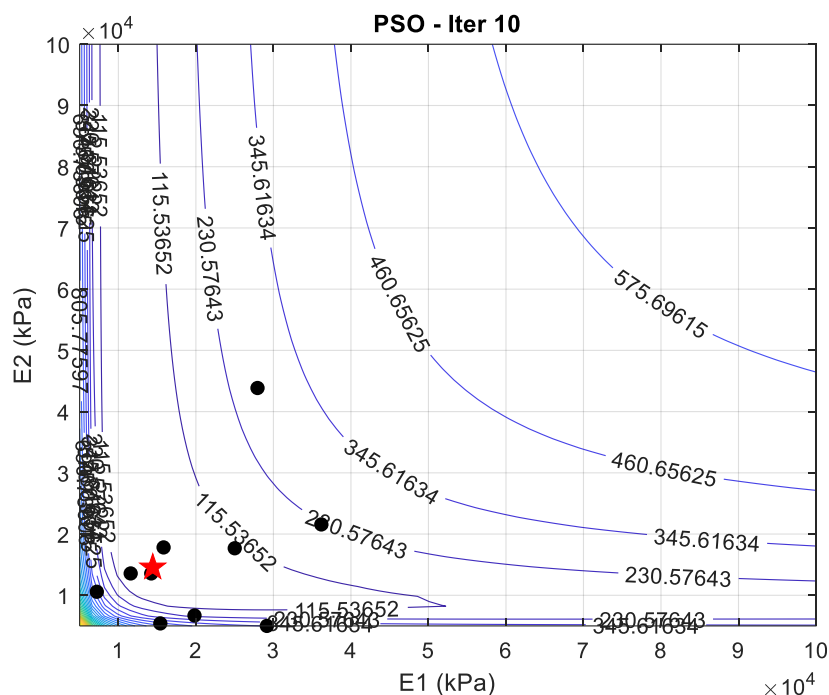


Figura A-334 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. PSO sin ruido. Generación 10

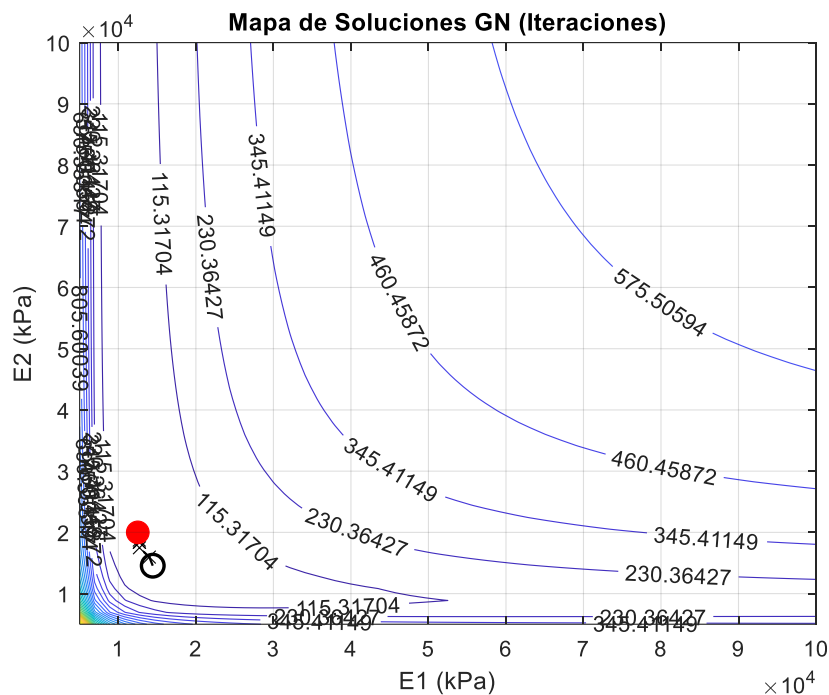


Figura A-335 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

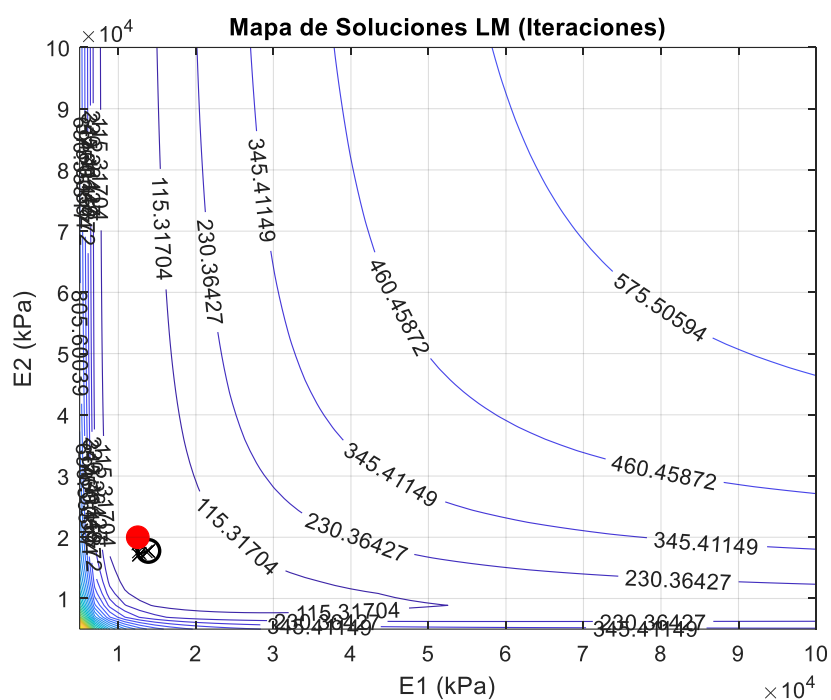


Figura A-336 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido.

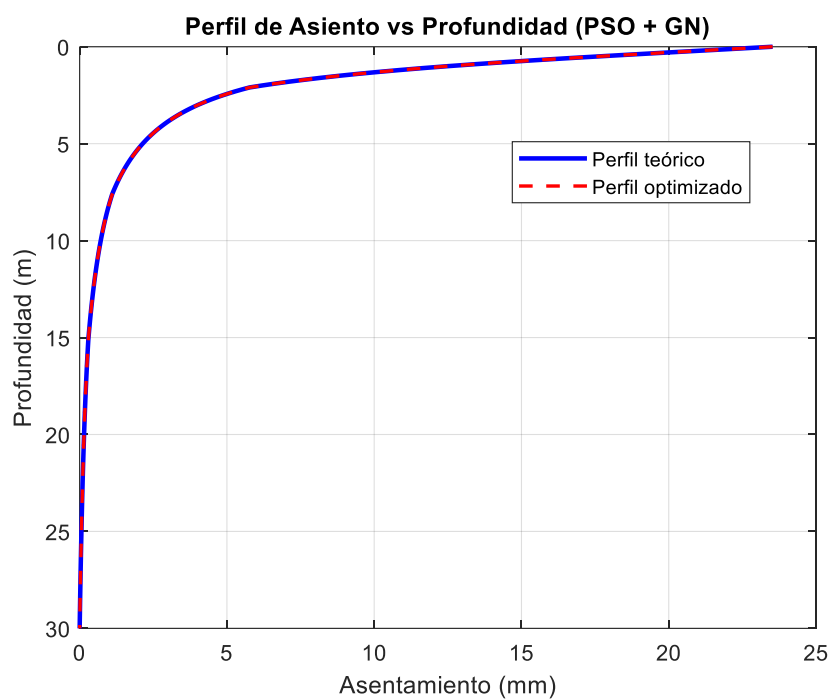


Figura A-337 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido PSO+GN sin ruido.



### 12.7.7 Enjambre de partículas (PSO) con GN o LN – Con ruido

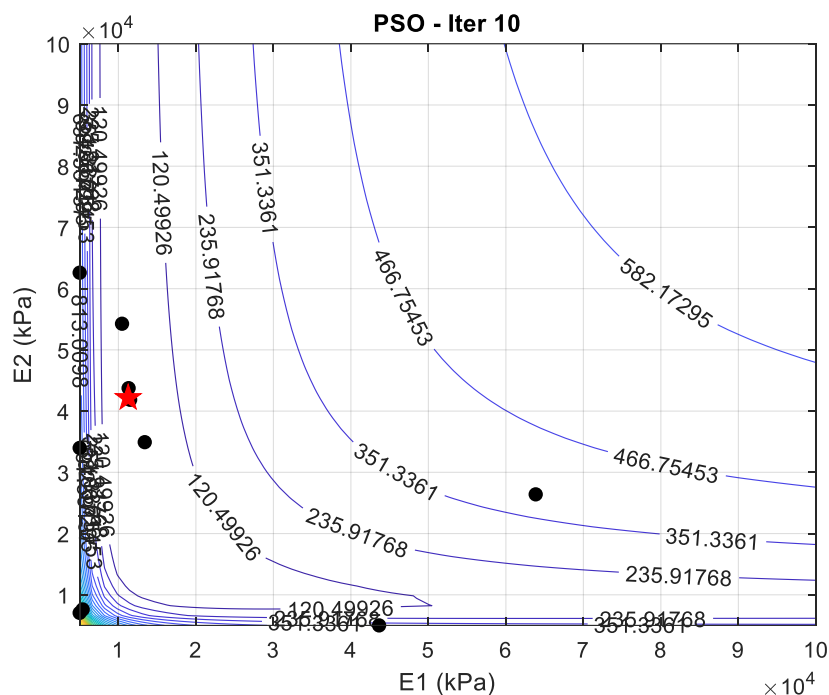


Figura A-338 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. PSO con ruido. Generación 10

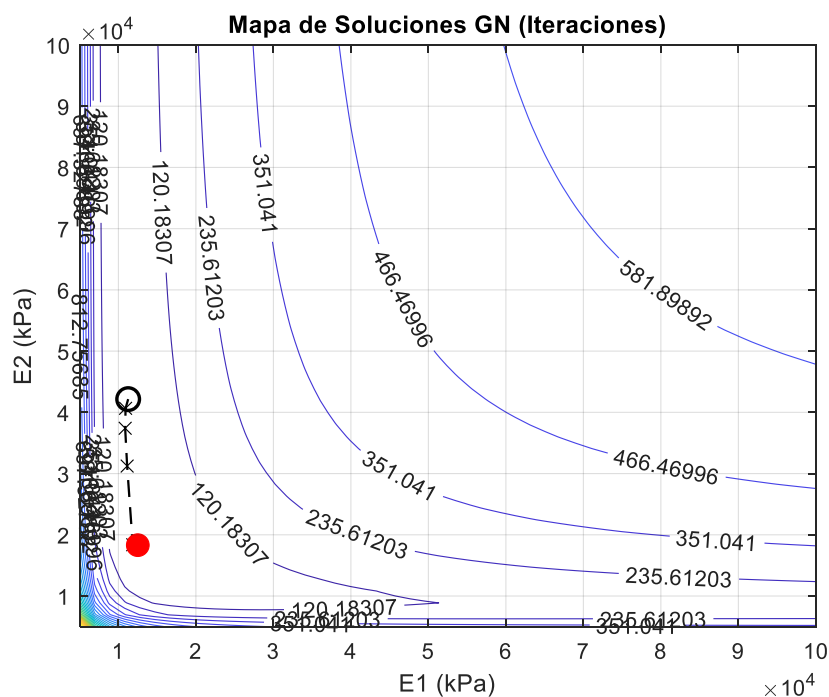


Figura A-339 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

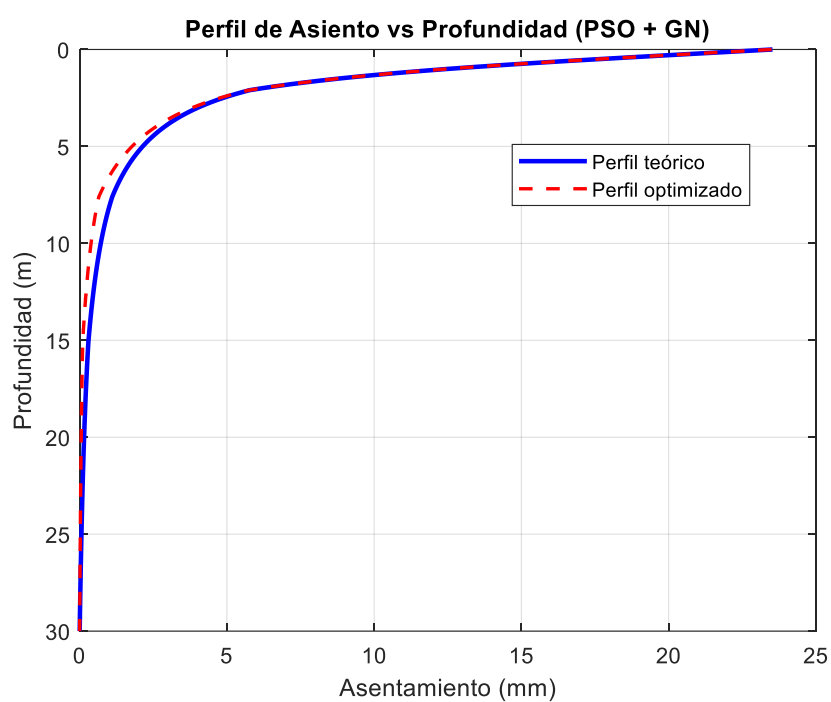


Figura A-340 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido PSO+GN con ruido.

### 12.7.8 Evolución Diferencias (DE) con GN o LN – Sin ruido

La fase global considera una población con un tamaño de 10, un máximo de 10 generaciones, un factor de mutación de 0.8 y probabilidad de cruce de 0.9. La fase local considera la mejor posición de la búsqueda global.

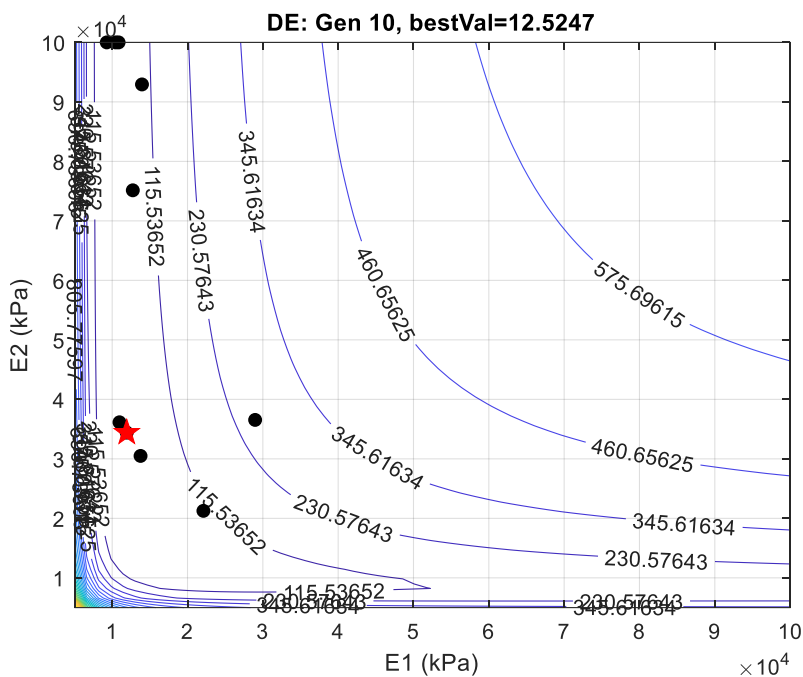


Figura A-341 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. DE sin ruido. Generación 10

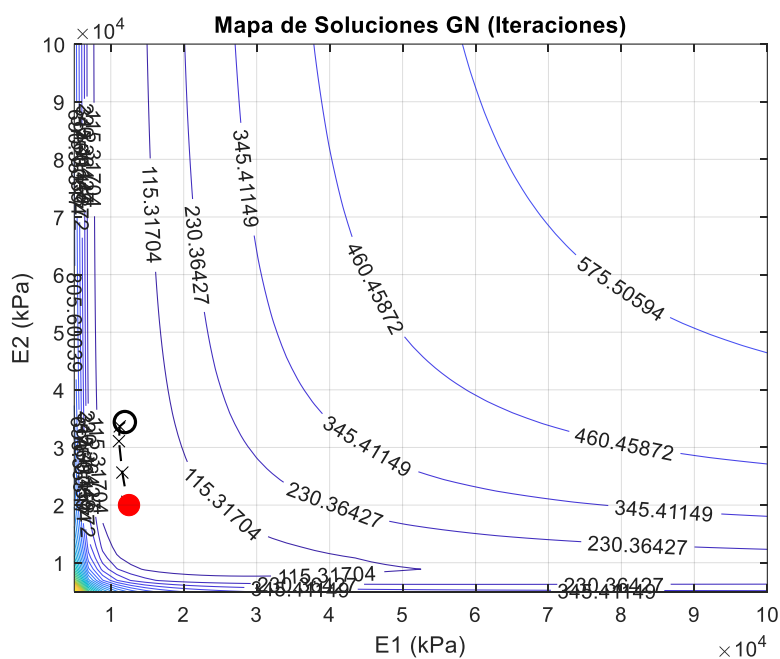


Figura A-342 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

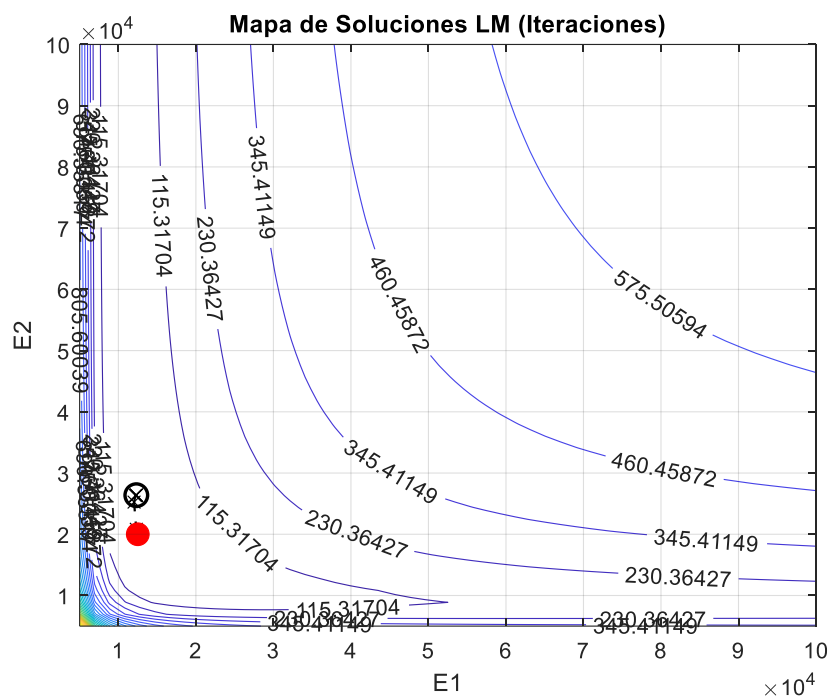


Figura A-343 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido.

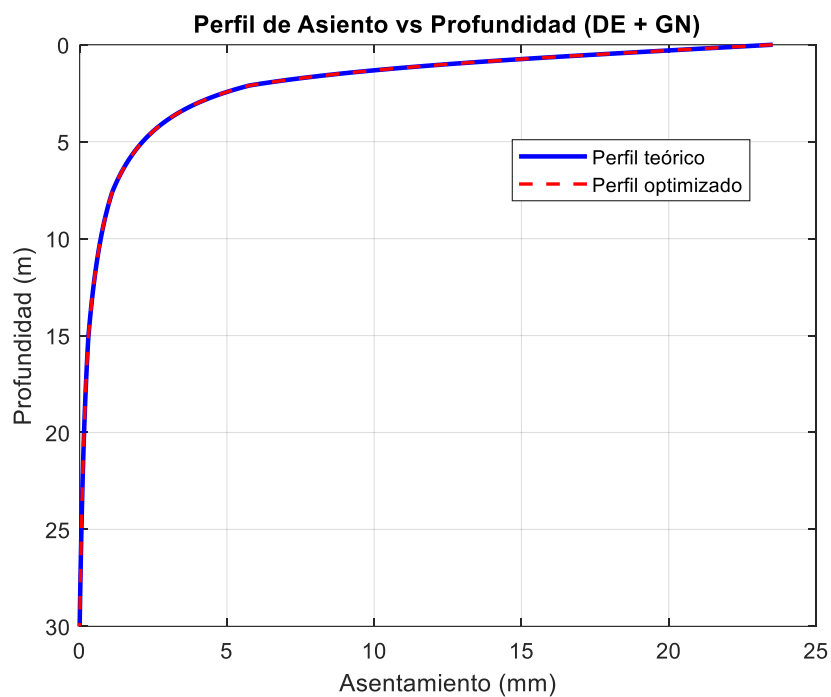


Figura A-344 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido DE+GN sin ruido.

### 12.7.9 Evolución Diferencias (DE) con GN o LN – Con ruido

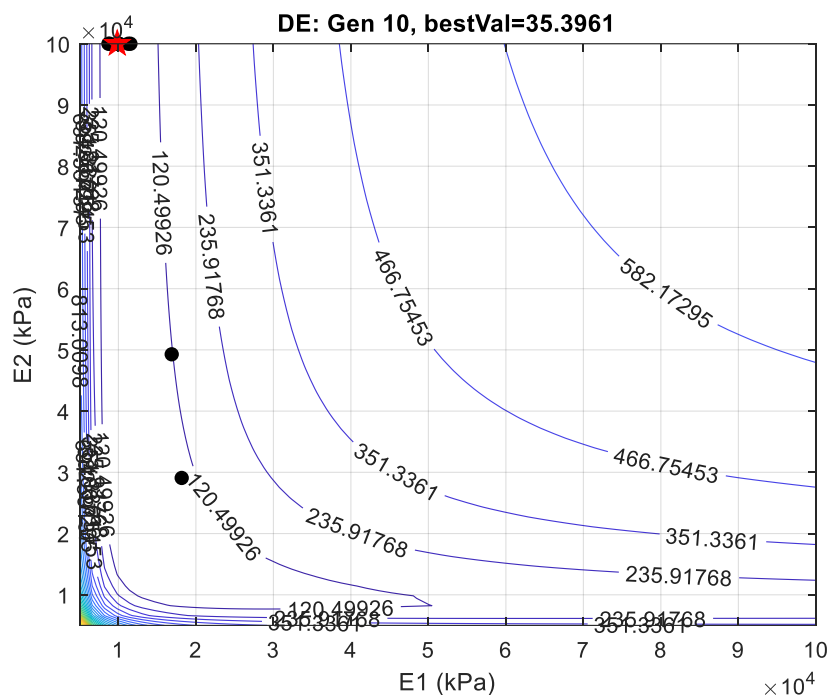


Figura A-345 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. DE con ruido. Generación 10

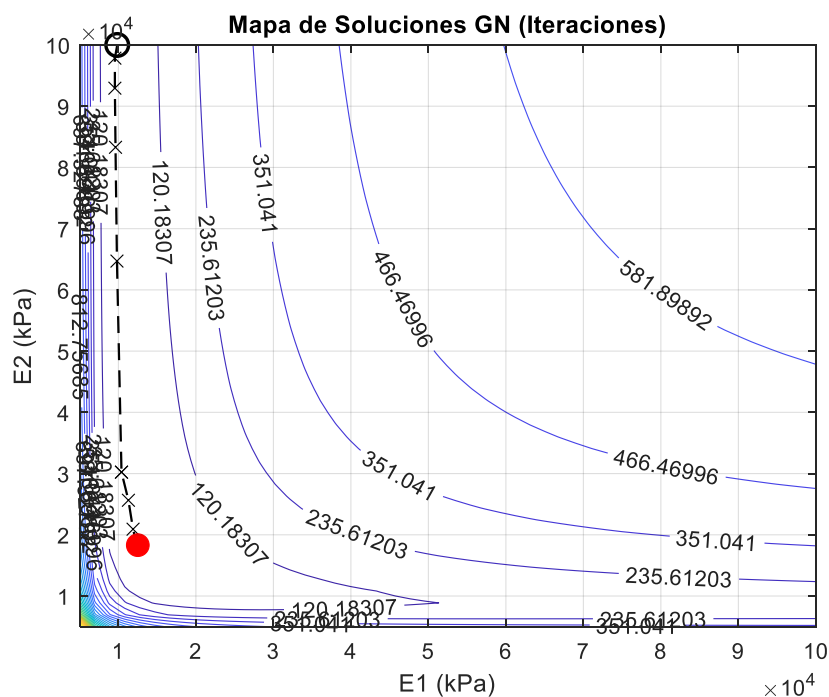


Figura A-346 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

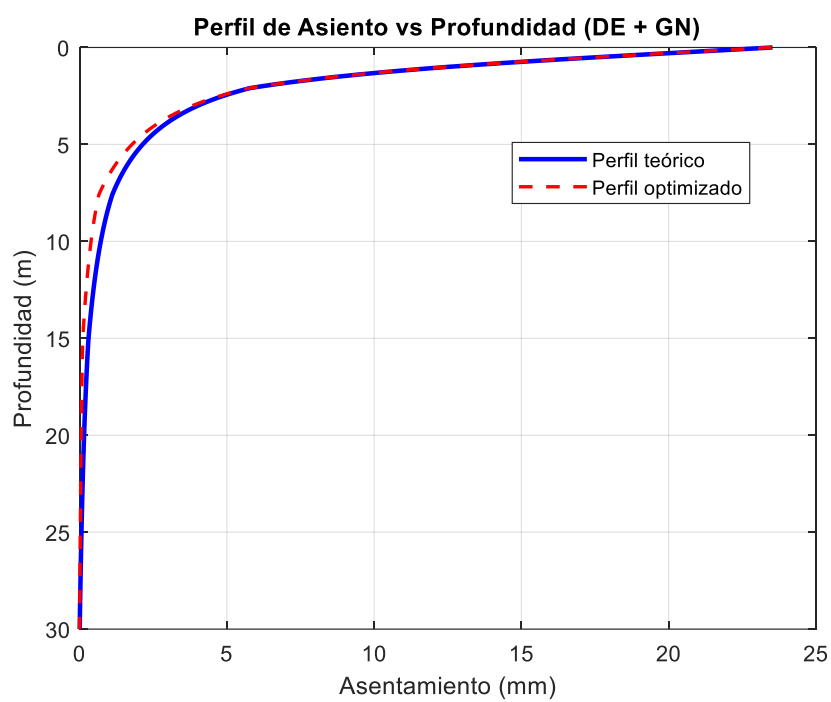


Figura A-347 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido DE+GN con ruido.

### 12.7.10 Recocido simulado (SA) con GN o LN – Sin ruido

Fase global de 10 iteraciones con temperatura inicial de 1 y factor de enfriamiento Alpha de 0.95.

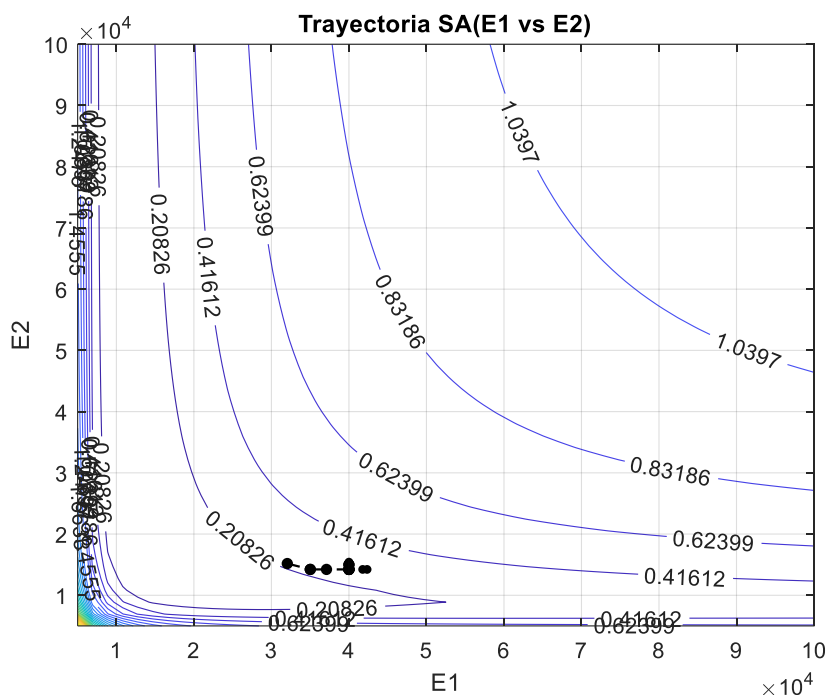


Figura A-348 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. SA sin ruido. Iteración 10

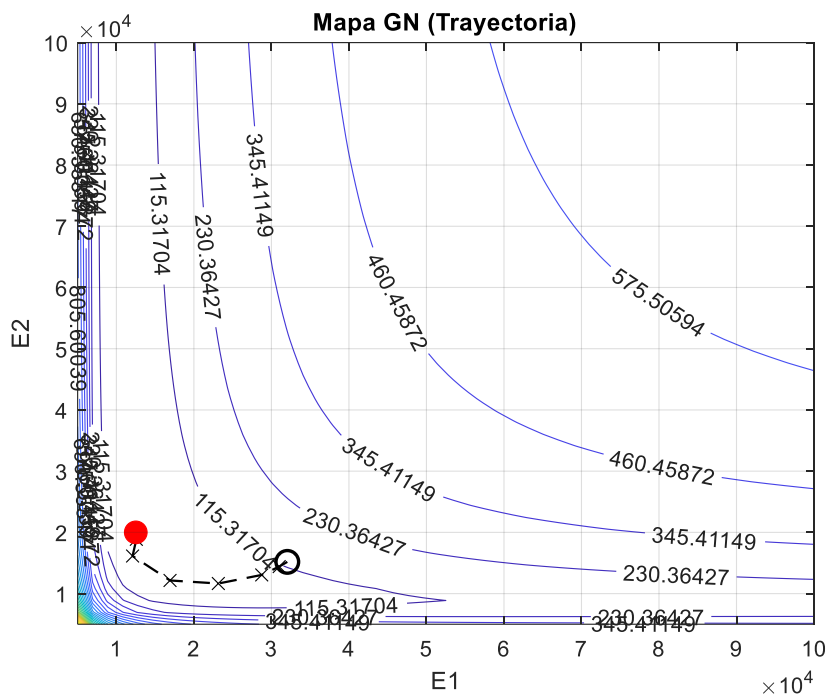


Figura A-349 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

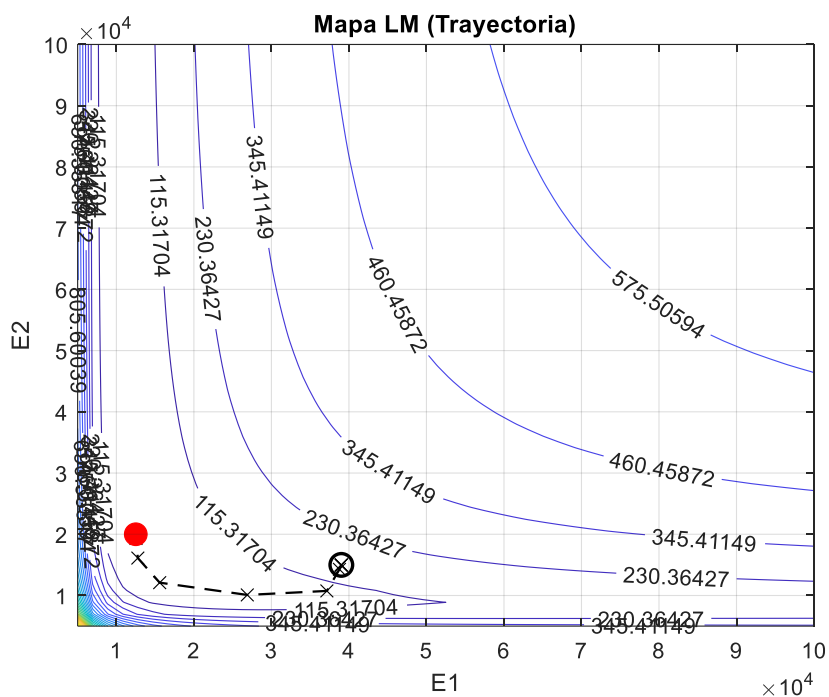


Figura A-350 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido.

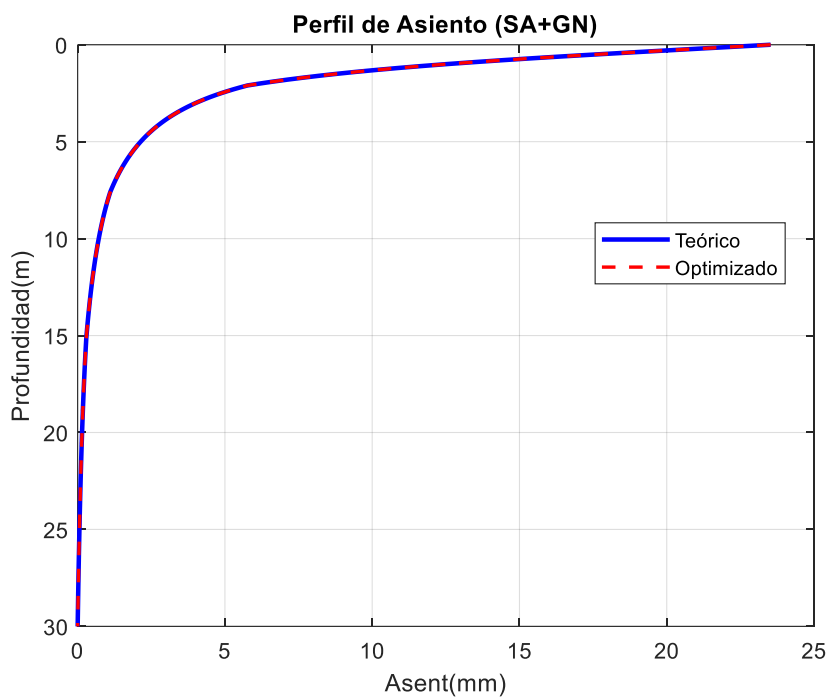


Figura A-351 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SA+GN sin ruido.



### 12.7.11 Recocido simulado (SA) con GN o LN – Con ruido

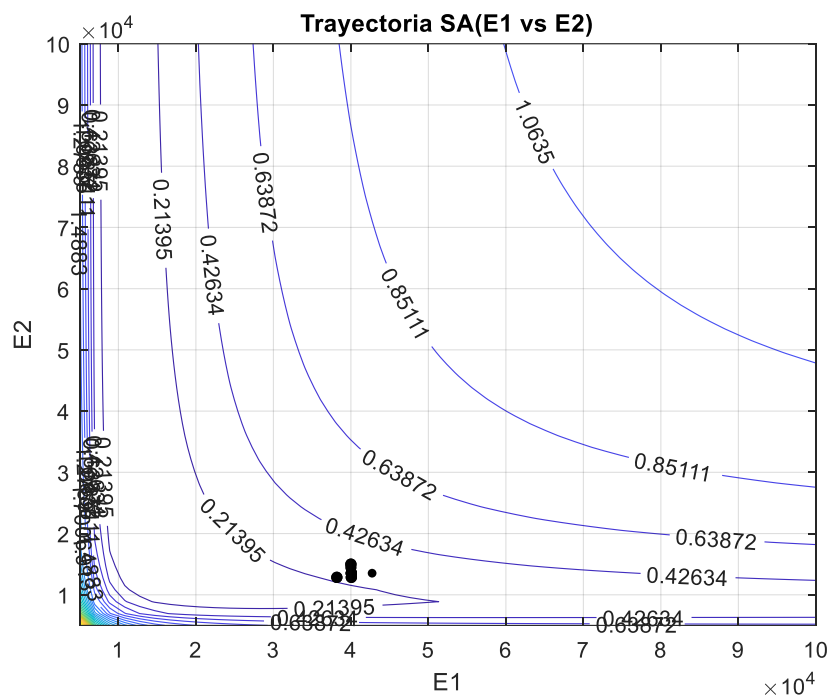


Figura A-352 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. SA con ruido. Iteración 10

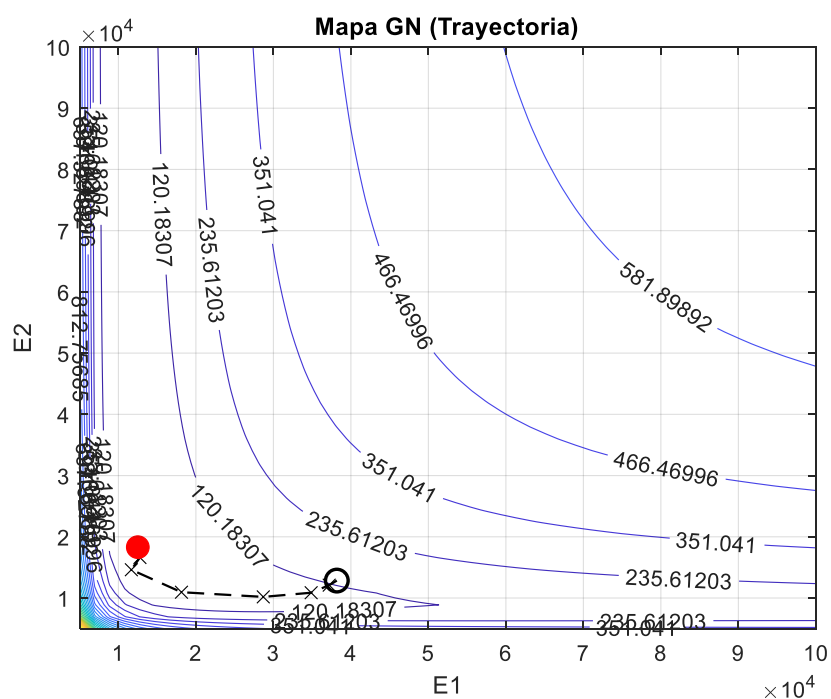


Figura A-353 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

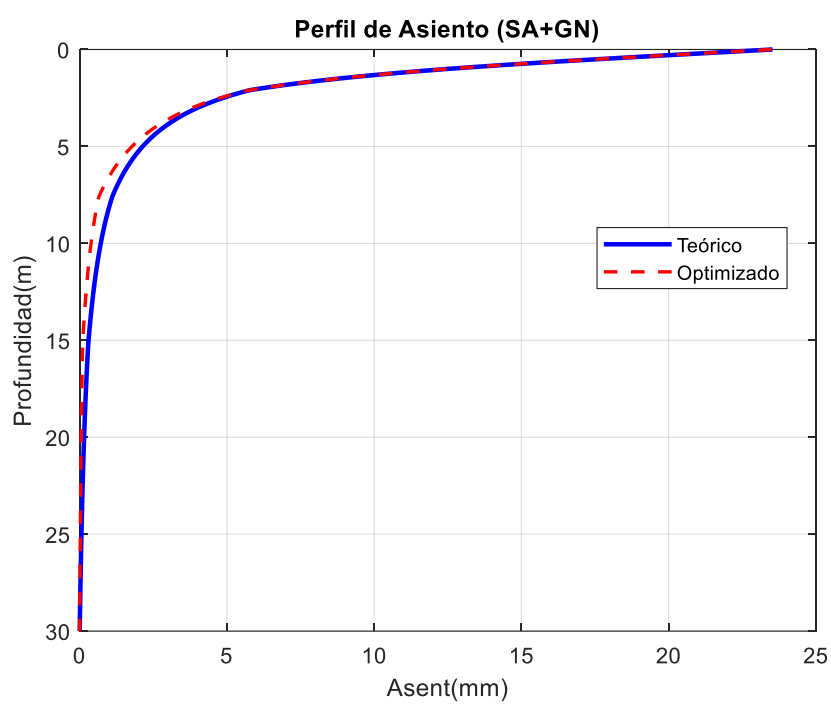


Figura A-354 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SA+GN con ruido.

### 12.7.12 Optimización Bayesiana (BO) con GN o LN – Sin ruido

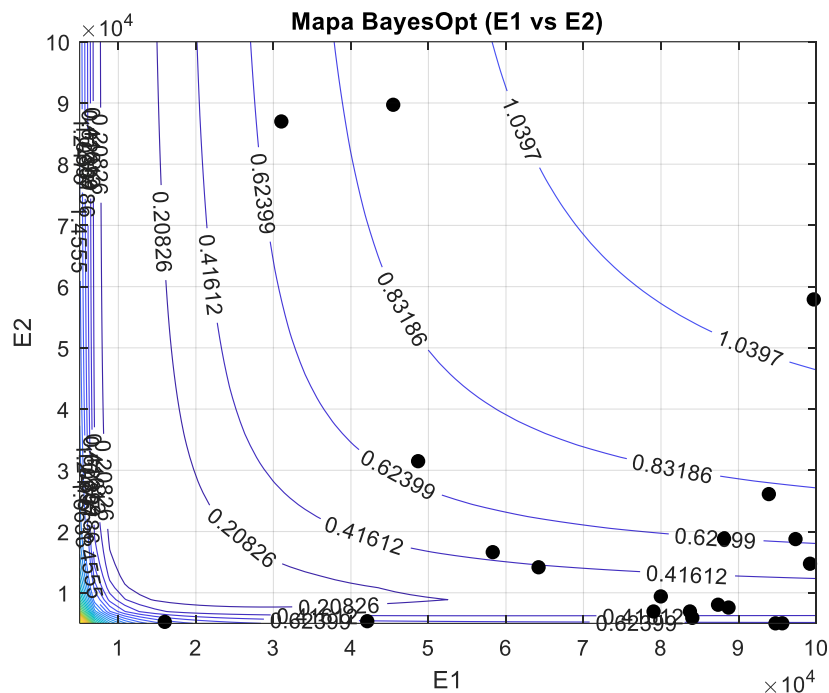


Figura A-355 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. BO sin ruido. Iteración 10

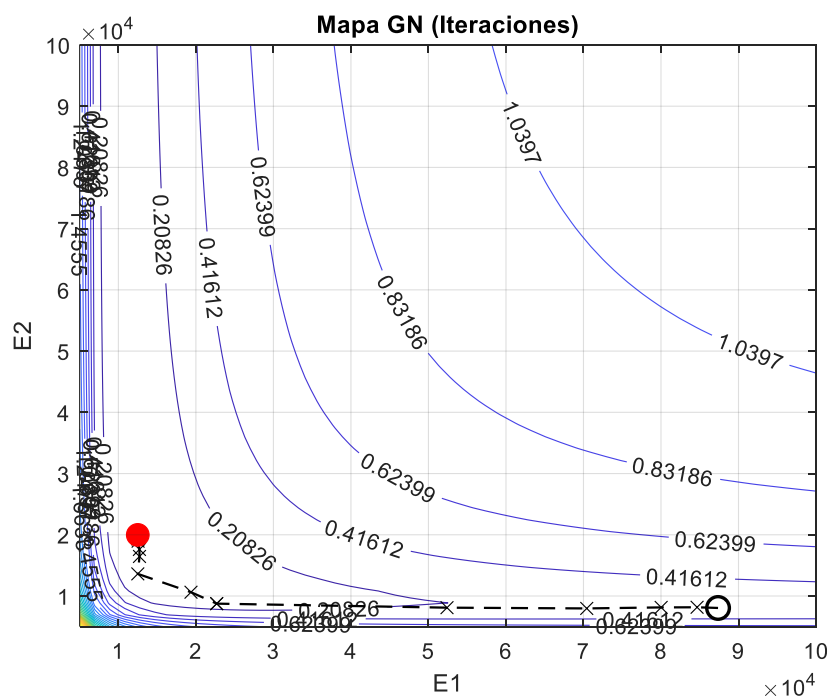


Figura A-356 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

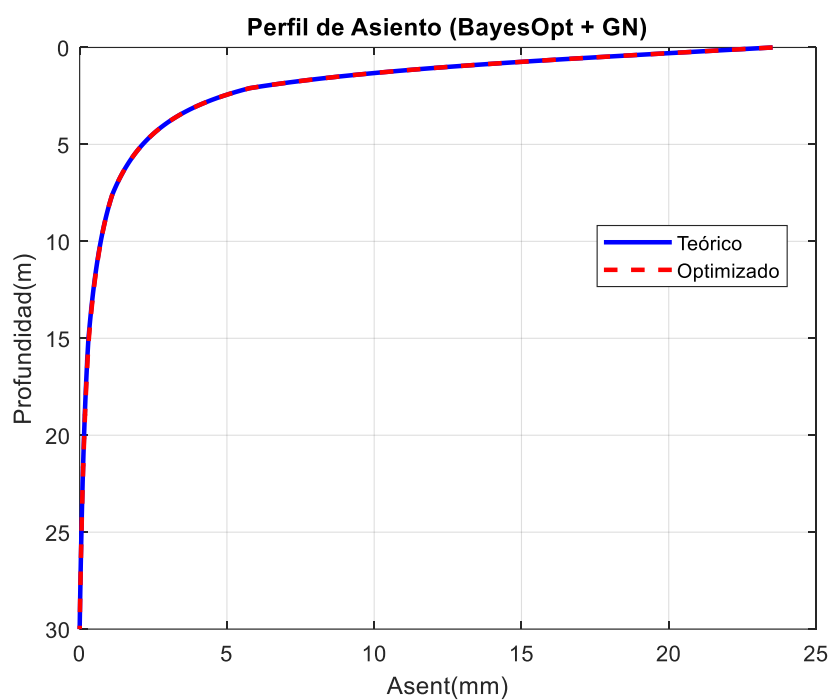


Figura A-357 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido BO+GN sin ruido.

### 12.7.13 Optimización Bayesiana (BO) con GN o LN – Con ruido

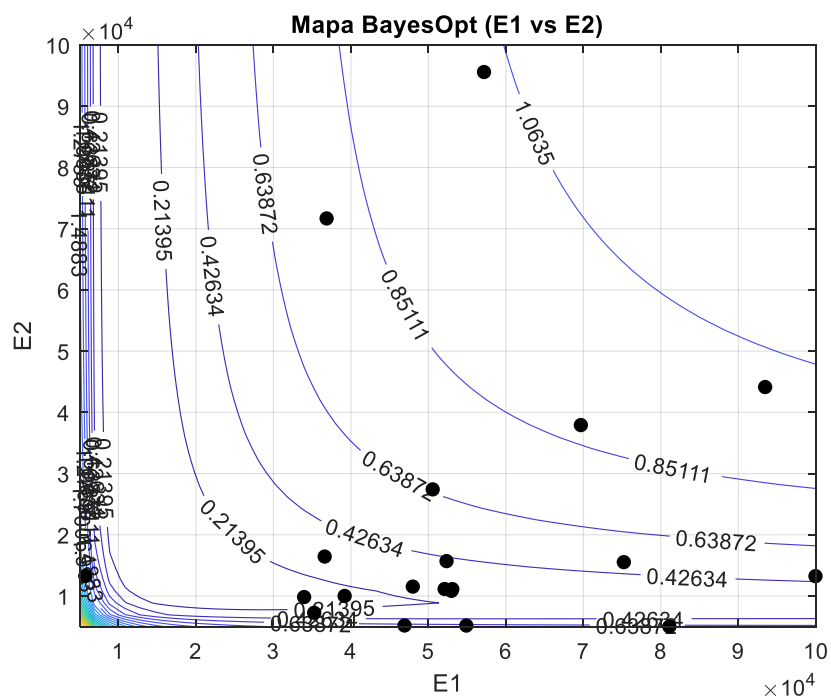


Figura A-358 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. BO con ruido. Iteración 10

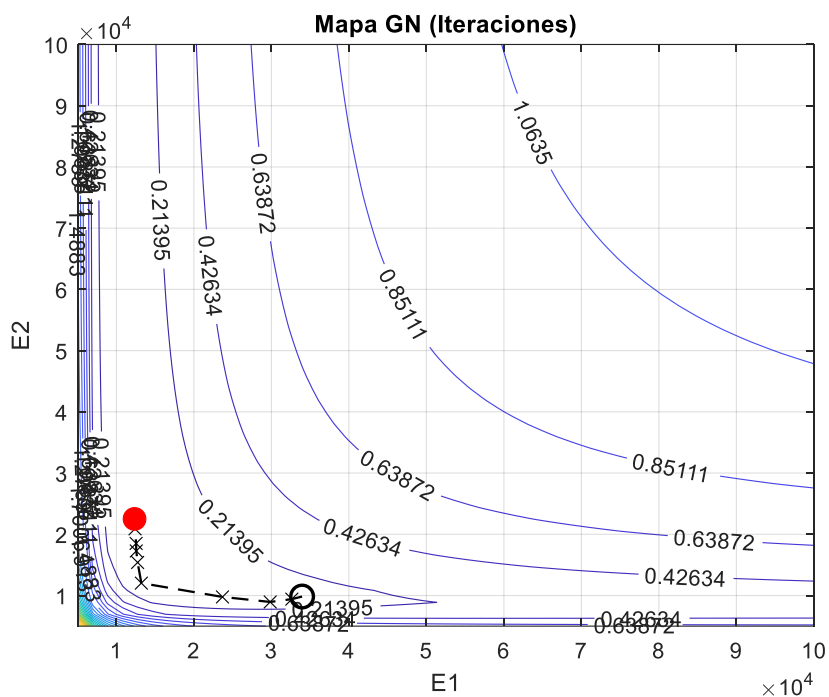


Figura A-359 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

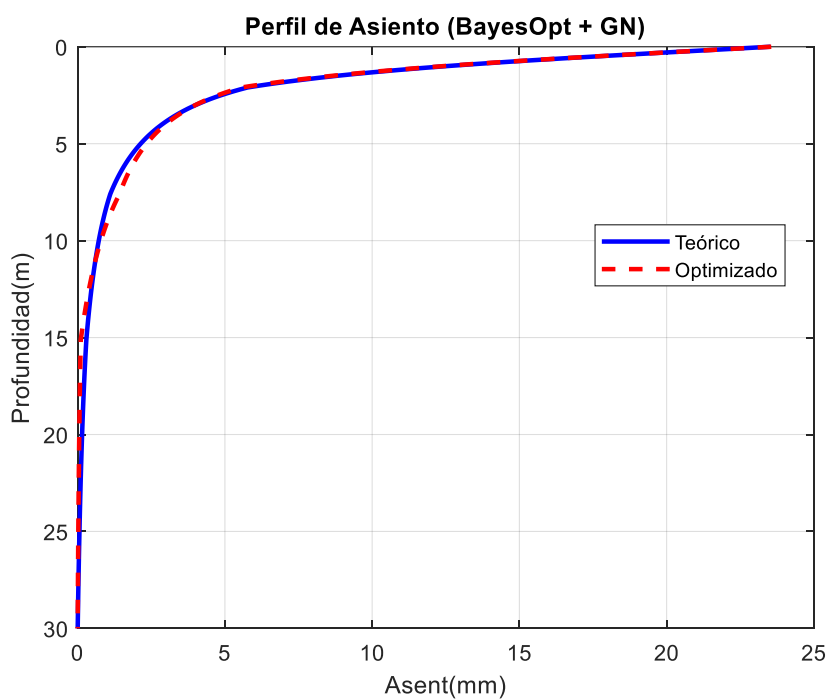


Figura A-360 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido BO+GN con ruido.

### 12.7.14 Procesos Gaussianos (GP) con GN o LN – Sin ruido

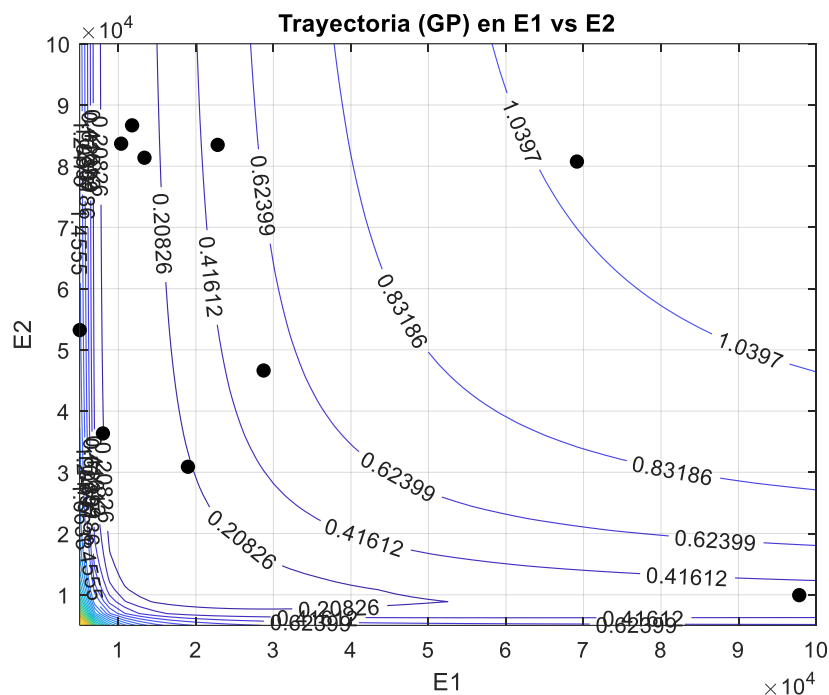


Figura A-361 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. GP sin ruido. Iteración 10

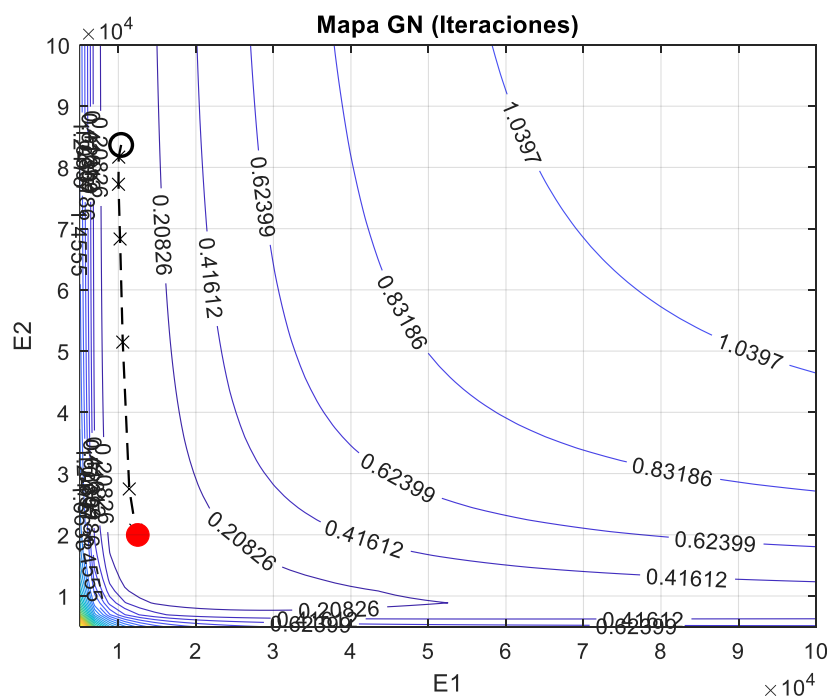


Figura A-362 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

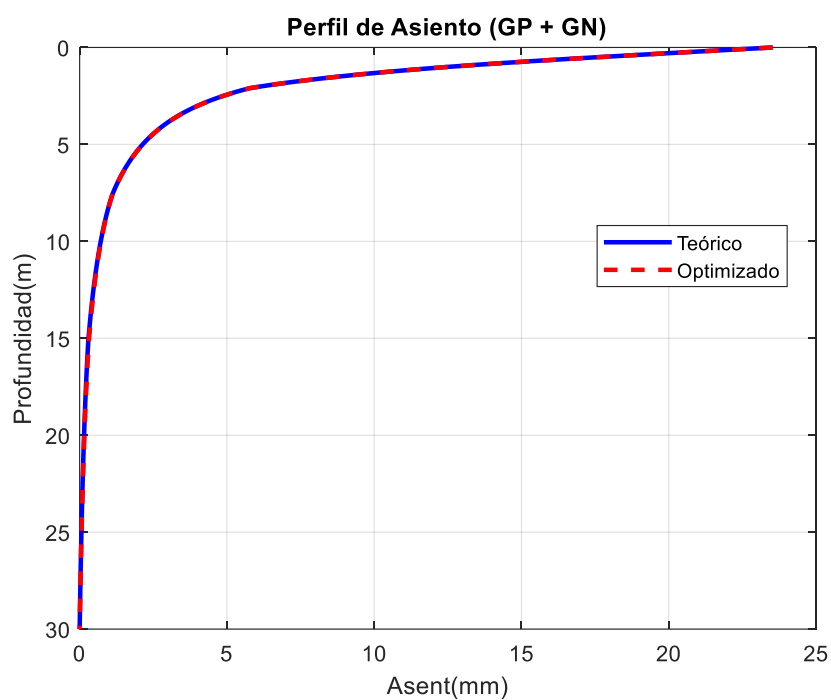


Figura A-363 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido GP+GN sin ruido.

### 12.7.15 Procesos Gaussianos (GP) con GN o LN – Con ruido

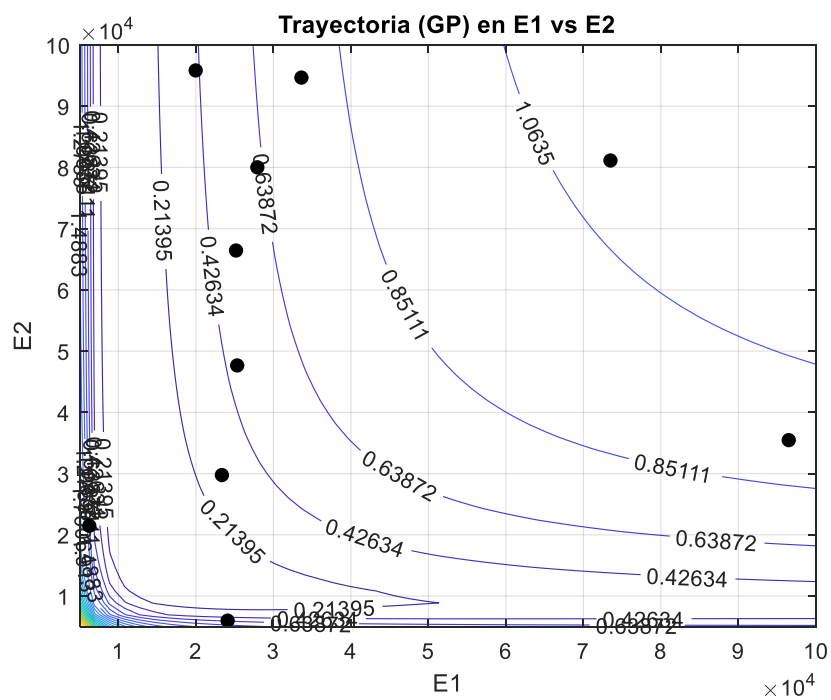


Figura A-364 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. GP con ruido. Iteración 10

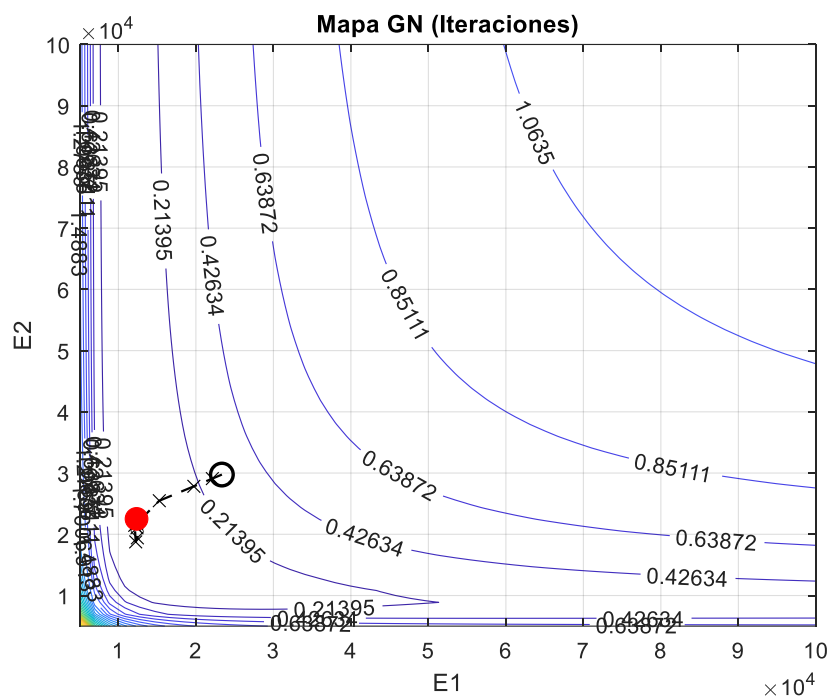


Figura A-365 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

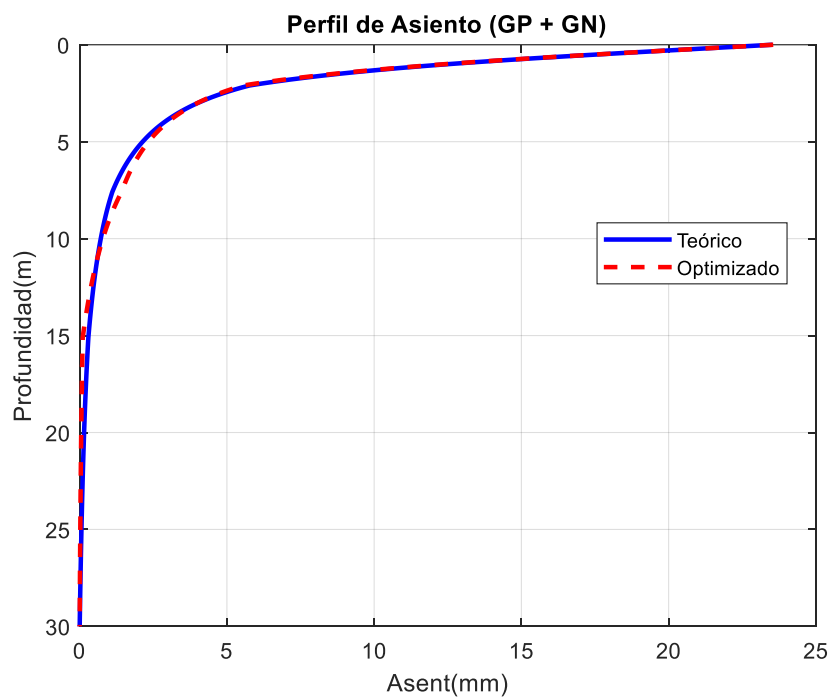


Figura A-366 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido GP+GN con ruido.



### 12.7.16 Kriging con GN o LN – Sin ruido

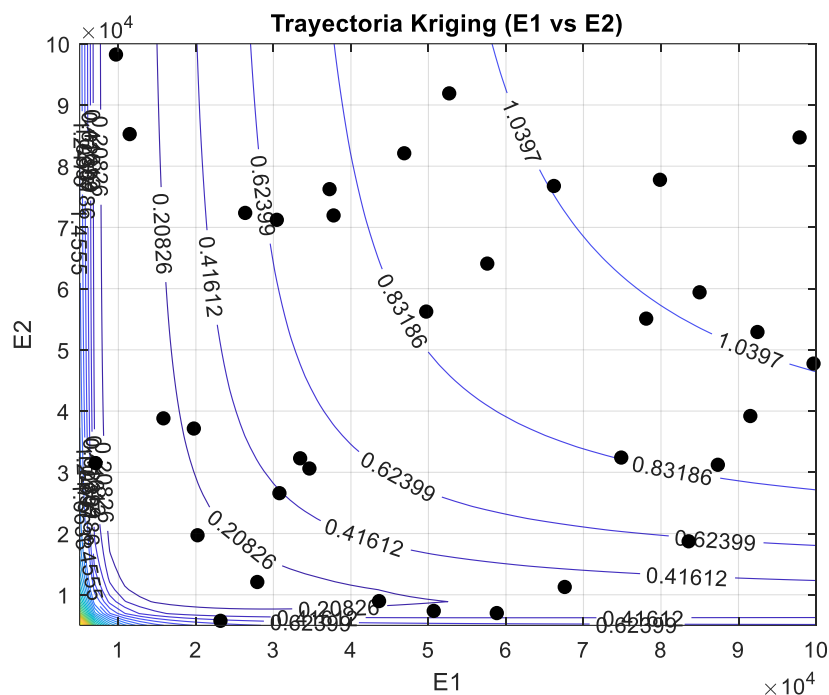


Figura A-367 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Kriging sin ruido. Iteración 20

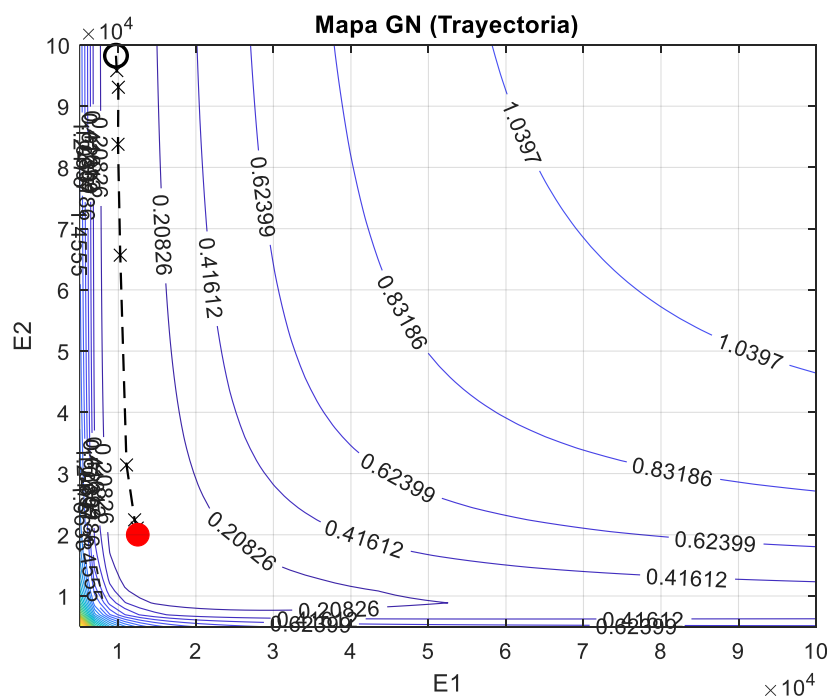


Figura A-368 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

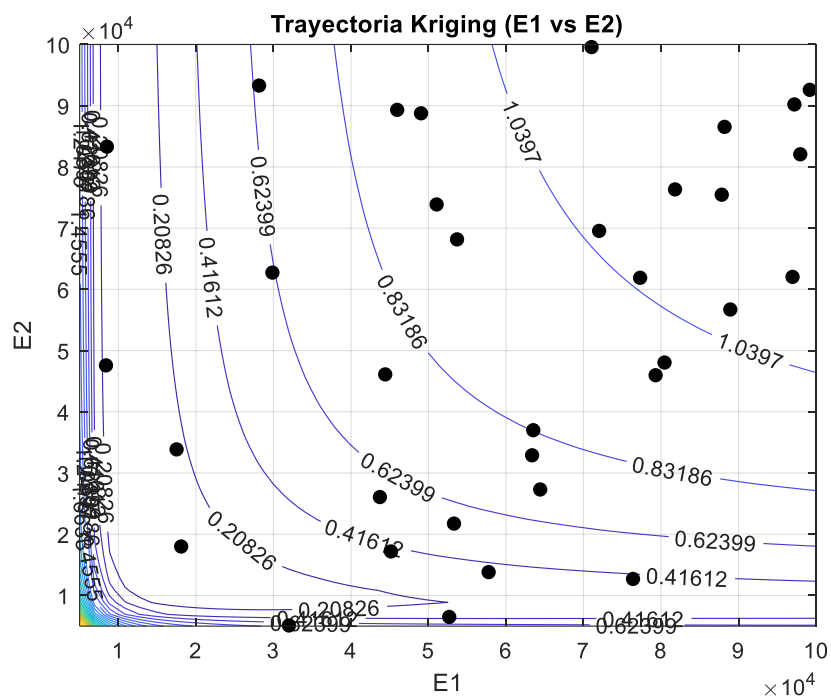


Figura A-369 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. LM sin ruido.

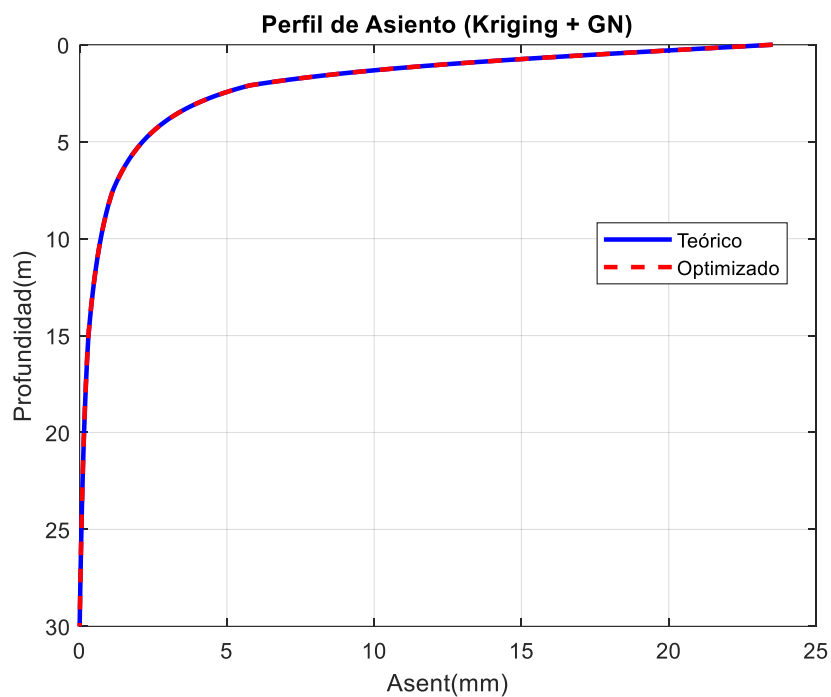


Figura A-370 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Kriging+GN sin ruido.

### 12.7.17 Kriging con GN o LN – Con ruido

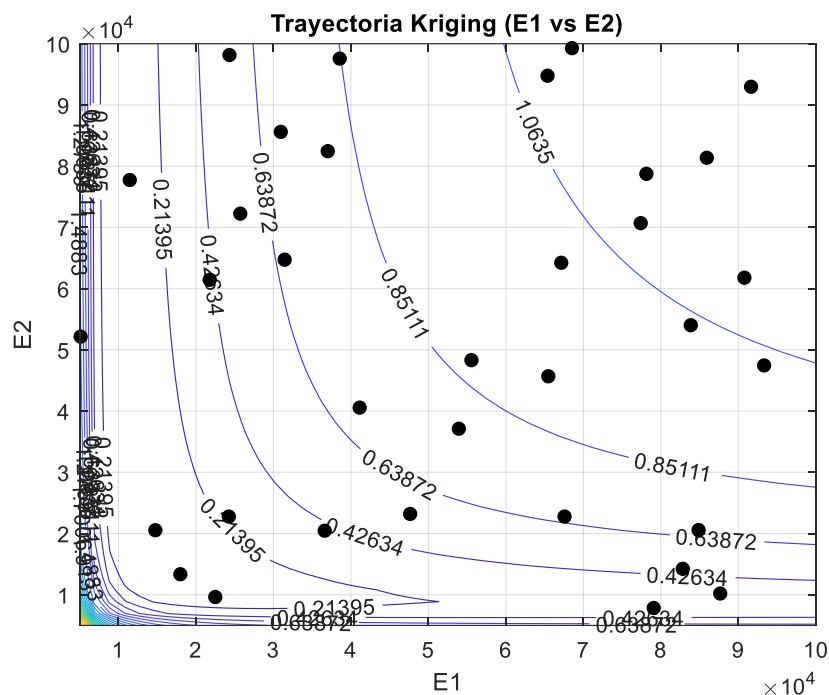


Figura A-371 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Kriging con ruido. Iteración 20

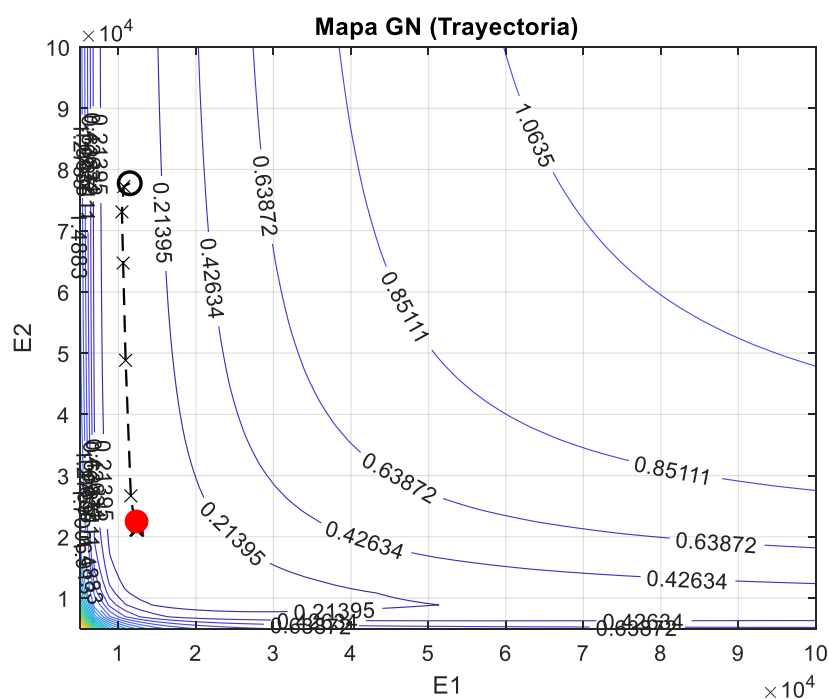


Figura A-372 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

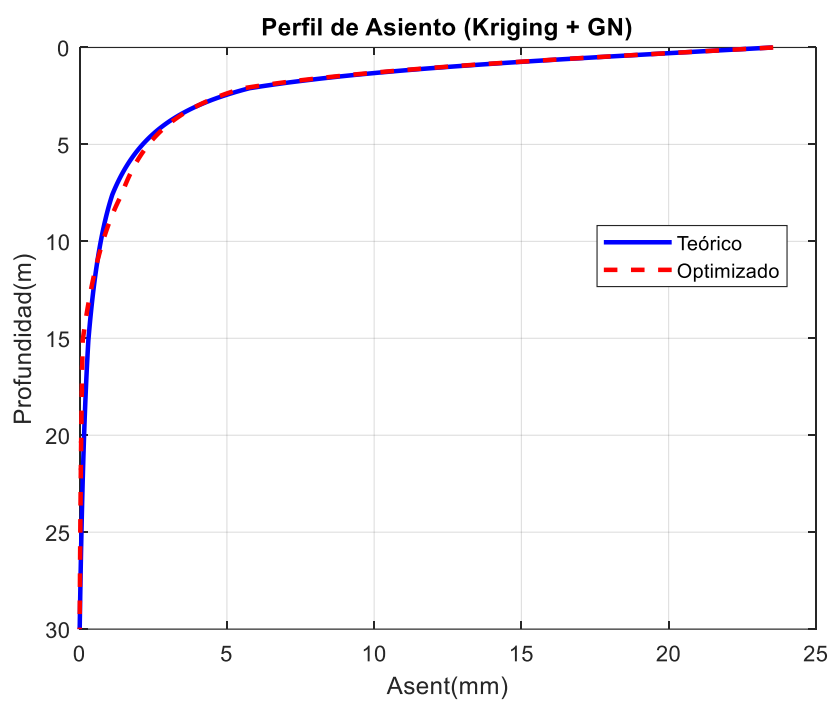


Figura A-373 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Kriging+GN con ruido.

### 12.7.18 Estrategias evolutivas (CMA-ES) con GN o LN – Sin ruido

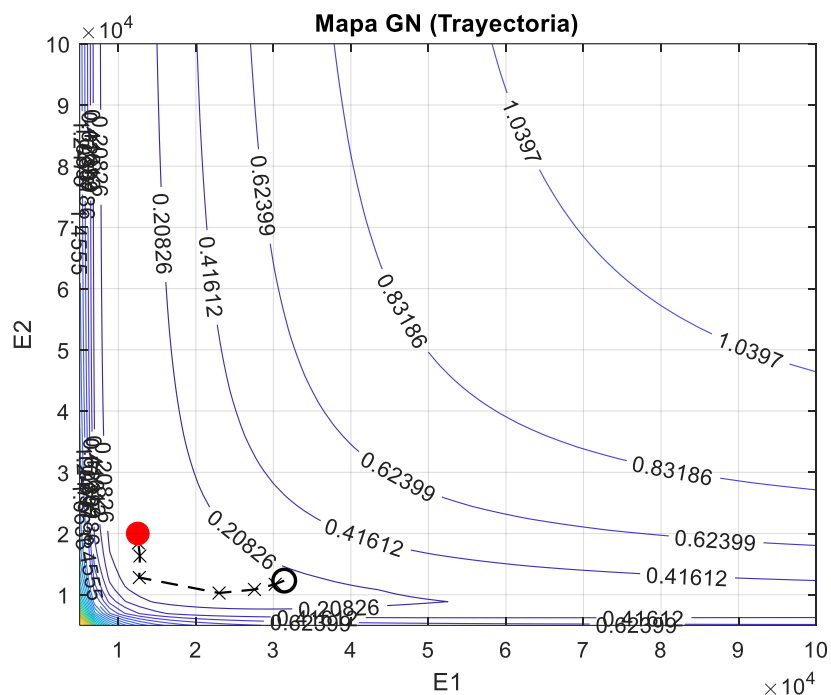


Figura A-374 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

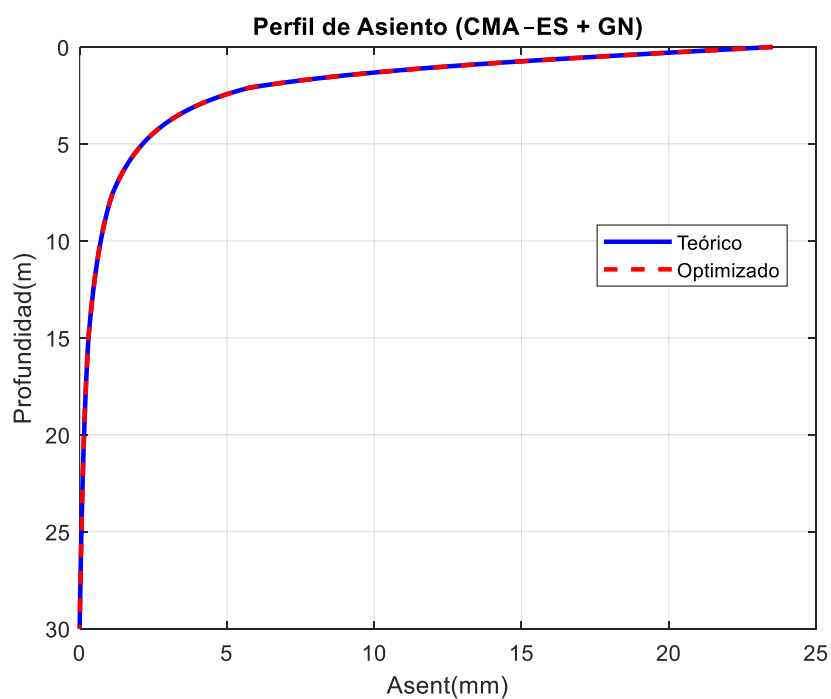


Figura A-375 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido CMA-ES+GN sin ruido.

### 12.7.19 Estrategias evolutivas (CMA-ES) con GN o LN – Con ruido

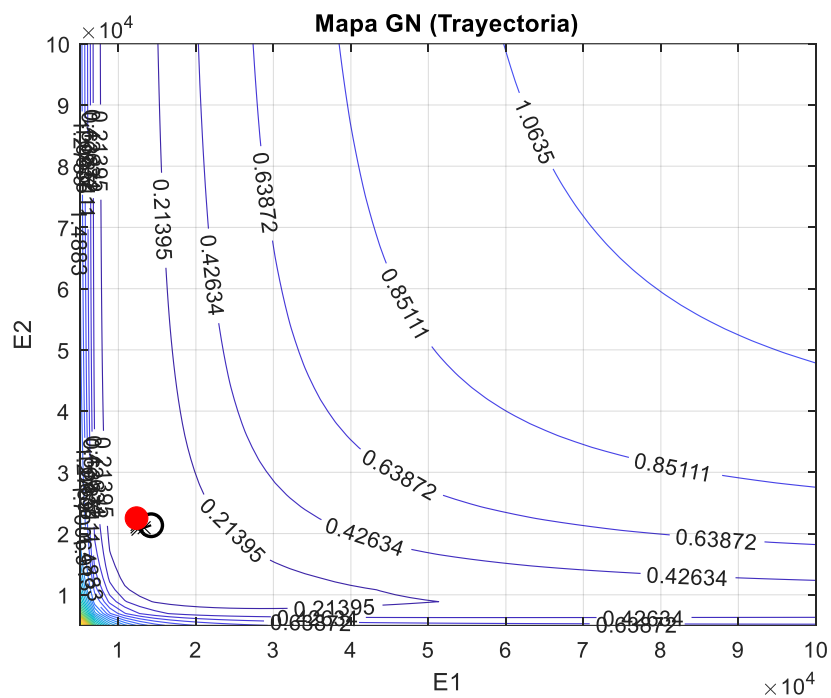


Figura A-376 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

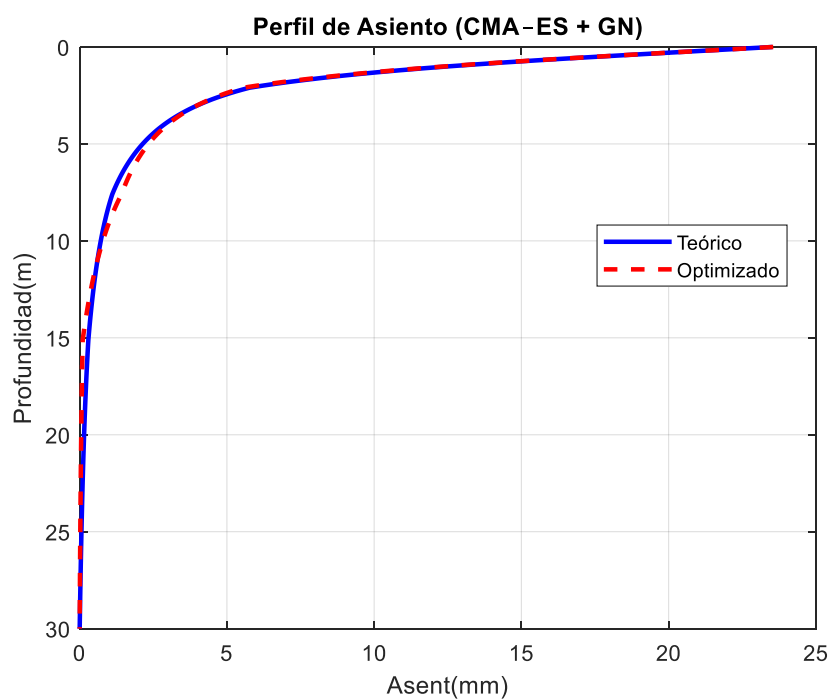


Figura A-377 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido CMA-ES+GN con ruido.

### 12.7.20 Cuckoo Search con GN o LM – Sin ruido

Se considera en la búsqueda global (Cuckoo Search) 10 nidos y 10 iteraciones con una probabilidad de abandono de 0.25

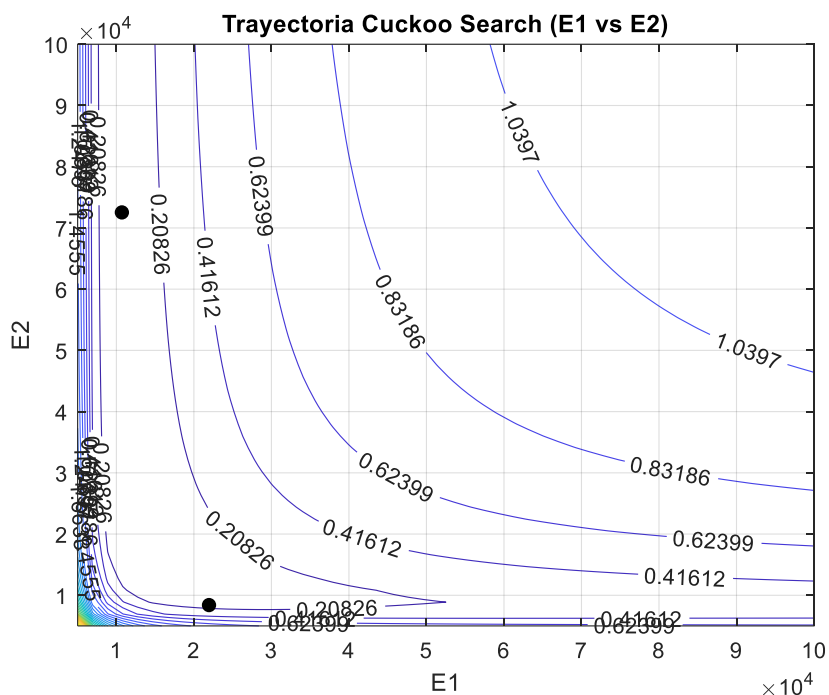


Figura A-378 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Cuckoo Search sin ruido. Iteración 10

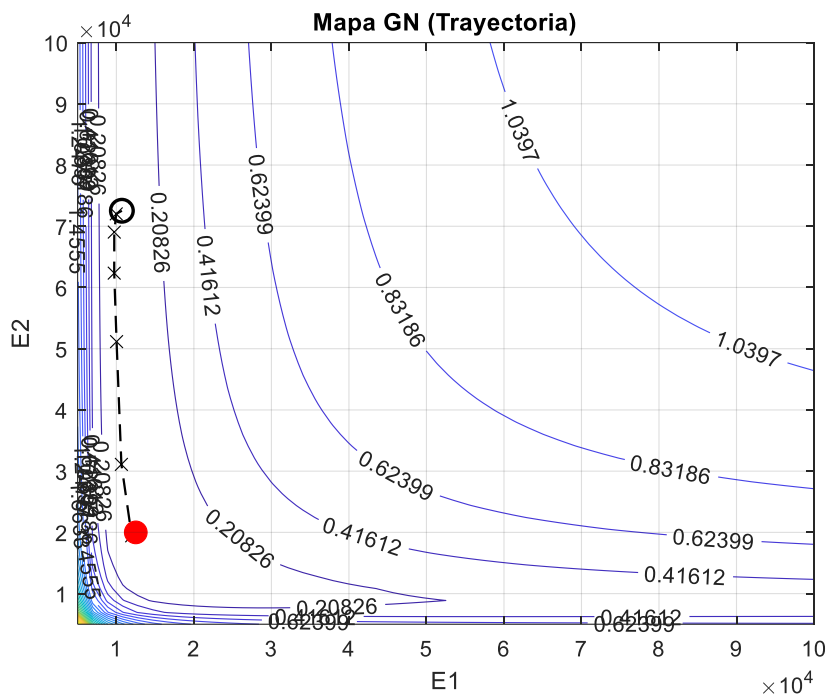


Figura A-379 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

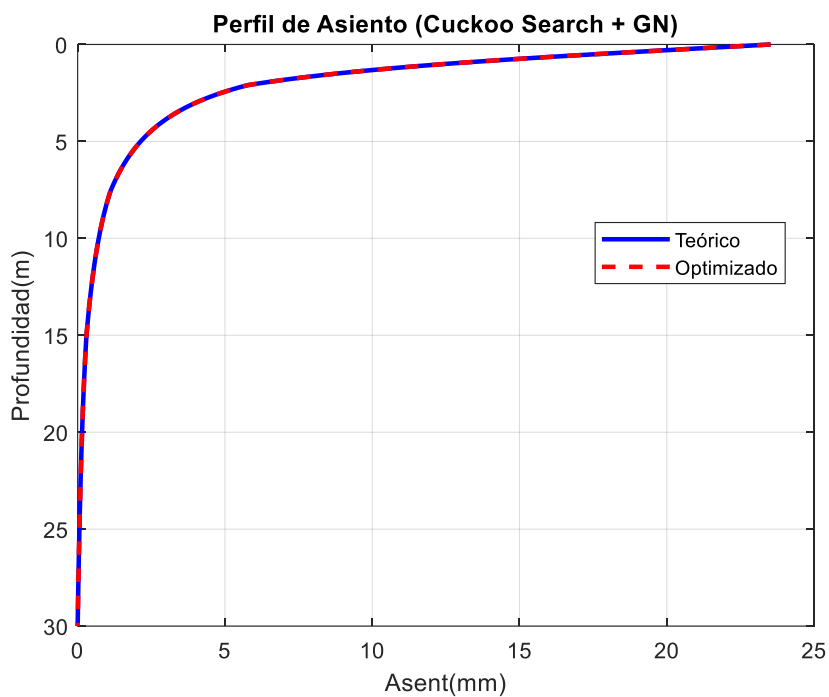


Figura A-380 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Cuckoo+GN sin ruido.

### 12.7.21 Cuckoo Search con GN o LM – Con ruido

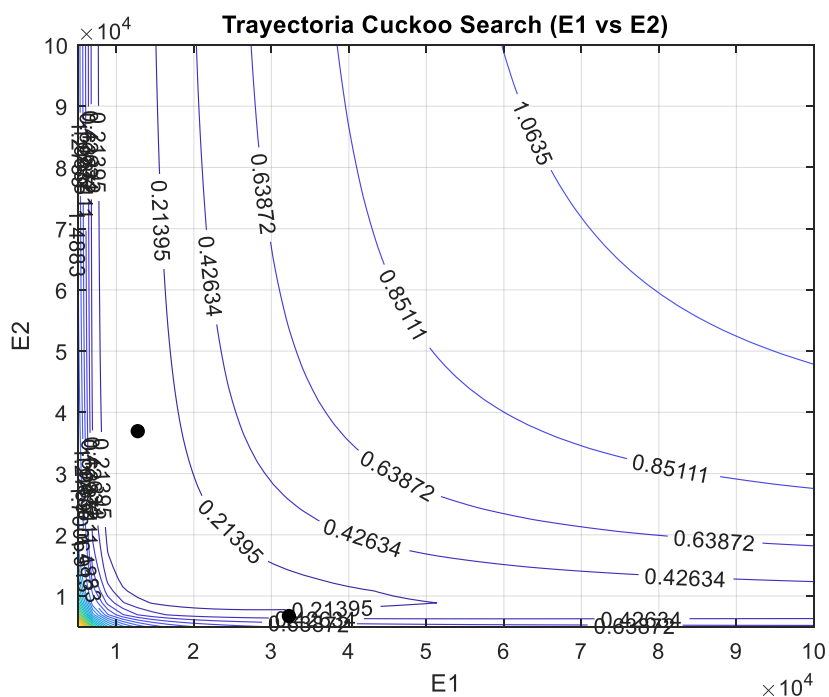


Figura A-381 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Cuckoo Search con ruido. Iteración 10



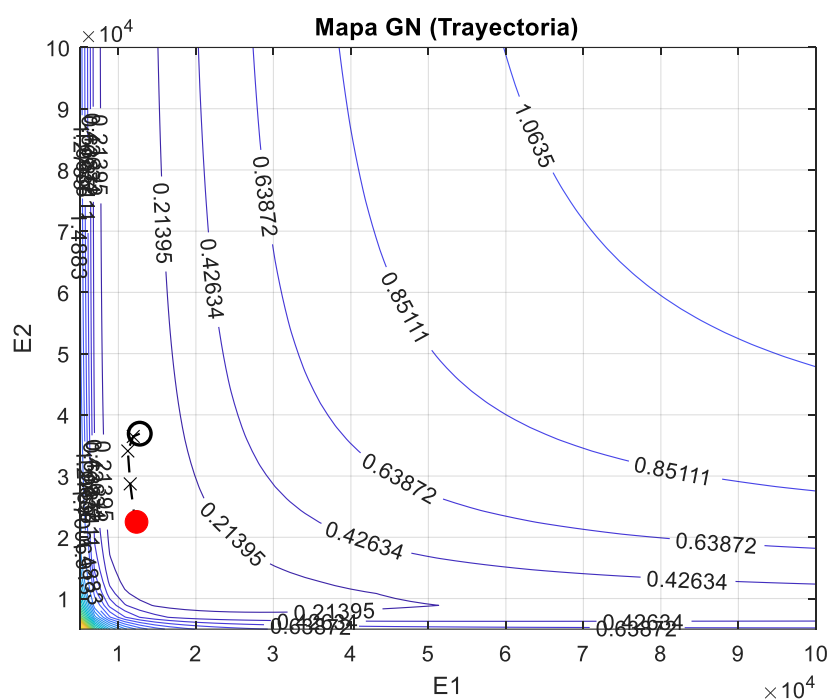


Figura A-382 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

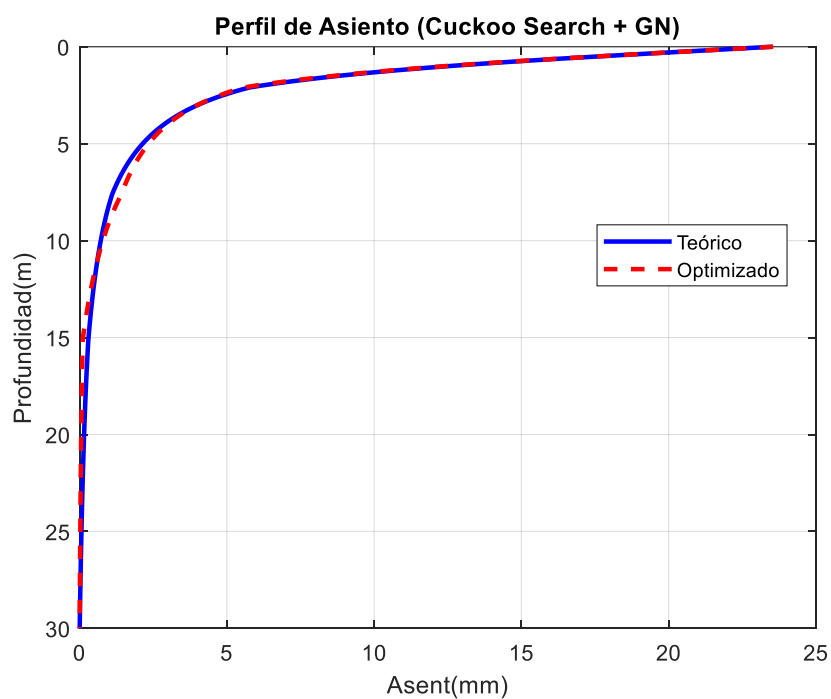


Figura A-383 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Cuckoo+GN con ruido.

### 12.7.22 Grey Wolf Optimizer + GN o LM – Sin ruido

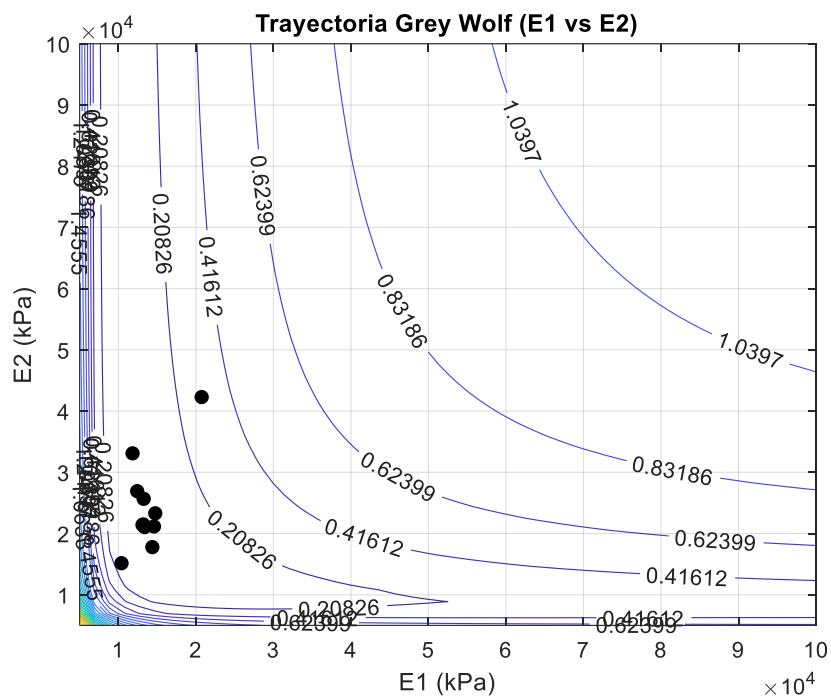


Figura A-384 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Grey Wolf sin ruido. Iteración 10

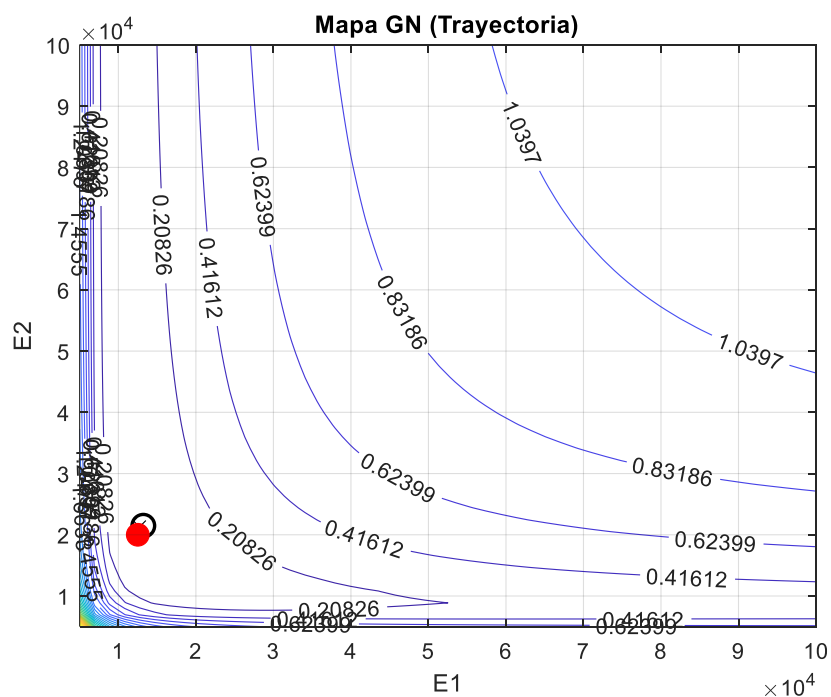


Figura A-385 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

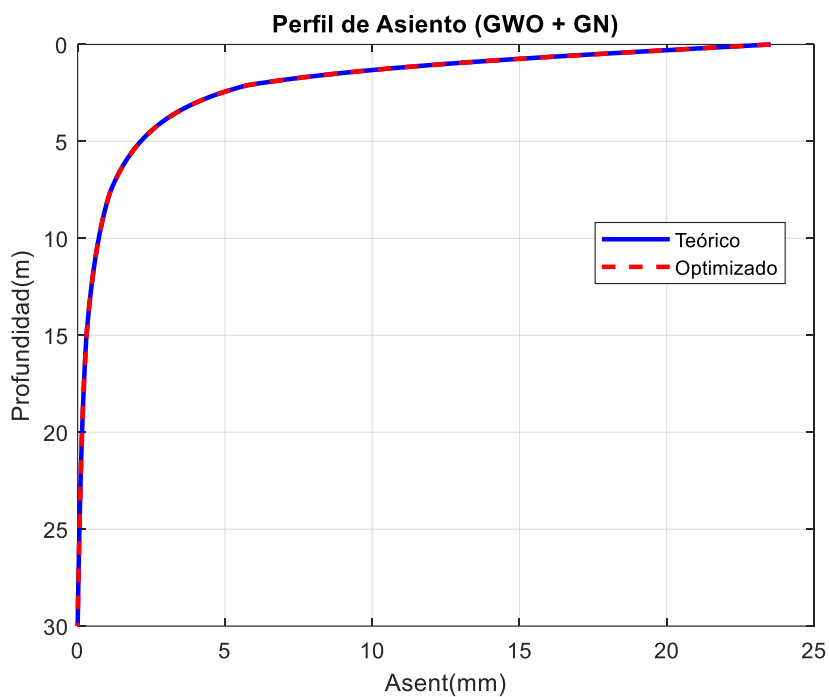


Figura A-386 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Grey Wolf+GN sin ruido.

### 12.7.23 Grey Wolf Optimizer + GN o LM – Con ruido

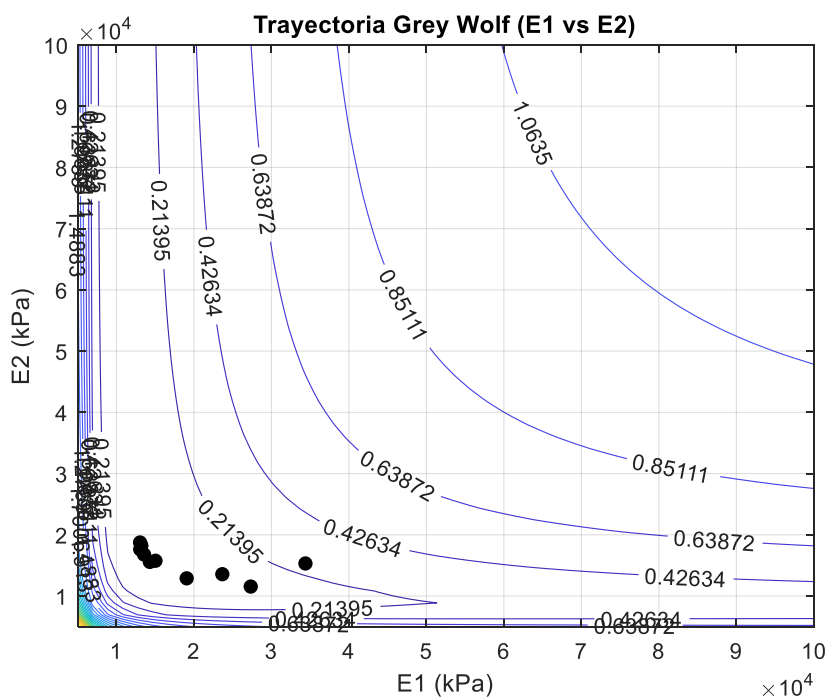


Figura A-387 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Grey Wolf con ruido. Iteración 10

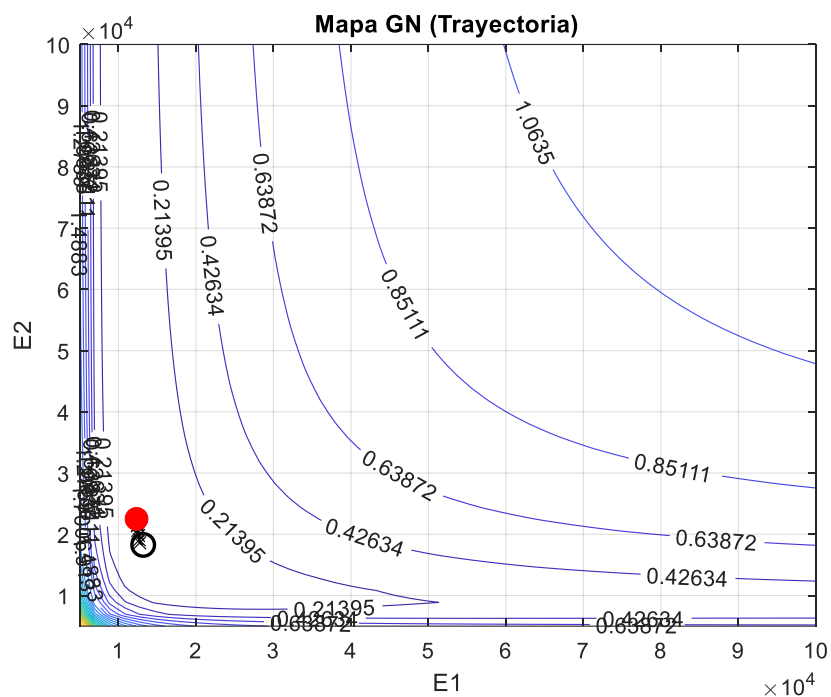


Figura A-388 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

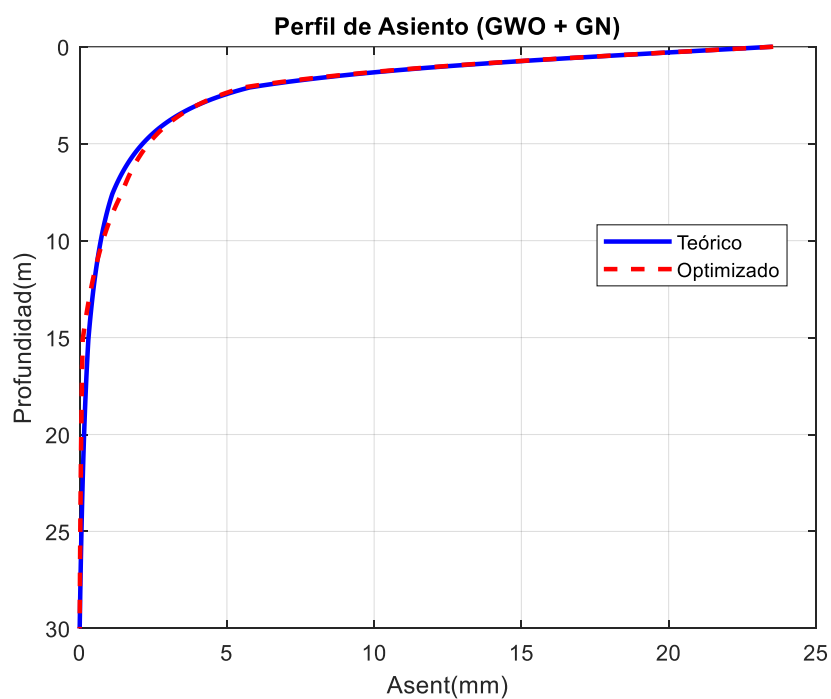


Figura A-389 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido Grey Wolf+GN con ruido.

### 12.7.24 Shuffled Complex Evolution (SCE) + GN o LM – Sin ruido

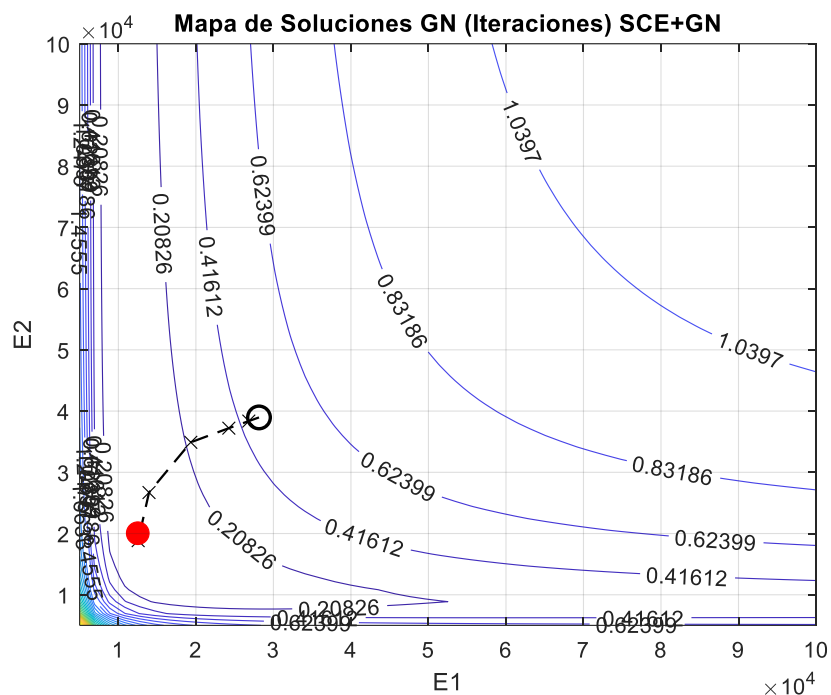


Figura A-390 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

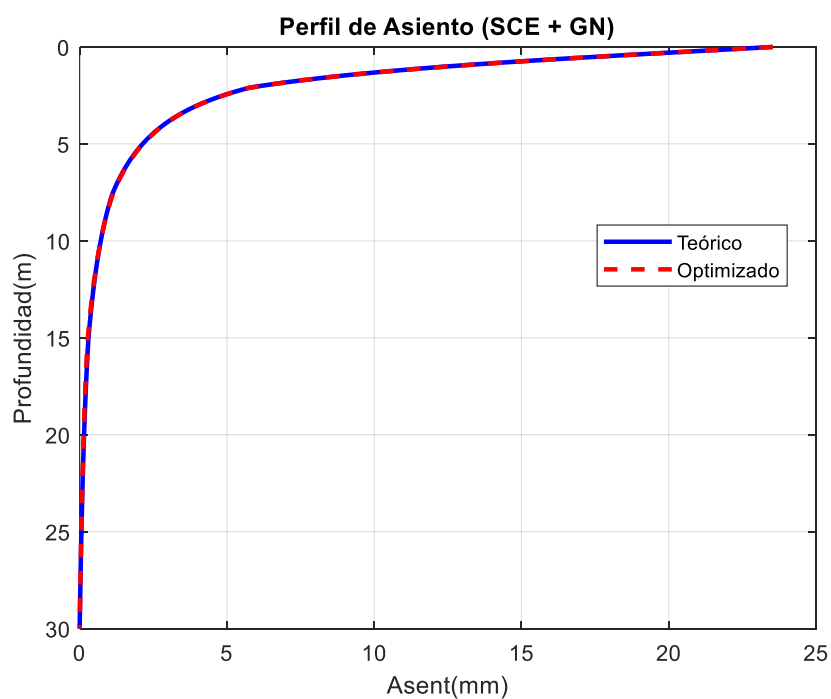


Figura A-391 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SCE+GN sin ruido.

### 12.7.25 Shuffled Complex Evolution (SCE) + GN o LM – Con ruido

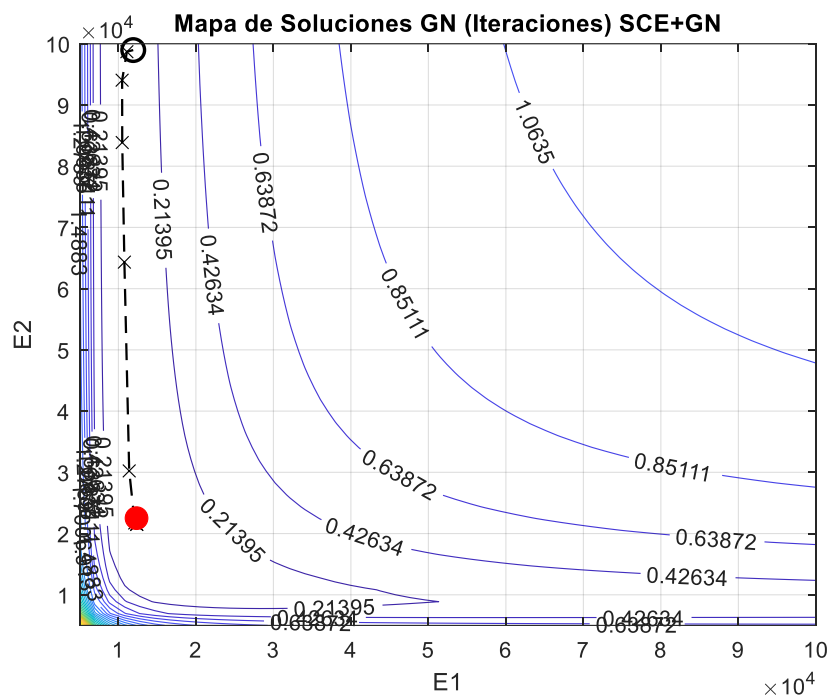


Figura A-392 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

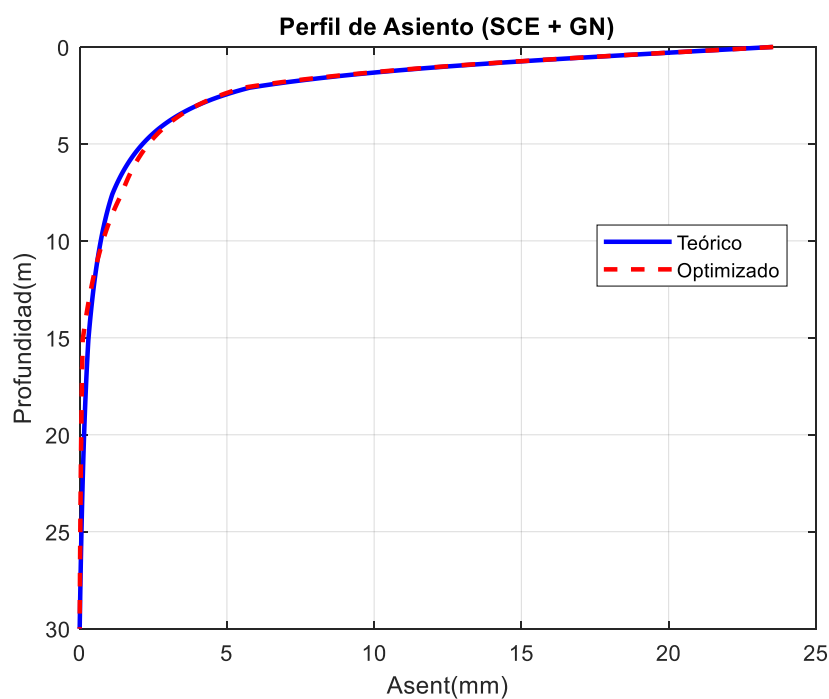


Figura A-393 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SCE+GN con ruido.

### 12.7.26 NSGA-II Multiobjetivo + GN o LM – Sin ruido

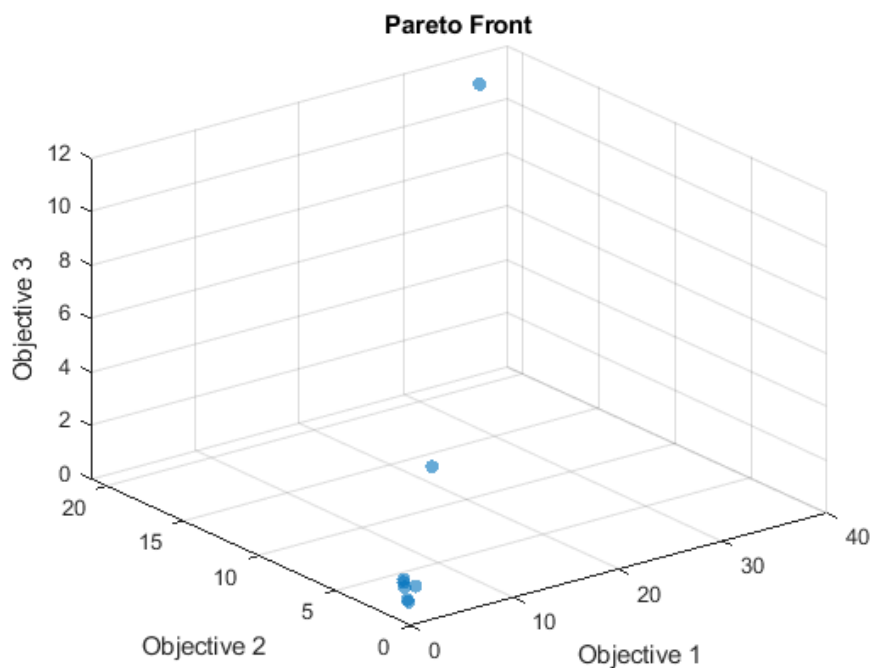


Figura A-394 – Mapa de soluciones NSGA-II sin ruido.

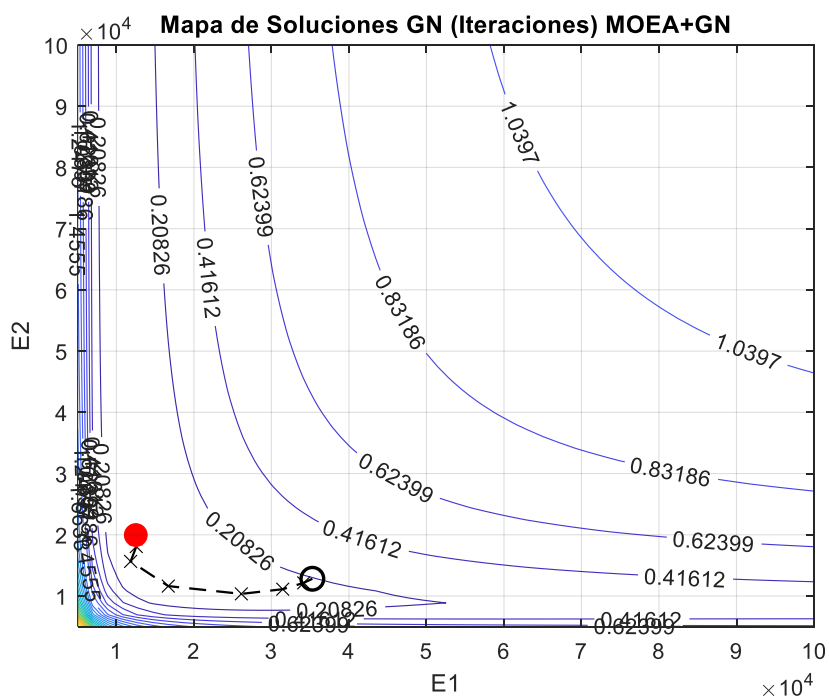


Figura A-395 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

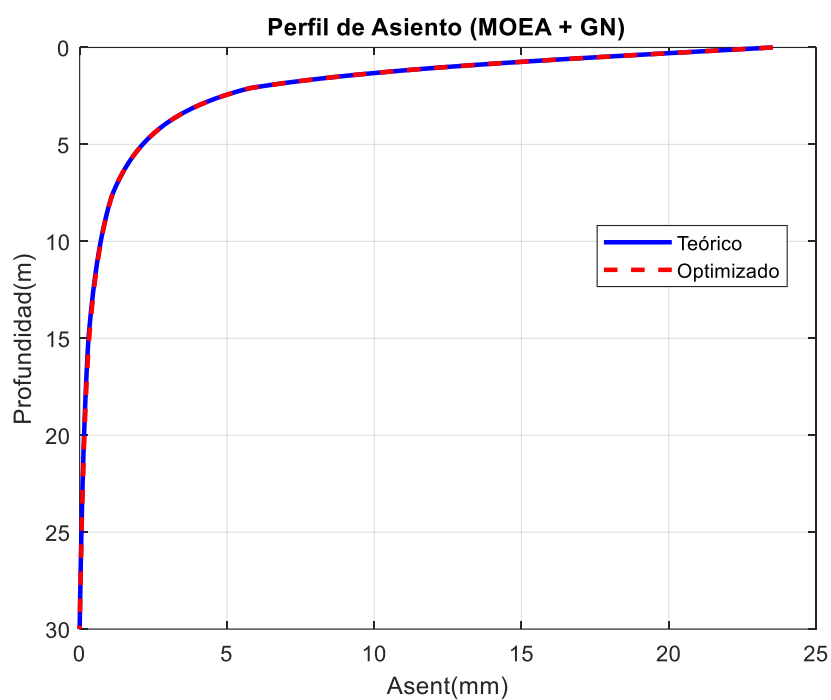


Figura A-396 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido NSGA-II +GN sin ruido.

### 12.7.27 NSGA-II Multiobjetivo + GN o LM – Con ruido

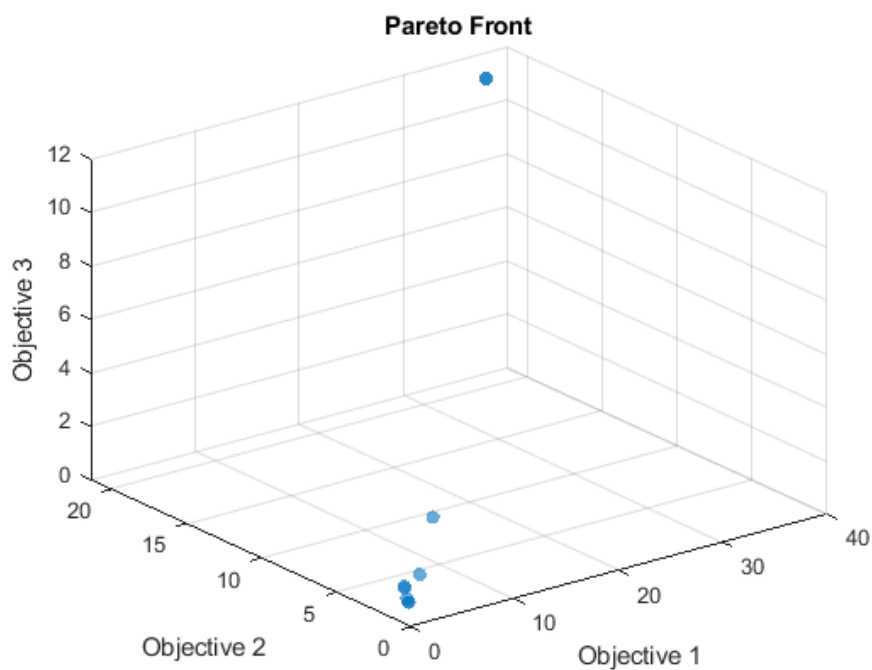


Figura A-397 – Mapa de soluciones NSGA-II con ruido.



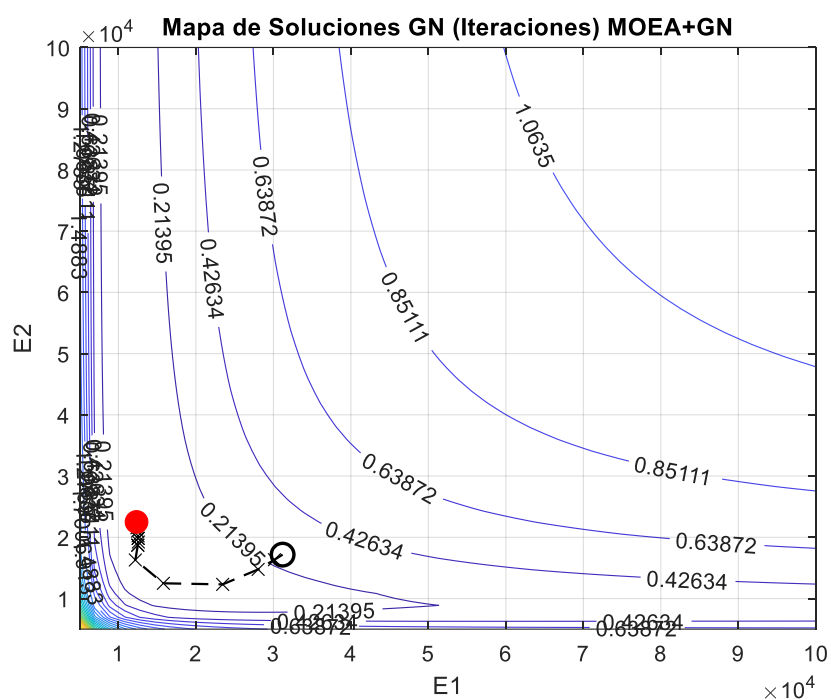


Figura A-398 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

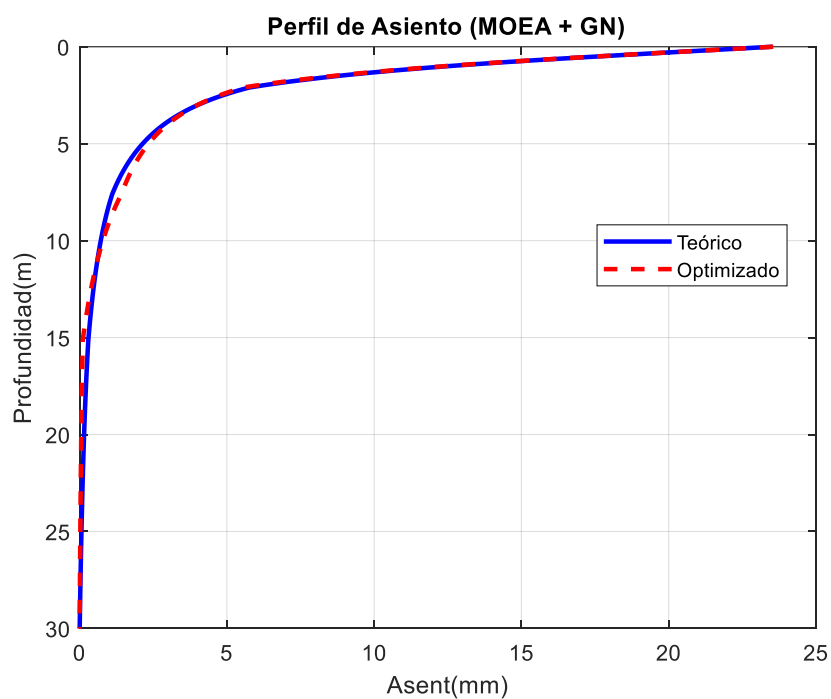


Figura A-399 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido NSGA-II +GN con ruido.

### 12.7.28 SPEA2 Multiobjetivo + GN o LM – Sin ruido

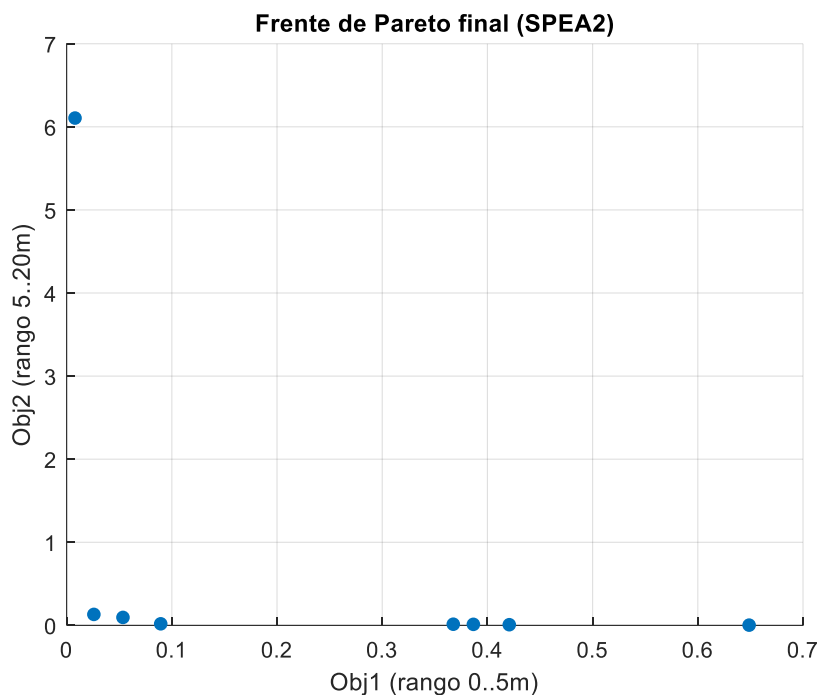


Figura A-400 – Mapa de soluciones SPEA2 sin ruido.

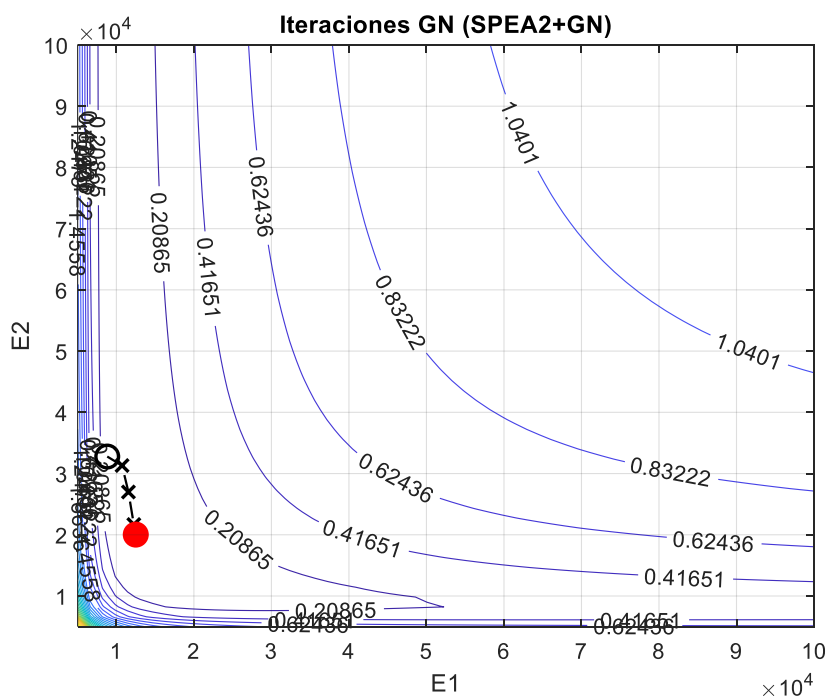


Figura A-401 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton sin ruido.

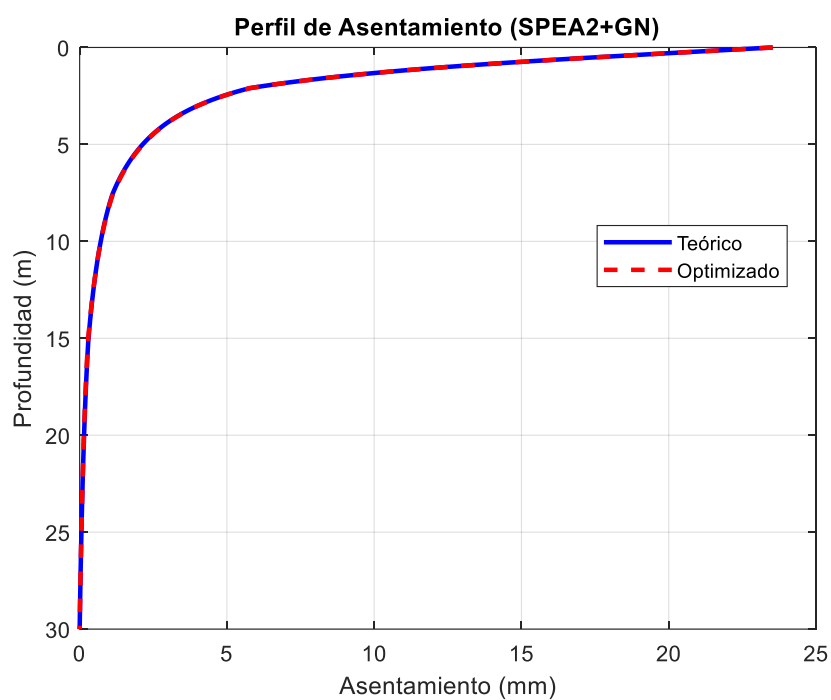


Figura A-402 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SPEA2+GN sin ruido.

### 12.7.29 SPEA2 Multiobjetivo + GN o LM – Con ruido

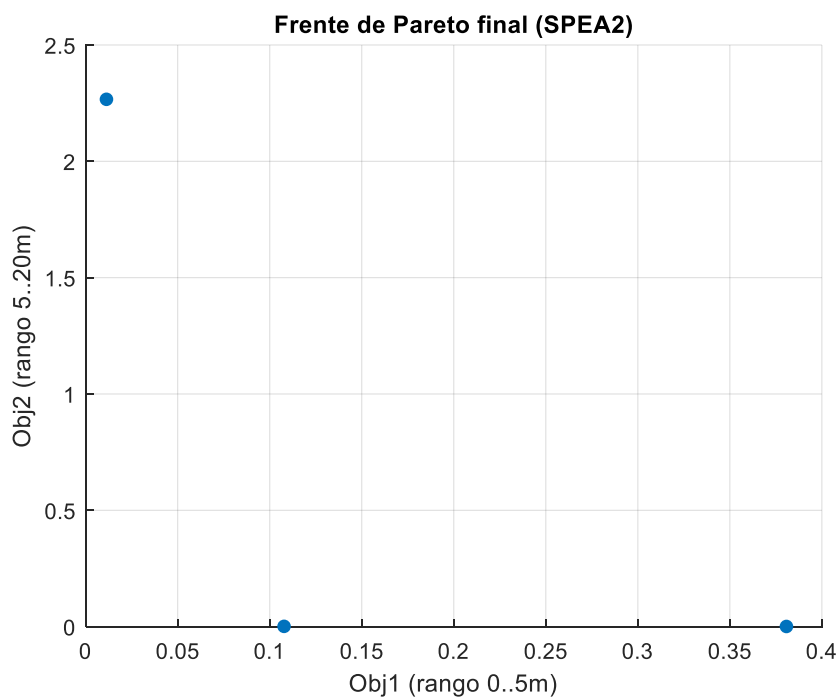


Figura A-403 – Mapa de soluciones SPEA2 con ruido.

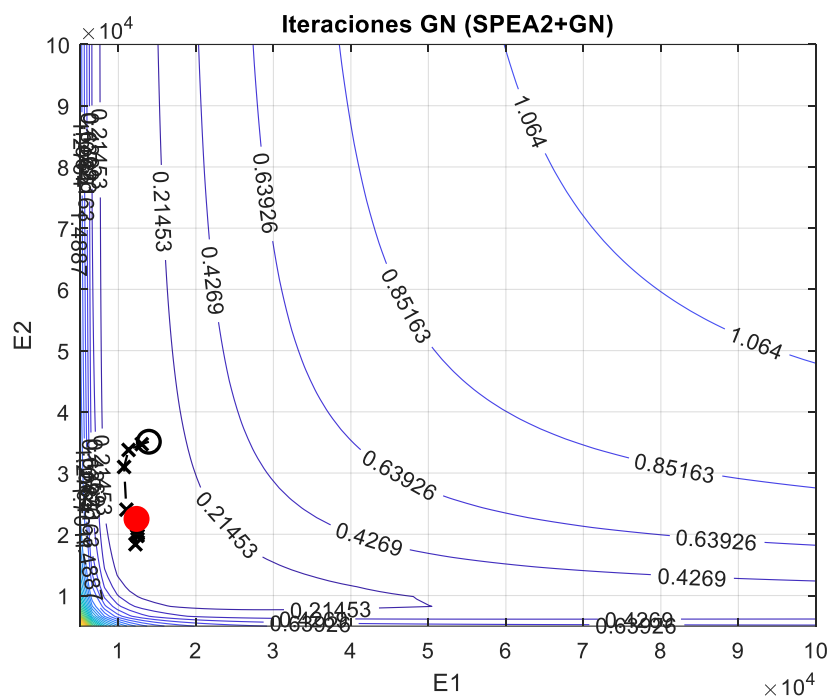


Figura A-404 – Mapa de soluciones y trayectoria de optimización. Gauss-Newton con ruido.

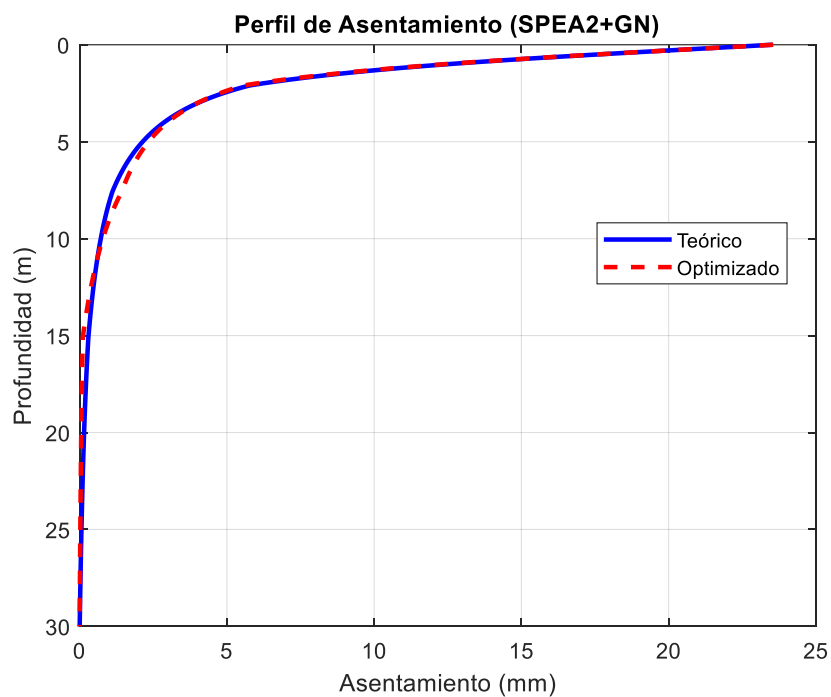


Figura A-405 – Perfil de asiento retrocalculado. Algoritmo híbrido SPEA2+GN con ruido.