



GRADO EN FÍSICA

¿Qué es lo Real? Relatividad General, Mecánica Cuántica y la Fractura Ontológica de la Física Moderna

Presentado por:

XABIER MENDIBIL LARRUCEA

Dirigido por:

EZEQUIEL VALERO LAFUENTE

CURSO ACADÉMICO 2024-2025

Resumen

Este trabajo analiza la tensión entre relatividad general y mecánica cuántica desde una perspectiva tanto teórica como ontológica. Más allá de su incompatibilidad formal, se argumenta que esta fractura revela límites profundos en nuestras categorías fundamentales de espacio, tiempo y realidad. El enfoque interdisciplinar que guía esta investigación establece un puente entre física y filosofía, mostrando que el problema de la unificación no es solo técnico o matemático, sino también una cuestión que interpela la noción misma de ser. Asimismo, este Trabajo de Fin de Grado se alinea con el **Objetivo de Desarrollo Sostenible 4 (Educación de calidad)**, al fomentar una formación crítica e integradora que incorpora la reflexión filosófica en la práctica científica. Del mismo modo, se conecta con el **ODS 9 (Industria, innovación e infraestructura)**, al contribuir a los fundamentos teóricos sobre los que se apoyan tecnologías emergentes, especialmente en el ámbito de la física fundamental y la computación cuántica.

Palabras clave: relatividad general, mecánica cuántica, ontología, filosofía de la ciencia, teoría de la unificación

Abstract

This thesis explores the tension between general relativity and quantum mechanics from both a theoretical and ontological perspective. Beyond their formal incompatibility, it argues that this fracture reveals fundamental limits in our categories of space, time, and reality. The interdisciplinary approach adopted in this work bridges physics and philosophy, suggesting that the unification problem is not merely a technical challenge but also a deep question about the nature of being. Furthermore, this Final Degree Project aligns with **Sustainable Development Goal 4 (Quality Education)**, by promoting a critical and integrative education that incorporates philosophical reflection into scientific practice. It also contributes to **SDG 9 (Industry, Innovation and Infrastructure)**, through its relevance to the theoretical foundations of emerging technologies, particularly in the fields of fundamental physics and quantum computation.

Keywords: general relativity, quantum mechanics, ontology, philosophy of science, unification theory

Prólogo

*“No hay mayor asombro que descubrir que la realidad no es como pensábamos.
Ni mayor desafío que intentar comprenderla de nuevo.”*

Este trabajo no parte de una certeza, sino de una inquietud: ¿qué es, en último término, el mundo que la física describe? Las teorías más exitosas de la ciencia contemporánea —la relatividad general y la mecánica cuántica— no solo nos ofrecen respuestas distintas: nos exigen cambiar las preguntas. Ya no basta con saber cómo se mueve la materia o cómo interactúan las partículas. Debemos preguntarnos qué es el espacio, qué es el tiempo, qué significa “medir”, y si es posible una descripción coherente de la realidad cuando las piezas fundamentales no encajan.

Este texto nace de la sospecha de que la unificación no es solamente un problema técnico o matemático, sino una interrogación sobre el ser. En la aparente incompatibilidad entre las ecuaciones de Einstein y la lógica cuántica, se abre un abismo: no solo entre teorías, sino entre formas de concebir el mundo.

Este abismo, sin embargo, no debe verse como un fracaso. Tal vez sea una grieta por la que asoma algo más profundo: la necesidad humana de comprender, de reconciliar, de hallar sentido. Porque allí donde la física se detiene, empieza la filosofía. Y acaso también comienza —una vez más— el misterio.

Xabier Mendibil
Universidad Europea de Valencia, 2025

Índice general

Índice general	4
1. Contexto Histórico	6
1. De la crisis del clasicismo al surgimiento de la cuántica	7
2. Conflicto entre Relatividad General y Mecánica Cuántica: El Gran Cisma de la Física Moderna	11
2. Fundamento Teórico	18
1. Los Pilares de lo Cuántico: Postulados y Principios Fundamentales	19
2. El Tejido del Universo: Espaciotiempo, Curvatura y Gravedad	28
3. El Problema de la Unificación: Divergencias entre lo Continuo y lo Discreto . .	33
3. Metodología	37
1. Indeterminismo cuántico y el fin del determinismo clásico: El comienzo de una nueva era	38
2. El universo sin fondo: filosofía de la covariancia general	41
3. Comprenderlo Todo: La Ambición Científica por una Teoría Unificada	44
4. Conclusion	51
Epílogo: El Límite del Saber y la Belleza del No Saber	54
Referencias	56
A. Anexo: Ejemplos desarrollados	59
A.1 Ejemplos de Mecánica Cuántica	59
A.2 Ejemplos de Relatividad General	74

“La razón humana tiene un destino peculiar: está acosada por preguntas que no puede rechazar, pero a las que tampoco puede dar respuesta, porque superan las capacidades de la razón misma.”

IMMANUEL KANT, *Crítica de la razón pura*, A vii

En el corazón de la física contemporánea se abre una fractura profunda: la relatividad general y la mecánica cuántica, los dos grandes pilares del conocimiento físico del siglo XX, ofrecen descripciones del universo que, aunque exitosas en sus respectivos dominios, parecen conceptualmente incompatibles. Una describe la gravedad como la geometría dinámica del espacio-tiempo; la otra, los procesos fundamentales de la materia como fenómenos gobernados por leyes probabilísticas y discontinuas. Esta disonancia no es únicamente técnica: afecta a la estructura misma del pensamiento físico y filosófico.

La presente investigación nace del deseo de comprender esa tensión no solo desde el cálculo y la formulación matemática, sino desde su trasfondo ontológico. A través del estudio riguroso de los fundamentos teóricos de ambas teorías, se analizarán los puntos de fricción entre sus concepciones del espacio, del tiempo, de la causalidad y de la realidad física. Se prestará especial atención a fenómenos como el entrelazamiento cuántico, la curvatura del espacio-tiempo, el problema de la medida y la cuantización de la gravedad, que condensan muchas de las dificultades para lograr una síntesis conceptual y formal.

El marco de este análisis no se limitará a la física teórica, sino que incorporará también una mirada filosófica crítica, en diálogo con distintas interpretaciones del conocimiento científico, el realismo, y el papel del observador. La teoría de cuerdas y otras aproximaciones contemporáneas serán consideradas como intentos de reconciliación, pero también como síntomas de una inquietud más profunda en el pensamiento científico.

A través de estos objetivos, el trabajo no solo pretende ofrecer un análisis exhaustivo de los problemas teóricos de la unificación, sino también abrir un espacio de reflexión filosófica sobre la naturaleza misma de la realidad y del conocimiento en la física contemporánea.

Contexto Histórico

“El problema fundamental de la teoría cuántica es que niega lo que nosotros, como físicos, deseamos: una descripción del mundo tal como es, no solo tal como lo observamos.”

ALBERT EINSTEIN, carta a Max Born, 4 de diciembre de 1926

Toda física es, en último término, una forma de preguntarse por el ser. Cuando las estructuras de la física clásica comenzaron a resquebrajarse a comienzos del siglo XX, no solo se derrumbaron modelos matemáticos o esquemas predictivos: lo que se vio comprometido fue la propia noción de realidad.

La irrupción de la mecánica cuántica y la relatividad general supuso una fractura en el pensamiento físico y filosófico. Ya no era posible hablar del mundo sin hablar también del observador, ni concebir el tiempo y el espacio como meros escenarios pasivos de los fenómenos. La física se volvió, de algún modo, autorreflexiva: comenzó a cuestionar las condiciones mismas de posibilidad de su discurso.

Este capítulo recorre ese punto de inflexión: desde la crisis de la física clásica hasta los debates ontológicos que surgieron en torno a las nuevas teorías. No se trata solo de reconstruir hechos históricos, sino de trazar el mapa de una transformación del pensamiento, en la que la realidad dejó de ser un dato para convertirse en un problema.

A través de este recorrido, se preparará el terreno conceptual sobre el cual se erigirá posteriormente el análisis teórico y ontológico que constituye el núcleo de este trabajo.

De la crisis del clasicismo al surgimiento de la cuántica

A finales del siglo XIX, la física clásica parecía haber alcanzado una comprensión casi total del mundo natural. Las leyes del movimiento de Newton, la teoría electromagnética de Maxwell y los principios de la termodinámica constituían un edificio teórico sólido y exitoso. No obstante, comenzaron a emerger resultados experimentales que no podían ser explicados por los marcos existentes, lo que dio lugar a una de las mayores revoluciones científicas de la historia: el nacimiento de la mecánica cuántica.

Uno de los primeros indicios de esta crisis vino de la observación de la **radiación del cuerpo negro**. Experimentalmente, se comprobaba que la intensidad de la radiación emitida por un objeto calentado alcanzaba un máximo a cierta frecuencia y decrecía para frecuencias más altas. Sin embargo, la ley de Rayleigh-Jeans, basada en supuestos clásicos, predecía una divergencia hacia el ultravioleta, lo que se conoció como la “catástrofe ultravioleta”.

En 1900, **Max Planck** abordó este problema desde una perspectiva radicalmente nueva. Para reproducir el espectro observado, propuso que la energía intercambiada entre la materia y la radiación no era continua, sino que solo podía variar en múltiplos discretos de una cantidad elemental:

$$E = h\nu,$$

donde h es la constante de Planck y ν la frecuencia de la radiación Planck, 1901. Esta propuesta introdujo por primera vez la idea de la *cuantización* de la energía, marcando un punto de inflexión en la física teórica.

El **efecto fotoeléctrico** reforzó aún más la necesidad de abandonar el paradigma clásico. Al iluminar una superficie metálica con luz, se observa la emisión de electrones, pero solo ocurre si la frecuencia de la luz supera cierto umbral, independientemente de su intensidad, contradiciendo lo esperado según la teoría electromagnética clásica.

En 1905, **Albert Einstein** propuso que la luz estaba compuesta por cuantos de energía o *fotones*, cada uno con energía $E = h\nu$ Einstein, 1905. Si la energía del fotón supera el potencial de extracción del electrón (la función trabajo), se produce su emisión. Esta hipótesis, que le valió el Premio Nobel en 1921, cimentó el carácter *corpuscular* de la luz y la noción de cuantos de energía.

Pero la propuesta de Einstein introdujo una paradoja fundamental: ¿cómo conciliar el carácter corpuscular de la luz con su comportamiento *ondulatorio*, evidenciado en fenómenos de interferencia? Ya en el siglo XIX, **Thomas Young** había demostrado mediante su experimento de la doble rendija que la luz produce patrones de interferencia, característicos de las ondas Young, 1804. Este comportamiento ondulatorio no solo se observó con fotones, sino también con *electrones*, lo cual confirmó que incluso partículas con masa pueden exhibir propiedades de onda.

Una evidencia contundente del aspecto corpuscular fue aportada por el experimento de **Arthur Compton** en 1923. Al hacer incidir rayos X sobre electrones libres, observó un cambio en la longitud de onda de los fotones dispersados, dependiente del ángulo de dispersión. Este fenómeno se explicaba suponiendo una colisión elástica entre el fotón y el electrón. La llamada *fórmula de Compton*:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta),$$

confirmaba la existencia de fotones con momento lineal $p = h/\lambda$ Compton, 1923.

Sobre esta base, **Louis de Broglie** propuso en 1924 una simetría conceptual: si la luz tiene propiedades corpusculares, las partículas materiales deben poseer también propiedades ondulatorias. A cada partícula con momento lineal p le correspondería una longitud de onda asociada dada por:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

hipótesis que fue confirmada experimentalmente por **Davisson y Germer** mediante experimentos de difracción de electrones De Broglie, 1924.

Todos estos resultados impulsaron una transformación radical en los cimientos conceptuales de la física. La continuidad del mundo físico, el determinismo clásico y la clara distinción entre onda y partícula fueron sustituidos por una nueva lógica: la naturaleza discreta de la energía, el carácter dual de la materia y la luz, y la necesidad de reformular la noción misma de *realidad física*.

La mecánica cuántica no solo ofrecía una solución a los problemas experimentales que habían provocado la crisis del clasicismo, sino que también abría interrogantes epistemológicos y ontológicos profundos que serán abordados en los capítulos siguientes. Así, el nacimiento de la cuántica marcó el inicio de una nueva era en la ciencia, en la que las concepciones previas sobre el mundo físico fueron puestas en cuestión de forma radical.

Dos caminos, una teoría: Schrödinger vs. Heisenberg

En los años 1925 y 1926, dos formulaciones distintas de la mecánica cuántica emergieron casi simultáneamente: la **mecánica matricial**, desarrollada por Werner Heisenberg, Max Born y Pascual Jordan, y la **mecánica ondulatoria**, formulada por Erwin Schrödinger. Ambas pretendían describir el comportamiento de los sistemas microscópicos, pero lo hacían desde perspectivas conceptuales y matemáticas aparentemente opuestas. Este episodio constituye un ejemplo paradigmático de cómo distintos marcos teóricos pueden conducir a resultados empíricamente equivalentes, aunque sustentados en intuiciones físicas radicalmente distintas.

La mecánica matricial fue la primera formulación rigurosa de la teoría cuántica. Heisenberg propuso abandonar la idea de representar trayectorias de partículas —inaccesibles en el mundo cuántico— y centrarse exclusivamente en las *magnitudes observables*, como las fre-

cuencias e intensidades del espectro atómico. En este enfoque, los observables físicos se representan mediante *matrices no conmutativas* que evolucionan en el tiempo, lo cual introduce una estructura algebraica completamente nueva, alejada de la visión clásica. Un resultado fundamental de esta formulación es la relación de conmutación:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Este conmutador expresa la no conmutatividad del espacio de operadores y da lugar de forma natural al principio de indeterminación. Como explicó Heisenberg: “La mecánica cuántica no describe lo que sucede entre dos observaciones, sino solo los resultados de las observaciones mismas” Heisenberg, 1925.

Por contraste, la mecánica ondulatoria de Schrödinger ofrecía una interpretación más visual e intuitiva. Basada en la idea de que las partículas están asociadas a *ondas reales* que evolucionan en el espacio-tiempo, esta formulación describe los sistemas cuánticos mediante funciones de onda $\psi(x, t)$, cuya evolución temporal está regida por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

Este enfoque permite representar fenómenos como la interferencia o la difracción de forma natural, y se vincula directamente con la interpretación probabilística desarrollada posteriormente por Born. Para Schrödinger, la función de onda representaba una entidad física objetiva y continua, lo que contrasta con la visión instrumentalista y más abstracta de Heisenberg.

Estas formulaciones no solo difieren en su técnica, sino también en su **trasfondo conceptual**. Mientras que la mecánica matricial es discreta, algebraica y abstracta, la mecánica ondulatoria es continua, espacial y analítica. Matemáticamente, la primera trabaja con operadores en espacios de Hilbert, y la segunda con funciones de onda y ecuaciones diferenciales. Pero más allá de lo formal, también divergen en la interpretación de la teoría: Schrödinger defendía que el formalismo cuántico describe una *realidad objetiva* —una “onda de materia”—, mientras que para Heisenberg la teoría es meramente predictiva y solo adquiere sentido en el contexto de una medición.

Estas diferencias filosóficas alimentaron una rivalidad intelectual entre ambos físicos. Schrödinger sostenía que “si uno se ve forzado a elegir entre mecánica ondulatoria y matricial, la ondulatoria es sin duda más racional” Schrödinger, 1926, aludiendo a su carácter visual y continuo. Heisenberg, por su parte, criticaba lo que consideraba una innecesaria insistencia en conservar imágenes intuitivas del mundo cuántico, que según él entorpecían el avance conceptual de la teoría.

A pesar de sus aparentes contradicciones, se demostró poco tiempo después que ambas formulaciones eran **matemáticamente equivalentes**. Este resultado fue establecido por figuras

como Paul Dirac y John von Neumann, quienes unificaron los distintos enfoques dentro del marco general de la mecánica cuántica moderna, estructurada sobre los espacios de Hilbert.

Las matrices de Heisenberg pueden ser interpretadas como operadores que actúan sobre funciones de onda en el formalismo de Schrödinger, y viceversa. Ambas expresiones contienen el mismo contenido físico esencial, aunque lo formulen desde perspectivas distintas. Como lo resumió Dirac: “Estas teorías, aunque externamente diferentes, son en realidad dos formas de la misma cosa” Dirac, 1930.

Así, la coexistencia de estos dos caminos no solo enriqueció la teoría cuántica, sino que ilustró cómo la pluralidad de enfoques puede converger en una estructura unificada, capaz de describir los fenómenos fundamentales del mundo microscópico.

La función de onda y el fin del saber absoluto: probabilidad, conocimiento y realidad

Uno de los giros ontológicos más significativos introducidos por la mecánica cuántica fue la reformulación del concepto de realidad física: el universo dejó de concebirse como un conjunto de objetos con propiedades definidas, para interpretarse como un sistema de probabilidades asociadas a observaciones. En el centro de esta transformación se encuentra la función de onda ψ , la entidad matemática que encapsula toda la información sobre un sistema cuántico.

Inicialmente, esta función fue interpretada como una “onda de materia” con existencia física real. No obstante, esta concepción pronto fue sustituida por una visión más pragmática y estadística. En 1926, **Max Born** propuso una reinterpretación crucial: el módulo cuadrado de la función de onda representa la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en una cierta región del espacio:

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$$

Desde esta perspectiva, $\psi(x, t)$ no describe una trayectoria definida ni una posición concreta de la partícula, sino únicamente la *amplitud de probabilidad* asociada a distintos resultados posibles de una medición. Esta visión, que prioriza el conocimiento estadístico por encima de una descripción ontológica completa, transformó profundamente la relación entre teoría y realidad. Como afirmó Born: “La mecánica cuántica no da una descripción completa de un proceso individual, sino solo las probabilidades de diferentes resultados” Born, 1926.

La llamada **regla de Born** permitió establecer el vínculo entre el formalismo matemático de la teoría cuántica y los resultados observables. Según esta regla, la probabilidad de obtener un cierto valor a al medir un observable $\hat{A}$ sobre un sistema en estado ψ viene dada por:

$$P(a) = |\langle a | \psi \rangle|^2$$

donde $|a\rangle$ es el autovector correspondiente al autovalor a del operador $\hat{A}$. Esta regla no solo

permite calcular probabilidades, sino que también establece un límite fundamental: en mecánica cuántica no se predicen los valores individuales de los observables, sino la *distribución estadística* de sus posibles resultados.

Este cambio constituye una ruptura profunda con el paradigma clásico. En la física newtoniana, el conocimiento exacto de las condiciones iniciales de un sistema permite, en principio, predecir con precisión su evolución futura. Por el contrario, la mecánica cuántica impone una barrera epistemológica insalvable: no es simplemente que ignoremos ciertas variables ocultas, sino que *no es posible* conocer más allá de lo que la teoría permite —las probabilidades.

La tensión entre estos dos mundos se evidenció con claridad en el debate sobre el **determinismo clásico y el indeterminismo cuántico**. Mientras que la física clásica defendía un universo determinista y continuo, la teoría cuántica propone una realidad indeterminada, regida por leyes probabilísticas fundamentales. Albert Einstein, firme defensor del determinismo, expresó su escepticismo con la célebre frase: “Dios no juega a los dados” Einstein, 1971, subrayando su rechazo a aceptar la naturaleza estadística como última palabra.

Sin embargo, experimentos clave como los de **Alain Aspect** en 1982, que confirmaron la violación de las desigualdades de Bell, consolidaron la interpretación probabilística como una característica intrínseca del mundo cuántico, y no como una manifestación de ignorancia o incompletitud teórica.

En esta línea, el filósofo de la ciencia **Tim Maudlin** afirma: “La naturaleza parece elegir un resultado entre las distintas posibilidades, no de forma determinada, sino de acuerdo con una regla estadística fundamental” Maudlin, 2011. Esta constatación implica un nuevo límite al conocimiento: no todo lo real es completamente accesible, y la *probabilidad* adquiere una dimensión ontológica. El abandono del determinismo absoluto no representa un fracaso del conocimiento, sino una expansión radical de sus fundamentos: la incertidumbre ya no es un defecto en nuestra comprensión, sino una propiedad esencial de la realidad.

Conflicto entre Relatividad General y Mecánica Cuántica: El Gran Cisma de la Física Moderna

La física del siglo XX se caracterizó por el surgimiento de dos pilares fundamentales: la **relatividad general** y la **mecánica cuántica**. Ambas teorías revolucionaron nuestra comprensión del universo, pero lo hicieron desde fundamentos conceptuales y formales radicalmente distintos. Esta disonancia profunda ha constituido uno de los mayores retos científicos y filosóficos contemporáneos, configurando lo que muchos denominan *el gran cisma de la física moderna*.

Formulada por Einstein en 1915, la relatividad general es una teoría clásica y determinista que describe la gravitación como una manifestación de la *curvatura del espacio-tiempo* causada por la presencia de masa y energía. En este marco, el universo es concebido como

una geometría suave y continua, cuya dinámica está regida por las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

La visión cuántica, en cambio, se construyó entre 1925 y 1927 a partir de los trabajos de Heisenberg, Schrödinger y Dirac, proponiendo una ontología radicalmente distinta. En la mecánica cuántica, el estado de un sistema no se describe mediante magnitudes definidas en el espacio-tiempo, sino a través de funciones de onda en un espacio de Hilbert. Esta formulación incorpora elementos como la *dualidad onda-partícula*, el *principio de incertidumbre* y la *no localidad*, fenómenos que no tienen contrapartida en el marco geométrico einsteniano.

El choque entre ambas teorías surge de sus supuestos fundamentales: mientras la relatividad general presupone un fondo continuo, causal y determinista, la mecánica cuántica introduce el *indeterminismo*, el colapso de la función de onda y la dependencia del observador. Como sintetiza Carlo Rovelli: “Mientras la mecánica cuántica describe lo microscópico en términos probabilísticos, la relatividad general describe lo macroscópico como un tejido continuo. Ambas teorías se excluyen mutuamente en su forma actual” Rovelli, 2004.

Este conflicto se vuelve aún más agudo al intentar describir fenómenos en los que ambas teorías deberían ser aplicables simultáneamente, como en el interior de los **agujeros negros** o en los **primeros instantes del universo**. En estos regímenes extremos, se espera que la gravedad tenga un comportamiento cuántico, pero la relatividad general no puede ser cuantizada mediante los procedimientos estándar que funcionan con otras interacciones.

Uno de los mayores obstáculos en este intento de unificación es que la relatividad general no es *renormalizable*. Al aplicar el formalismo de teoría cuántica de campos, las correcciones perturbativas a la gravitación conducen a divergencias que no pueden cancelarse coherentemente, imposibilitando la formulación de predicciones finitas y verificables 't Hooft y Veltman, 1974. Esto contrasta con el éxito del modelo estándar, donde la renormalización ha sido clave para su poder predictivo.

A lo largo del siglo XX surgieron distintos enfoques para abordar esta incompatibilidad, conocidos colectivamente como propuestas de **gravedad cuántica**. Uno de los primeros intentos fue la teoría de **Kaluza-Klein**, desarrollada en 1921, que buscaba unificar la gravitación con el electromagnetismo mediante la introducción de una dimensión espacial adicional. Aunque matemáticamente elegante, no logró extenderse con éxito al resto de las fuerzas.

Décadas más tarde, se propuso la **gravedad cuántica de bucles** (*loop quantum gravity*), una formulación no perturbativa que intenta cuantizar directamente la geometría del espacio-tiempo. Esta teoría introduce las llamadas *variables de Ashtekar* y predice que el espacio posee una estructura discreta a escalas del orden de la longitud de Planck Rovelli y Smolin, 1995.

En paralelo, la **teoría de cuerdas** ofreció un enfoque aún más radical: postula que las partículas fundamentales no son puntos, sino *cuerdas unidimensionales* cuyas distintas vibraciones dan lugar a las propiedades de las partículas observadas. Este marco no solo incluye

la gravedad como una consecuencia natural, sino que unifica todas las interacciones dentro de un esquema cuántico. Sin embargo, lo hace al precio de requerir dimensiones adicionales y un aparato matemático altamente abstracto y aún sin respaldo experimental Green et al., 1987.

Pese a la sofisticación de estos modelos, ninguno ha sido confirmado empíricamente hasta la fecha, y el problema de fondo persiste. Como advierte Lee Smolin: “La crisis actual en la física teórica no es solo técnica, sino filosófica: no entendemos qué es el espacio, el tiempo ni la realidad cuántica” Smolin, 2006. Este reconocimiento subraya que la unificación de la relatividad general y la mecánica cuántica no solo requiere nuevos instrumentos matemáticos, sino también una revisión profunda de nuestras categorías fundamentales de pensamiento físico y ontológico.

La revolución de la observación: la interpretación de Copenhague

Entre 1925 y 1927 se consolidó una de las revoluciones conceptuales más profundas en la historia de la ciencia: la **Interpretación de Copenhague** de la mecánica cuántica, liderada por **Niels Bohr** y **Werner Heisenberg**. A diferencia de cualquier paradigma anterior, esta interpretación introdujo una visión radicalmente nueva de la realidad física, en la cual el conocimiento del sistema depende esencialmente del acto mismo de observación. La ontología clásica del mundo —donde los objetos poseen propiedades definidas independientemente de su medición— quedó profundamente cuestionada.

Uno de los pilares de esta nueva concepción fue la **dualidad onda-partícula**, según la cual las entidades fundamentales de la naturaleza, como electrones y fotones, exhiben tanto comportamiento ondulatorio como corpuscular, dependiendo del contexto experimental. Esta dualidad, anticipada por la hipótesis de Louis de Broglie en 1924 y confirmada posteriormente por la difracción de electrones, se incorporó plenamente al formalismo cuántico mediante la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

donde λ es la longitud de onda asociada a una partícula con cantidad de movimiento p , y h es la constante de Planck. Esta ambigüedad entre partícula y onda fue sintetizada por Bohr mediante su célebre *principio de complementariedad*, según el cual: “Los aspectos ondulatorios y corpusculares no son contradictorios, sino complementarios; se excluyen mutuamente en la práctica pero son necesarios para una descripción completa del fenómeno” Bohr, 1928.

Otro concepto clave de la interpretación de Copenhague es el llamado **colapso de la función de onda**. Según esta visión, el estado de un sistema cuántico está descrito por una función de onda ψ , cuya evolución temporal está gobernada por la ecuación de Schrödinger de forma determinista. No obstante, al realizar una medición, la función de onda sufre un *colapso*

no determinista a uno de los posibles valores del observable medido. Este colapso no es un proceso dinámico derivado de las leyes físicas, sino un postulado adicional que introduce una discontinuidad fundamental entre la evolución del sistema y el acto de observación.

En palabras de Heisenberg: “La transición del posible al real ocurre en el acto de observación” Heisenberg, 1958. Con ello, se introduce por primera vez en la física el papel activo del observador, estableciendo una frontera difusa entre el sistema cuántico y el aparato de medición, el cual se trata todavía como un objeto clásico. Esta dicotomía entre sistema y observador se convierte en uno de los elementos más discutidos de la mecánica cuántica.

Un tercer componente fundamental es el **principio de incertidumbre**, formulado por Heisenberg en 1927. Este principio establece que no es posible conocer simultáneamente y con precisión arbitraria ciertos pares de observables conjugados, como la posición x y el momento p :

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Esta limitación no surge de imperfecciones tecnológicas ni de ignorancia práctica, sino que es una propiedad ontológica del formalismo cuántico. La estructura matemática de la teoría impone que la precisión con la que se puede conocer una magnitud implica necesariamente una indeterminación en su conjugada. Así, se derrumba la noción clásica de trayectoria bien definida y continua, y con ello el determinismo tradicional.

Como subrayó Max Born: “La función de onda no describe el comportamiento de un sistema individual, sino la probabilidad de encontrarlo en ciertos estados” Born, 1926. Desde esta perspectiva, la mecánica cuántica se consolida como una teoría fundamentalmente estadística, y su interpretación más ortodoxa se aleja de cualquier forma de realismo físico objetivo.

En conjunto, la interpretación de Copenhague no solo redefine las bases conceptuales de la física, sino que también plantea profundas implicaciones filosóficas: la realidad deja de ser algo dado independientemente del sujeto para convertirse en un dominio de *posibilidades* que solo se actualizan mediante la observación. Esta revolución epistemológica marcará un punto de inflexión en la relación entre conocimiento, medición y realidad física.

Más Allá del Colapso: La Mecánica Cuántica y la Naturaleza de lo Real

La revolución cuántica no solo implicó una transformación en las herramientas matemáticas y experimentales de la física, sino también una fractura profunda en su **base ontológica**. La pregunta por la naturaleza de la realidad física se volvió ineludible en un contexto donde la teoría ya no parecía describir hechos objetivos, sino solo posibilidades asociadas a observaciones. En este marco, el acto de medir asumió un rol constitutivo del devenir físico, desdibujando la línea entre epistemología y ontología. Como resultado, la interpretación de la nueva física se convirtió en un terreno fértil para posturas filosóficas diversas y, en muchos casos, enfrentadas.

En el centro de este debate emergieron dos posturas fundamentales: el **realismo científico** y el **instrumentalismo**. Según el realismo, las entidades descritas por la teoría —como ondas, partículas o estados cuánticos— tienen una existencia objetiva e independiente del observador. Por el contrario, el instrumentalismo sostiene que la teoría no nos habla de lo que “hay” en el mundo, sino que actúa como una herramienta para predecir resultados experimentales.

La **interpretación de Copenhague**, asociada a Bohr, Heisenberg y la escuela danesa, ha sido usualmente considerada como instrumentalista o incluso anti-realista. En ella, la función de onda no representa una entidad física real, sino el conocimiento que el observador tiene sobre el sistema. Esta postura introduce una ruptura radical con la tradición ontológica de la física: el lenguaje de la teoría deja de ser una descripción del ser, para convertirse en un discurso sobre la medición y la información. Como afirmó Bohr: “No hay mundo cuántico. Solo hay una descripción física abstracta” Bohr, 1963.

Frente a esta visión, físicos como **Einstein, Schrödinger y De Broglie** defendieron una posición realista, sosteniendo que si la mecánica cuántica no podía describir los estados del sistema sin apelar al acto de observación, entonces debía considerarse incompleta. Esta tensión cristalizó en el célebre **debate entre Einstein y Bohr**, que marcó un antes y un después en la filosofía de la física.

El clímax de esta disputa llegó en 1935 con la publicación del artículo de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR), titulado *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Einstein et al., 1935. En él, se argumentaba que la teoría cuántica, aunque predictivamente exitosa, era ontológicamente incompleta. El razonamiento EPR se apoyaba en un experimento mental con partículas entrelazadas: al medir una propiedad en una partícula A, quedaba automáticamente determinado el estado de una partícula B distante. Según Einstein, este fenómeno implicaba una *acción a distancia*, incompatible con la localidad relativista. Para evitar esta conclusión, el artículo sugería que las propiedades de las partículas ya estaban definidas antes de la medición, y que la función de onda simplemente no las representaba.

Bohr respondió el mismo año, señalando que el experimento EPR contenía una confusión sobre la naturaleza de la medición cuántica. En su interpretación, el acto de medir no revela una propiedad preexistente, sino que la define en el contexto experimental. En sus palabras: “No se trata de una interferencia mecánica con el sistema, sino de una interacción que define las condiciones bajo las cuales pueden hablarse de propiedades físicas” Bohr, 1935. Esta respuesta profundizó el desacuerdo ontológico: para Einstein, el mundo debía ser real, local y causal; para Bohr, la realidad era inseparable del marco experimental y de las condiciones de posibilidad de su conocimiento.

Décadas más tarde, el experimento EPR fue reinterpretado por **John Bell**, quien en 1964 formuló las célebres *desigualdades de Bell*. Estas mostraban que cualquier teoría compatible con las predicciones cuánticas debía abandonar al menos una de dos premisas: *realismo* o

localidad Bell, 1964. Los experimentos de Alain Aspect en 1982, que confirmaron la violación de estas desigualdades, dieron un respaldo empírico sin precedentes a la no localidad cuántica, revitalizando el interés filosófico por los fundamentos de la teoría.

Las implicaciones de estos resultados han resonado profundamente en la metafísica contemporánea. El fracaso del realismo local llevó a algunos autores a reformular el **realismo estructural**, que defiende que lo real no son las entidades individuales sino las relaciones y estructuras. Otros propusieron interpretaciones inspiradas en el **realismo modal**, como la teoría de los *muchos mundos*, o enfoques relacionales donde las propiedades no existen por sí mismas, sino solo en virtud de las interacciones. Además, el hecho de que la teoría describa distribuciones probabilísticas en lugar de hechos determinados ha motivado el desarrollo de **ontologías disposicionales**, en las que los sistemas poseen *potencias* o *tendencias* a actualizarse bajo ciertas condiciones.

Como resume Bernard d'Espagnat: “La física cuántica no nos dice cómo es la realidad, sino lo que podemos decir sobre ella” d'Espagnat, 2006. En este punto, la física se funde con la filosofía: el ser deja de ser completamente accesible al conocimiento, y el mundo físico se concibe como una red de correlaciones más que como una colección de propiedades. Este giro ontológico no solo reconfigura nuestra comprensión del universo, sino que plantea un desafío profundo a las nociones clásicas de objetividad, causalidad y existencia.

El Umbral del Fundamento: Más Allá de la Historia, Hacia la Esencia Teórica

La historia de la física en el siglo XX no puede entenderse sin el surgimiento y desarrollo de dos de las teorías más influyentes y revolucionarias de la ciencia moderna: la mecánica cuántica y la relatividad general. A través de este capítulo, hemos recorrido los hitos históricos y conceptuales que marcaron el nacimiento de estas teorías, así como el profundo impacto que tuvieron sobre la noción de realidad física.

Hemos visto cómo la interpretación de Copenhague y la formulación matemática de la mecánica cuántica redefinieron el papel del observador, introduciendo el concepto de colapso de la función de onda y abriendo un debate ontológico sin precedentes. También se ha analizado la dicotomía entre las formulaciones de Schrödinger y Heisenberg, así como el tránsito hacia una concepción probabilística del mundo físico. Finalmente, el debate entre Einstein y Bohr, cristalizado en el experimento EPR y en las posteriores desigualdades de Bell, ha mostrado que las preguntas filosóficas acerca de la realidad, la localidad y el conocimiento no son marginales, sino centrales para la comprensión de la teoría cuántica.

No obstante, el objetivo de este trabajo no se limita a una reconstrucción histórica. Como hemos planteado en la introducción, se trata de llevar a cabo un análisis ontológico de los fundamentos de la física moderna, con especial atención a la tensión existente entre relatividad

general y mecánica cuántica en la búsqueda de una teoría unificada.

Para abordar este análisis con el rigor que requiere, es necesario contar con un marco teórico sólido que nos permita explorar, desde sus raíces matemáticas y conceptuales, los principios que rigen ambas teorías. Por ello, el siguiente capítulo estará dedicado al fundamento teórico de la mecánica cuántica y la relatividad general.

Este capítulo teórico constituirá el andamiaje conceptual sobre el cual se construirá el análisis ontológico posterior, permitiendo identificar con mayor precisión en qué niveles surgen las tensiones entre ambas teorías, y qué concepciones del mundo subyacen a cada una.

Fundamento Teórico

“La física no nos dice cómo es la naturaleza. Nos dice cómo es nuestra conversación con ella.”

JOHN ARCHIBALD WHEELER

Toda teoría física está sustentada por un entramado conceptual y matemático que le otorga coherencia interna y capacidad predictiva. Sin embargo, cuando dos teorías fundamentales del conocimiento físico —la mecánica cuántica y la relatividad general— presentan estructuras conceptuales incompatibles, se hace imprescindible analizar con precisión sus fundamentos para comprender el origen y la profundidad de su divergencia.

Este capítulo tiene como propósito exponer de forma rigurosa los principios fundamentales que sustentan ambas teorías. En primer lugar, se estudiarán los postulados de la mecánica cuántica, su formulación matemática en términos de espacios de Hilbert, operadores y reglas probabilísticas, y los principios clave que caracterizan su lógica interna: superposición, entrelazamiento, incertidumbre y el problema de la medida. A continuación, se abordarán los principales formalismos de la teoría cuántica, como la ecuación de Schrödinger, la notación de Dirac y la imagen de Heisenberg.

Posteriormente, se desarrollarán los fundamentos de la relatividad general, entendida como una teoría geométrica del campo gravitatorio. Se explicará la estructura del espacio-tiempo como variedad diferencial curva, el papel del tensor métrico, las ecuaciones de campo de Einstein y las implicaciones físicas derivadas, tales como la existencia de geodésicas, agujeros negros y la expansión del universo.

A lo largo de este recorrido se pondrá especial atención a los puntos de fricción entre ambas teorías: la concepción del tiempo, la estructura causal del universo y los límites del conocimiento físico. Este capítulo proporciona así la base conceptual necesaria para abordar, en capítulos posteriores, un análisis ontológico de los problemas que surgen en la búsqueda de una teoría unificada.

Los Pilares de lo Cuántico: Postulados y Principios Fundamentales

La mecánica cuántica es una teoría formulada sobre una base matemática rigurosa que describe el comportamiento de los sistemas físicos a escalas microscópicas. Su estructura conceptual se articula en torno a un conjunto de postulados fundamentales que definen el espacio de estados, los observables físicos y las reglas que rigen la evolución temporal y los procesos de medición Dirac, 1930; Sakurai y Napolitano, 1994. A continuación, se exponen los principios esenciales sobre los que se construye la teoría.

Representación de Dirac: vectores *ket* y *bra*

En la formulación de la mecánica cuántica desarrollada por Paul Dirac, los vectores del espacio de Hilbert se representan mediante una notación especial conocida como **notación bra-ket**. Esta notación permite expresar de forma compacta y clara tanto los estados cuánticos como los productos internos y los operadores.

Proposición 1.1 (Notación bra y ket). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Un estado cuántico se representa por un vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, denominado **ket**. Al vector dual asociado, definido como el funcional lineal continuo $\langle\psi| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, se le denomina **bra**, y está dado por:*

$$\langle\psi|\phi\rangle = \text{producto interno entre los vectores } |\psi\rangle \text{ y } |\phi\rangle$$

Lema 1.2 (Teorema de Riesz y dualidad bra-ket). *El teorema de Riesz establece que a cada ket $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ le corresponde un único bra $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$ tal que:*

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle|\phi\rangle, |\psi\rangle\rangle_{\mathcal{H}}$$

es decir, el funcional $\langle\psi|$ actúa sobre cualquier otro vector $|\phi\rangle$ devolviendo su producto interno con $|\psi\rangle$. Así, el espacio dual $\mathcal{H}^$ se identifica canónicamente con $\mathcal{H}$.*

Ejemplo 0.1 Producto interno en notación bra-ket en $\mathbb{C}^2$

Observación adicional: El operador de la forma $|\psi\rangle\langle\phi|$ actúa sobre un ket $|\chi\rangle$ como:

$$|\psi\rangle\langle\phi||\chi\rangle = \langle\phi|\chi\rangle \cdot |\psi\rangle$$

produciendo una proyección proporcional a $|\psi\rangle$. Este tipo de operadores es central en la definición de proyectores y operadores de densidad en mecánica cuántica que veremos mas adelante.

Espacio de Hilbert, subespacios de Hilbert y estados cuánticos

En este apartado se introduce el concepto matemático fundamental sobre el cual se construye la teoría cuántica: el espacio de Hilbert. Se presentan tanto los estados puros como los estados mixtos, así como los proyectores y operadores de densidad, los cuales permiten una representación rigurosa de las posibilidades físicas del sistema.

Espacio de Hilbert y estados puros

La estructura matemática fundamental en la formulación de la mecánica cuántica es el espacio de Hilbert. En este marco, los estados de un sistema físico se representan como vectores de un espacio vectorial complejo con una estructura de producto interno que permite definir normas, ortogonalidad y proyecciones. Este espacio proporciona el escenario natural para formular de manera rigurosa los estados puros y, más adelante, los mixtos.

Proposición 1.3 (Espacio de Hilbert y representación de estados puros). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, es decir, un espacio vectorial complejo dotado de un producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ que satisface las siguientes propiedades:*

- $\langle \psi | \phi \rangle = \overline{\langle \phi | \psi \rangle}$ (hermicidad).
- $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$, con igualdad si y solo si $\psi = 0$ (positividad).
- *Completitud: toda sucesión de Cauchy en la norma inducida $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$ converge en $\mathcal{H}$.*

En este marco, los **estados puros** de un sistema cuántico se representan mediante vectores unitarios del espacio $\mathcal{H}$, identificados hasta una fase global. Esto significa que dos vectores $|\psi\rangle$ y $e^{i\theta}|\psi\rangle$ con $\theta \in \mathbb{R}$ describen el mismo estado físico:

$$|\psi\rangle \sim e^{i\theta}|\psi\rangle$$

Lema 1.4 (Rayos y espacio proyectivo). *El conjunto de clases de equivalencia de estados puros bajo la relación de fase global forma el **espacio proyectivo complejo** $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, cuyos elementos se conocen como rayos. En el caso de un espacio finito-dimensional $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, este espacio se identifica con:*

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) \simeq \mathbb{CP}^{n-1}$$

Este cociente captura de forma geométrica el hecho de que un estado cuántico puro no depende de la fase global del vector que lo representa.

Ejemplo 0.2 Estado puro de un qubit y representación en la base ortonormal

Subespacios cerrados y operadores de proyección

En mecánica cuántica, las mediciones se modelan matemáticamente mediante operadores que proyectan el estado del sistema sobre ciertos subespacios del espacio de Hilbert. Para que esto tenga sentido físico, estos operadores deben ser proyectores ortogonales, los cuales están estrechamente relacionados con los subespacios cerrados del espacio de Hilbert.

Lema 1.5 (Proyectores ortogonales). *Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ un subespacio cerrado. Existe un único operador lineal $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que:*

- $P^2 = P$ (idempotencia).
- $P^\dagger = P$ (autoadjunción).
- $\text{Im}(P) = \mathcal{S}$ (imagen igual al subespacio).

Además, el espacio de Hilbert se descompone como suma directa ortogonal:

$$\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$$

*Este operador P se denomina **proyector ortogonal** sobre el subespacio $\mathcal{S}$, y es esencial en la descripción matemática de los procesos de medición.*

Ejemplo 0.1 Producto interno en notación bra-ket en $\mathbb{C}^2$

Estados mixtos y operadores de densidad

En mecánica cuántica, no todos los estados del sistema pueden describirse completamente mediante un vector de estado puro. Existen situaciones en las que el conocimiento sobre el sistema es incompleto, como cuando se tiene una mezcla estadística de diferentes estados puros. Para describir este tipo de situaciones, se introducen los llamados **estados mixtos**, representados por operadores de densidad.

Proposición 1.6 (Estados mixtos). *Un estado cuántico general se representa mediante un operador de densidad ρ definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que cumple las siguientes condiciones:*

- $\rho = \rho^\dagger$ (es autoadjunto).
- $\rho \geq 0$ (es positivo semidefinido).
- $\text{Tr}(\rho) = 1$ (tiene traza unitaria).

*Un estado es **puro** si y solo si $\rho^2 = \rho$, es decir, si ρ es un proyector de rango uno. En caso contrario, el estado se denomina **mixto**.*

Lema 1.7 (Descomposición espectral de un operador de densidad). *Todo operador de densidad ρ admite una descomposición espectral de la forma:*

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

donde $\{|\psi_i\rangle\}$ es una base ortonormal de autovectores de ρ , $p_i \in [0, 1]$ y $\sum_i p_i = 1$. Esta representación permite interpretar al estado como una mezcla estadística de estados puros con probabilidades p_i .

Ejemplo 0.4 Estado máximamente mezclado en $\mathbb{C}^2$

Observables y operadores autoadjuntos

En mecánica cuántica, todo observable físico se asocia a un operador lineal definido sobre un espacio de Hilbert. Sin embargo, no cualquier operador sirve para esta representación: deben ser operadores autoadjuntos. Esta condición garantiza que sus valores propios —los posibles resultados de una medición— sean números reales, y que el operador sea diagonalizable en una base ortonormal, lo cual permite una interpretación probabilística coherente.

Proposición 1.8 (Operadores autoadjuntos como representación de observables). *Sea A un operador lineal densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se dice que A es **autoadjunto** si cumple:*

- $A = A^\dagger$, es decir, $\langle\phi|A\psi\rangle = \langle A\phi|\psi\rangle$ para todo $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ en el dominio de A .

En tal caso, el operador posee espectro real y puede descomponerse en términos de proyectores ortogonales asociados a sus autovalores.

Lema 1.9 (Espectro real y descomposición espectral). *Si A es un operador autoadjunto, su espectro $\sigma(A)$ está contenido en $\mathbb{R}$ y se puede expresar mediante la descomposición espectral:*

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dE(\lambda)$$

donde $E(\lambda)$ es una medida espectral proyectiva. Este resultado permite interpretar el operador como una combinación (posiblemente continua) de proyecciones sobre subespacios propios, cada uno asociado a un resultado posible de una medición.

Ejemplo 0.5 Operador $\hat{Z}$ en $\mathbb{C}^2$

Imagen de Heisenberg y comparación con la imagen de Schrödinger

En la mecánica cuántica existen dos formulaciones equivalentes pero conceptualmente distintas: la **imagen de Schrödinger** y la **imagen de Heisenberg**. Ambas proporcionan descripciones coherentes de la evolución temporal de un sistema cuántico, pero difieren en qué objetos matemáticos se consideran dinámicos y cuáles se consideran estáticos.

Imagen de Schrödinger

En esta formulación, los **observables** (operadores) permanecen fijos en el tiempo, mientras que los **estados cuánticos** evolucionan según la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

La solución formal a esta ecuación es:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad U(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}$$

donde $U(t, t_0)$ es el **operador unitario de evolución temporal**.

Imagen de Heisenberg

En esta formulación, los estados cuánticos son considerados constantes (habitualmente se fijan en $t = 0$), y toda la dependencia temporal se transfiere a los operadores (observables), los cuales evolucionan de acuerdo con:

$$\hat{A}_H(t) = U^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S U(t, t_0)$$

donde $\hat{A}_S$ es el operador en la imagen de Schrödinger, y $\hat{A}_H(t)$ su correspondiente en la imagen de Heisenberg.

La derivada temporal de un observable en la imagen de Heisenberg viene dada por la ecuación de Heisenberg:

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_H(t)] + \left(\frac{\partial \hat{A}_H(t)}{\partial t} \right)$$

donde el segundo término aparece si el operador tiene dependencia temporal explícita.

Comparación conceptual

- En la imagen de Schrödinger, los estados cambian y los operadores son fijos.
- En la imagen de Heisenberg, los operadores cambian y los estados permanecen fijos.

- Ambas imágenes son completamente equivalentes en predicciones físicas: cualquier expectativa $\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$ en Schrödinger coincide con $\langle \psi(0) | \hat{A}_H(t) | \psi(0) \rangle$ en Heisenberg.

Esta dualidad permite adoptar la formulación que resulte más conveniente para un problema determinado. En particular, la imagen de Heisenberg es útil cuando se trabaja en teorías cuánticas de campos o en sistemas con simetrías temporales destacadas.

Regla de Born y medición cuántica

Una de las características distintivas de la mecánica cuántica es su carácter probabilístico en la predicción de resultados de mediciones. La conexión entre el formalismo matemático y los resultados observables se establece mediante la llamada **Regla de Born**. Esta regla proporciona la probabilidad de obtener un determinado resultado al realizar una medición sobre un sistema cuántico descrito por un estado dado.

Proposición 1.10 (Regla de Born). *Sea $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ un estado puro normalizado y sea A un observable representado por un operador autoadjunto con descomposición espectral:*

$$A = \sum_i a_i P_i$$

donde a_i son los autovalores de A y P_i los proyectores ortogonales asociados. Entonces, la probabilidad de obtener el resultado a_i al medir A en el estado $|\psi\rangle$ es:

$$\mathbb{P}(a_i) = \langle \psi | P_i | \psi \rangle$$

Lema 1.11 (Probabilidad como valor esperado de proyección). *Dado un subespacio $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ y su proyector ortogonal P , la probabilidad de que el estado $|\psi\rangle$ colapse sobre $\mathcal{S}$ tras una medición proyectiva es:*

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}) = \langle \psi | P | \psi \rangle = \|P|\psi\rangle\|^2$$

Esta fórmula garantiza que la suma de probabilidades sobre una base ortonormal completa es igual a 1.

Ejemplo 0.6 Medición de $\hat{Z}$ en el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

Superposición, entrelazamiento e incertidumbre: las reglas del juego cuántico

En esta sección abordamos los pilares conceptuales que distinguen radicalmente a la mecánica cuántica de la física clásica. Estas características —superposición, entrelazamiento e incertidumbre— no solo definen la estructura formal de la teoría, sino también sus predicciones empíricas más sorprendentes. Comenzamos con el principio de superposición.

Principio de superposición

Una de las propiedades fundamentales de la mecánica cuántica es el principio de superposición. Este principio establece que si un sistema cuántico puede encontrarse en dos estados posibles, entonces también puede encontrarse en cualquier combinación lineal (superposición) de ellos. Esta propiedad deriva directamente de la estructura lineal del espacio de Hilbert y tiene consecuencias profundas tanto en la teoría como en la experimentación.

Proposición 1.12 (Principio de superposición). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Si $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$ son dos estados físicos (normalizados), entonces cualquier combinación lineal*

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, también representa un estado físico del sistema (después de normalización, si es necesario).

Lema 1.13 (Carácter lineal del espacio de estados). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Dado que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial, cualquier par de vectores $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$ define un subespacio generado por sus combinaciones lineales:*

$$\text{span}\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\} = \{\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

Esta propiedad se traduce físicamente en el principio de superposición: un sistema cuántico puede encontrarse en cualquier estado dentro de dicho subespacio, siempre que el vector esté normalizado (o pueda ser normalizado), ya que los estados físicos se identifican con rayos en $\mathcal{H}$. Así, la representación como suma no es un postulado arbitrario, sino consecuencia del hecho de que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo.

Ejemplo 0.7 Interferencia cuántica en una superposición de qubit

Entrelazamiento cuántico

El entrelazamiento (*entanglement*) es una de las propiedades más características y no clásicas de la mecánica cuántica. Ocurre cuando el estado de un sistema compuesto no puede describirse como producto tensorial de estados individuales de sus partes. El entrelazamiento da lugar a correlaciones que no tienen explicación en términos de variables locales ocultas y constituye la base de tecnologías cuánticas como la criptografía cuántica y la computación cuántica.

Proposición 1.14 (Estados entrelazados en espacios tensoriales). *Sea $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ dos espacios de Hilbert. El espacio total del sistema compuesto es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Un estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ se dice **entrelazado** si no puede escribirse como:*

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad \text{con } |\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A, |\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$$

Lema 1.15 (Separabilidad y descomposición de Schmidt). *Todo estado puro $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ admite una descomposición de Schmidt:*

$$|\Psi\rangle = \sum_i \lambda_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$$

donde $\{|u_i\rangle\}$ y $\{|v_i\rangle\}$ son bases ortonormales en $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$ respectivamente, y $\lambda_i \geq 0$ con $\sum_i \lambda_i^2 = 1$. El estado es separable si y solo si uno de los λ_i es igual a uno y el resto son cero.

Ejemplo 0.8 Estado de Bell entrelazado

Principio de incertidumbre de Heisenberg

El principio de incertidumbre es uno de los postulados más paradigmáticos de la mecánica cuántica. Formulado inicialmente por Werner Heisenberg en 1927, establece un límite fundamental en la precisión con la que pueden conocerse simultáneamente ciertos pares de observables, como la posición y el momento. Esta limitación no es de origen experimental, sino teórico, y refleja una característica estructural del formalismo cuántico.

Proposición 1.16 (Principio general de incertidumbre). *Sean A y B dos operadores autoadjuntos definidos sobre un mismo dominio denso de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ un estado normalizado. Entonces se cumple:*

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

donde $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$ es la desviación típica de A en el estado $|\psi\rangle$, y $[A, B] = AB - BA$ es el conmutador.

Lema 1.17 (Incertidumbre posición-momento). *Para los operadores posición $\hat{x}$ y momento $\hat{p}$ que satisfacen la relación de conmutación canónica $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, se obtiene:*

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Esta expresión concreta del principio de incertidumbre refleja la imposibilidad de preparar estados en los que ambas magnitudes estén perfectamente definidas.

Ejemplo 0.9 Estado gaussiano mínimo de incertidumbre

Principio de incertidumbre energía-tiempo

A diferencia de otras formas del principio de incertidumbre que derivan directamente de las relaciones de conmutación entre operadores (como posición y momento), el principio

de incertidumbre energía-tiempo requiere una formulación distinta, ya que el tiempo no se representa mediante un operador en la mecánica cuántica estándar.

Una expresión común es:

$$\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

donde:

- ΔE es la dispersión de energía, definida como $\Delta E = \sqrt{\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2}$.
- Δt es un tiempo característico asociado a la evolución del sistema, como el tiempo que tarda en alcanzar un estado ortogonal al inicial.

Esta relación se interpreta como una limitación fundamental a la precisión con la que se puede determinar la energía de un estado y el intervalo de tiempo durante el cual ese estado cambia de forma apreciable. Deriva de una forma más general de la desigualdad de Robertson:

$$\Delta A \cdot \Delta H \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle|$$

la cual aplica si se considera un observable $\hat{A}$ cuyo valor cambia con el tiempo bajo la evolución unitaria generada por el Hamiltoniano $\hat{H}$.

Ejemplo 0.10 Principio de incertidumbre energía-tiempo — evolución de un qubit

El problema de la medida y el colapso de la función de onda

Una de las cuestiones más debatidas en la interpretación de la mecánica cuántica es el llamado **problema de la medida**. Mientras que la evolución temporal de un sistema cuántico está regida por una ecuación determinista (la ecuación de Schrödinger), el acto de medir introduce una discontinuidad no determinista: la *proyección* del estado cuántico sobre uno de los posibles resultados observables.

Formalmente, si un sistema se encuentra inicialmente en un estado $|\psi\rangle$ y se mide un observable A con descomposición espectral $A = \sum_i a_i P_i$, la regla de Born predice la probabilidad de obtener el resultado a_i como $\langle \psi | P_i | \psi \rangle$. Tras la medición, el sistema *colapsa* al estado $P_i |\psi\rangle / \|P_i |\psi\rangle\|$.

Este proceso, aunque eficazmente predictivo, no está descrito por la dinámica unitaria del formalismo cuántico. La ausencia de una descripción física continua del colapso ha llevado a numerosos debates filosóficos y propuestas de interpretación, desde el colapso objetivo hasta los enfoques de decoherencia y los mundos múltiples.

Ejemplo 0.11 El gato de Schrödinger

El Tejido del Universo: Espaciotiempo, Curvatura y Gravedad

La relatividad general reformula nuestra comprensión de la gravedad al interpretarla como una manifestación de la curvatura del espaciotiempo. Esta concepción requiere una base geométrica sólida, donde conceptos como variedad diferenciable, tensor métrico y curvatura reemplazan a las nociones clásicas de fuerza y aceleración. En este marco, el espaciotiempo no es un fondo pasivo, sino un ente dinámico que reacciona ante la presencia de materia y energía, determinando la estructura causal y la evolución del universo.

Espaciotiempo como variedad diferencial

Proposición 2.1 (Estructura diferenciable del espaciotiempo). *El espaciotiempo se modela matemáticamente como una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ de dimensión 4, suave (C^∞), conectada y orientable, dotada de una métrica pseudo-riemanniana g de firma $(-, +, +, +)$.*

Lema 2.2 (Coordenadas locales y existencia de carta). *Dada una variedad diferenciable $\mathcal{M}$, para cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe un entorno abierto $U \subset \mathcal{M}$ y una aplicación biyectiva $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que φ es un difeomorfismo, es decir, φ y φ^{-1} son suaves.*

Ejemplo 0.12 Métrica de Minkowski

En relatividad general, el espaciotiempo no es simplemente un escenario donde ocurren los eventos físicos, sino que es una entidad matemática activa. Formalmente, se describe como una variedad de 4 dimensiones (una temporal y tres espaciales), lo que significa que, localmente, siempre podemos usar coordenadas reales para describir su estructura. Estas coordenadas no tienen un significado físico intrínseco; son simplemente herramientas matemáticas para explorar las propiedades geométricas y topológicas del espaciotiempo.

A diferencia del espacio euclídeo, aquí el espaciotiempo está equipado con una métrica de tipo pseudo-riemanniano. Esto implica que no todas las direcciones tienen la misma "firma": el tiempo tiene una contribución negativa en la distancia, lo cual permite distinguir entre trayectorias causales, espaciales o temporales. Esta estructura es esencial para describir cómo la materia y la energía afectan la geometría del universo.

Principio de equivalencia y curvatura del espacio-tiempo.

Proposición 2.3 (Principio de equivalencia fuerte). *En cualquier punto del espaciotiempo, es posible elegir un sistema de coordenadas local (llamado sistema de coordenadas inerciales locales) tal que, en una vecindad infinitesimal de ese punto, las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial, y la métrica toma la forma de Minkowski:*

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}, \quad \partial_\lambda g_{\mu\nu}(p) = 0$$

pero en general $\partial_\lambda \partial_\sigma g_{\mu\nu}(p) \neq 0$, lo que implica la existencia de curvatura.

Lema 2.4 (Curvatura como manifestación de la gravedad). *La presencia de curvatura en el espaciotiempo se codifica en el tensor de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$, definido a partir de la conexión de Levi-Civita ∇ asociada a la métrica g . La vanishing del tensor de Riemann implica que el espaciotiempo es local y globalmente plano.*

Para ilustrar estas ideas, analizamos el caso clásico de un sistema acelerado en espacio plano, cuya métrica en coordenadas adaptadas exhibe efectos similares a los de un campo gravitatorio real.

Ejemplo 0.13 Sistema uniformemente acelerado y el principio de equivalencia

El principio de equivalencia es el corazón conceptual de la relatividad general. Afirma que los efectos de un campo gravitatorio son localmente indistinguibles de los efectos de una aceleración. En términos formales, esto significa que la gravedad no se describe por fuerzas en el sentido newtoniano, sino por la geometría del espaciotiempo.

En una región infinitesimalmente pequeña alrededor de un punto, siempre podemos encontrar coordenadas que “anulan” el campo gravitatorio, de modo que la física se comporta como si estuviéramos en un espacio plano. Sin embargo, la curvatura aparece al considerar la segunda derivada de la métrica, es decir, cómo cambia el espacio-tiempo de un punto a otro. Esta curvatura es precisamente lo que da lugar a los fenómenos gravitatorios a gran escala.

Tensores métricos y ecuaciones de campo de Einstein

Proposición 2.5 (Tensor métrico). *El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es una forma bilineal simétrica definida sobre la variedad diferenciable $\mathcal{M}$, que asigna una distancia infinitesimal entre dos puntos en el espaciotiempo. Permite definir productos escalares, longitudes, ángulos y el intervalo de línea ds^2 mediante:*

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

En relatividad general, $g_{\mu\nu}$ tiene firma $(-, +, +, +)$ y varía con la presencia de masa y energía.

Interpretación geométrica: El tensor métrico contiene toda la información sobre la geometría del espaciotiempo. A partir de él se construyen los objetos que definen la dinámica gravitatoria: las conexiones, los tensores de curvatura y, finalmente, el tensor de Einstein.

Ejemplo 0.14 Cálculo detallado de la longitud de un meridiano en una esfera con la métrica

Proposición 2.6 (Ecuaciones de campo de Einstein). *La dinámica del espaciotiempo está gobernada por las ecuaciones de campo de Einstein, que relacionan la geometría (curvatura) con el contenido material (energía y momento):*

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Lema 2.7 (Conservación de la energía-momento). *La conservación de la energía y el momento se expresa geométricamente mediante:*

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

Estas ecuaciones no gobiernan el movimiento de una partícula individual, sino la estructura del espaciotiempo mismo. Materia y energía determinan cómo se curva el espaciotiempo, y esta curvatura dicta cómo se mueven los cuerpos.

Ejemplo 0.15 Solución del campo de Einstein en el vacío: métrica de Schwarzschild

Ejemplo 0.16 Cálculo del intervalo y del tiempo propio en la métrica de Schwarzschild

El tensor métrico contiene toda la información sobre la geometría del espaciotiempo. A partir de él se definen las conexiones, los tensores de curvatura y finalmente el tensor de Einstein, que cuantifica cómo se curva el espaciotiempo en presencia de materia.

Las ecuaciones de campo de Einstein representan el núcleo de la relatividad general: no se trata de una ecuación de movimiento para partículas individuales, sino de una ecuación para la geometría del universo entero. La materia y energía determinan cómo se curva el espaciotiempo, y esta curvatura, a su vez, determina cómo se mueven las partículas. Este principio se resume en la famosa frase: “La materia le dice al espacio cómo curvarse; la curvatura le dice a la materia cómo moverse” Misner et al., 1973.

Además, la conservación del tensor energía-momento, expresada por la divergencia nula $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, asegura la consistencia interna de la teoría y está profundamente relacionada con las simetrías del espaciotiempo a través del teorema de Noether.

Esta curvatura no es sólo una propiedad matemática: es la forma en que la relatividad general reinterpreta lo que entendemos por “gravedad”. El paso de una descripción dinámica (fuerza) a una puramente geométrica (curvatura) representa una verdadera fractura conceptual respecto a la física clásica, y da lugar a nuevas preguntas ontológicas sobre la naturaleza misma del espacio y el tiempo.

Geodésicas, Agujeros Negros y la Expansión del Cosmos: Implicaciones de la Relatividad

La estructura geométrica del espaciotiempo, tal como la describe la relatividad general, no sólo determina cómo se propaga la luz o cómo se mueven las partículas, sino que también da lugar a fenómenos radicales como los agujeros negros o la expansión acelerada del universo. En esta sección se exploran las principales consecuencias físicas de la curvatura: desde las trayectorias que siguen los cuerpos (geodésicas), hasta las soluciones exactas más extremas de las ecuaciones de Einstein, que conducen a horizontes de sucesos y singularidades, así como a los modelos que describen la evolución a gran escala del cosmos.

Cada uno de estos temas refleja un aspecto fundamental de la interacción entre geometría y física, y revela cómo la relatividad general trasciende el marco de una teoría gravitatoria para convertirse en una teoría del universo.

Geodésicas y trayectorias en campos gravitatorios.

Proposición 2.8 (Ecuación geodésica). *Una geodésica en una variedad pseudo-riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ es una curva $x^\mu(\lambda)$ que extrema el funcional de longitud:*

$$S[x^\mu(\lambda)] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

La condición de estacionariedad de esta acción conduce a la ecuación geodésica:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica g , y λ es un parámetro afín (como el tiempo propio τ en trayectorias temporales).

Lema 2.9 (Trayectorias de libre caída). *Las geodésicas temporales describen el movimiento de partículas libres bajo la única influencia de la geometría del espaciotiempo, es decir, sin fuerzas externas. La métrica determina las conexiones, y estas a su vez dictan cómo se curva la trayectoria de una partícula al seguir la línea de máxima inercia: la geodésica.*

Ejemplo 0.17 Caída radial desde el reposo en el infinito en la métrica de Schwarzschild

Agujeros negros y singularidades

Los agujeros negros son una de las consecuencias más extremas de la relatividad general. Se originan cuando una región del espaciotiempo se curva tanto que forma un horizonte de sucesos: una superficie que actúa como una frontera causal, más allá de la cual ningún evento puede influir en el exterior. Desde el punto de vista geométrico, esta frontera emerge de soluciones exactas de las ecuaciones de campo, como la métrica de Schwarzschild, Reissner–Nordström o Kerr.

Las singularidades, por su parte, representan los límites del modelo clásico: regiones donde las cantidades físicas, como la curvatura, dejan de estar definidas y divergen. Aunque las singularidades no son observables directamente, sus efectos globales en la estructura causal del espaciotiempo son fundamentales para comprender los límites y alcances de la teoría.

Proposición 2.10 (Horizonte de sucesos). *En una variedad espacio-temporal $(\mathcal{M}, g)$, el horizonte de sucesos $\mathcal{H}$ de un agujero negro es el borde del conjunto de puntos desde los cuales es posible enviar señales al infinito futuro nulo $\mathcal{I}^+$. Es una superficie nula generada por geodésicas de luz que permanecen en $\mathcal{H}$.*

En la métrica de Schwarzschild, el horizonte de sucesos se localiza en $r = r_s = 2GM$, donde la función métrica $g_{tt} \rightarrow 0$ y $g_{rr} \rightarrow \infty$.

Lema 2.11 (Singularidad curvatural en Schwarzschild). *La métrica de Schwarzschild presenta una singularidad física en $r = 0$, donde los invariantes escalares de curvatura, como el escalar de Kretschmann*

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$$

divergen:

$$K = \frac{48G^2M^2}{r^6} \longrightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow 0$$

Esta singularidad no puede eliminarse mediante un cambio de coordenadas, a diferencia del comportamiento en $r = 2GM$, que es una singularidad de coordenadas.

Ejemplo 0.18 Localización del horizonte de sucesos en Schwarzschild

La localización del horizonte de sucesos en $r = 2GM$ revela una propiedad esencial del espaciotiempo en presencia de una fuente compacta de masa: más allá de esta superficie, la causalidad se ve radicalmente modificada. Ninguna señal, partícula ni información puede escapar del interior del horizonte hacia el exterior. Desde el punto de vista de un observador distante, los procesos que ocurren cerca del horizonte parecen detenerse, dando lugar a una dilatación temporal extrema. No obstante, para un observador en caída libre, el cruce del horizonte ocurre en un tiempo propio perfectamente finito, sin ningún comportamiento anómalo localmente medible.

Este fenómeno no es el resultado de una “fuerza” en el sentido clásico, sino una consecuencia directa de la estructura geométrica del espaciotiempo. El horizonte de sucesos marca un cambio topológico en las trayectorias posibles, separando regiones con propiedades causalmente distintas. Esta frontera geométrica no es una superficie material, sino una característica global del espaciotiempo que emerge de la solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein.

Así, el horizonte de sucesos no sólo representa un límite físico, sino también epistemológico: establece la frontera entre lo observable y lo que queda más allá de cualquier posibilidad de interacción causal con el resto del universo.

Expansión del universo y modelos cosmológicos

A escalas suficientemente grandes, las observaciones indican que el universo es homogéneo e isótropo, es decir, se ve aproximadamente igual en todas las direcciones y en todos los lugares. Este principio cosmológico, combinado con la relatividad general, da lugar a una clase específica de modelos conocidos como *modelos de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker* (FLRW), donde el espaciotiempo se describe mediante una métrica que depende únicamente del tiempo cosmológico.

El uso de una métrica dinámica permite estudiar cómo evoluciona la geometría del universo en función del tiempo, incorporando los efectos de la expansión cósmica, la curvatura espacial y la presencia de distintos contenidos materiales, como materia, radiación o constante cosmológica. Estos modelos no sólo describen la expansión actual del universo, sino que también permiten explorar escenarios pasados (como el Big Bang) o futuros (colapso, expansión acelerada).

Proposición 2.12 (Métrica de FLRW). *La clase de modelos cosmológicos homogéneos e isotropos en relatividad general se describe mediante la métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW):*

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]$$

donde:

- t es el tiempo cosmológico
- $a(t)$ es el factor de escala, que describe cómo evoluciona el tamaño relativo del universo
- $k \in \{-1, 0, +1\}$ representa la curvatura espacial: abierta (hiperbólica), plana o cerrada (esférica)

Lema 2.13 (Interpretación del factor de escala). *El factor de escala $a(t)$ determina cómo se expanden o contraen las distancias entre puntos comóviles del universo. Para dos galaxias fijas en coordenadas espaciales r_1 y r_2 , la distancia física entre ellas crece (o decrece) proporcionalmente a $a(t)$. Su derivada $\dot{a}(t)$ está relacionada con la tasa de expansión, y el cociente*

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

define el parámetro de Hubble, que cuantifica la velocidad relativa de separación entre galaxias por unidad de distancia.

Ejemplo 0.19 Obtención de la primera ecuación de Friedmann a partir de la métrica FLRW

El Problema de la Unificación: Divergencias entre lo Continuo y lo Discreto

La búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad revela una fractura fundamental en el seno de la física moderna. Intentar unificar la relatividad general y la mecánica cuántica ha conducido no sólo a dificultades técnicas —como la aparición de divergencias no renormalizables al intentar cuantizar el campo gravitatorio— sino también a incompatibilidades conceptuales

profundas. Dos de los puntos más críticos de este conflicto son la distinta concepción del tiempo en ambas teorías y la tensión entre la causalidad clásica y la indeterminación cuántica.

Incompatibilidades en la Cuantización de la Relatividad General

La relatividad general describe la gravedad como geometría: el espaciotiempo no es un fondo fijo, sino una entidad dinámica cuya métrica depende del contenido de energía y momento. En cambio, la mecánica cuántica estándar presupone un fondo espaciotemporal inmutable sobre el que se define la evolución de los sistemas.

Cuando se intenta aplicar los métodos de cuantización canónica al campo gravitatorio, aparecen divergencias insalvables. Estas divergencias surgen porque, al intentar tratar el campo gravitatorio como un campo cuántico sobre un fondo (como se hace con el electromagnetismo en QED), los términos no lineales de la métrica generan infinitos en los bucles de Feynman que no pueden ser absorbidos mediante un número finito de constantes de acoplo. A diferencia de las teorías cuánticas renormalizables, la gravedad cuántica —formulada como teoría de campo perturbativa— requiere infinitos contra-términos de renormalización, lo que la hace impredecitiva en el marco estándar del formalismo de campos DeWitt, 1967a; Donoghue, 1994; Weinberg, 1995.

Para analizar formalmente la renormalizabilidad de la gravedad cuántica, se considera la constante de Newton G en unidades naturales ($\hbar = c = 1$). En estas unidades, su dimensión es:

$$[G] = (\text{masa})^{-2}$$

Esto implica que la constante de acoplo efectiva en un proceso con energía característica E es:

$$g_{\text{eff}} \sim GE^2$$

y por tanto crece con la energía. A diferencia del caso del electromagnetismo (donde $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ es adimensional), en gravedad la constante de acoplo es *irrelevante* en el sentido del grupo de renormalización: se vuelve fuerte a altas energías, lo que invalida el tratamiento perturbativo. Este comportamiento no es exclusivo de cuatro dimensiones: en general, la no renormalizabilidad de la gravedad clásica se mantiene para $d > 2$, lo que ha motivado el estudio de formulaciones alternativas en distintos marcos dimensionales.

Al calcular las correcciones cuánticas a la métrica mediante diagramas de Feynman, las divergencias que aparecen en los lazos no pueden ser absorbidas en la forma original de la acción de Einstein-Hilbert DeWitt, 1967a; Goroff y Sagnotti, 1985:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R$$

sino que requieren la adición de términos cuadráticos (o de orden superior) en la curvatura,

como:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left(R^2, \quad R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right)$$

A cada nuevo orden de la expansión en G , aparecen nuevos términos divergentes que no estaban presentes en la acción original. Por tanto, el número de parámetros independientes a determinar experimentalmente es infinito: la teoría se vuelve *no renormalizable* en el sentido tradicional. Este resultado fue formalizado por 't Hooft y Veltman, quienes mostraron que ya a un lazo, en presencia de materia, la teoría genera contraterminos de tipo R^2 , incompatibles con la renormalizabilidad estricta de la teoría 't Hooft y Veltman, 1974.

Al intentar construir una teoría cuántica de la gravedad mediante una expansión perturbativa alrededor de un fondo plano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, el campo $h_{\mu\nu}$ actúa como partícula cuántica —el gravitón— DeWitt, 1967b; Feynman et al., 1995. Las auto-interacciones del gravitón, derivadas de los términos no lineales en R , generan bucles en los diagramas de Feynman que conducen a integrales divergentes del tipo:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2}$$

En particular, la formulación hamiltoniana conduce a la llamada ecuación de Wheeler–DeWitt, que representa una cuantización del hamiltoniano gravitatorio DeWitt, 1967c; Wheeler, 1968. En ausencia de materia, esta ecuación toma la forma:

$$\hat{H}\Psi[g_{ij}] = 0$$

La variable g_{ij} representa la métrica espacial tridimensional en una foliación del espaciotiempo, y $\Psi[g_{ij}]$ es una funcional del espacio de métricas. El operador hamiltoniano $\hat{H}$ contiene términos de segundo orden en derivadas funcionales con respecto a g_{ij} , análogos al operador laplaciano, junto con el escalar de curvatura y otros términos derivados de la acción de Einstein–Hilbert. La ausencia de un parámetro temporal explícito en esta ecuación refleja la reparametrización temporal de la teoría, y plantea profundas dificultades interpretativas: ¿cómo puede surgir una noción de tiempo en una ecuación donde no está presente?

Así, la cuantización de la relatividad general no sólo genera problemas matemáticos, sino que pone en crisis la estructura lógica de la teoría cuántica misma. Estas dificultades han motivado el desarrollo de enfoques alternativos como la gravedad cuántica de bucles, la teoría de cuerdas o la gravitación emergente.

El Tiempo en Relatividad General y Mecánica Cuántica: Un Concepto en Conflicto

En la relatividad general, el tiempo forma parte del entramado geométrico del universo. No es absoluto ni externo, sino una coordenada dinámica, afectada por la curvatura del espacio-

tiempo y la distribución de energía. Esta concepción elimina la existencia de un tiempo global y uniforme, y da lugar a una estructura donde cada observador puede experimentar el tiempo de forma distinta.

En contraste, la mecánica cuántica tradicional considera el tiempo como un parámetro externo, absoluto y universal. La evolución de un sistema cuántico está gobernada por la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t)$$

en la que el tiempo no es un observable sino un parámetro fijo. No hay incertidumbre asociada al tiempo, y no se le aplica el mismo tratamiento operatorial que a las variables dinámicas del sistema.

Esta asimetría conceptual conduce al llamado “problema del tiempo” en gravedad cuántica. Si el tiempo mismo es una variable dinámica que debe ser cuantizada junto con la geometría, ¿cómo puede formularse una evolución cuántica coherente? ¿Cómo emerge el tiempo desde una ecuación como la de Wheeler–DeWitt, que no lo contiene? Estas preguntas no tienen aún una respuesta definitiva, y reflejan la profundidad del conflicto entre ambas teorías.

Otro aspecto crucial en esta fractura entre la relatividad general y la mecánica cuántica es la tensión entre la estructura causal del espaciotiempo clásico y la indeterminación inherente al formalismo cuántico.

En la teoría de Einstein, la causalidad está codificada en la estructura del cono de luz: los eventos pueden influirse mutuamente sólo si se encuentran dentro de la región definida por trayectorias causales. Este marco es plenamente determinista y local.

En cambio, aunque la ecuación de Schrödinger es formalmente determinista, la mecánica cuántica introduce discontinuidades en el proceso de medición. El principio de incertidumbre,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2},$$

impide conocer simultáneamente ciertas variables con precisión arbitraria. En particular, la relación energía-tiempo implica fluctuaciones cuánticas que pueden, en ciertos contextos, desafiar las restricciones causales clásicas.

Además, fenómenos como el entrelazamiento cuántico sugieren correlaciones instantáneas entre partículas separadas espacialmente, lo que parece violar la localidad exigida por la relatividad. Aunque no se transmite información más rápido que la luz, el mero hecho de que exista una conexión no mediada plantea interrogantes profundos sobre la compatibilidad entre ambas estructuras teóricas.

En conjunto, estos conflictos no son meros detalles técnicos, sino señales de una fractura ontológica entre dos visiones del mundo: una basada en lo continuo y determinista; la otra, en lo discreto y probabilista. La resolución de esta tensión podría requerir no sólo una nueva teoría física, sino una transformación en nuestra comprensión filosófica del tiempo, la causalidad y la realidad misma.

Metodología

“La filosofía de la ciencia es tan útil a los científicos como la ornitología a los pájaros.”

RICHARD FEYNMAN

La historia de la física en el siglo XX no puede comprenderse plenamente sin atender a las profundas implicaciones filosóficas que acompañaron sus desarrollos teóricos más radicales. La mecánica cuántica y la relatividad general, más que meras herramientas matemáticas para describir fenómenos, suponen transformaciones en la forma misma de pensar la realidad, el conocimiento y el lugar del ser humano dentro del cosmos. Este capítulo busca explorar, desde una perspectiva metodológica y filosófica, cómo estas dos teorías fundamentales de la física moderna implican marcos epistémicos y ontológicos divergentes, y qué tensiones generan en la búsqueda de una posible unificación.

El objetivo no es únicamente presentar las bases conceptuales de ambas teorías, sino también analizar sus presupuestos filosóficos: el papel del determinismo, el problema de la objetividad, la presencia (o ausencia) del observador, y la redefinición de nociones clásicas como espacio, tiempo, causalidad y realidad. De este modo, se atiende a la relación entre física y filosofía como un diálogo activo, en el que cada teoría no solo propone leyes, sino también una imagen del mundo y del conocimiento que lo hace posible.

Partiendo de una lectura profunda de la mecánica cuántica, se abordarán cuestiones como el indeterminismo, el estatuto de la función de onda, el papel del observador y los desafíos ontológicos planteados por experimentos como la paradoja EPR o las desigualdades de Bell. Posteriormente, se planteará cómo la relatividad general impone una visión geométrica de la gravedad y una concepción del espacio-tiempo radicalmente distinta, en la que desaparecen estructuras absolutas y se impone una concepción relacional.

Finalmente, este capítulo indagará en las motivaciones filosóficas y epistemológicas detrás del ideal de unificación, preguntándose si esta aspiración responde a una necesidad científica, a una búsqueda metafísica o a un impulso profundamente humano por la coherencia y la totalidad.

Indeterminismo cuántico y el fin del determinismo clásico: El comienzo de una nueva era

Desde sus inicios, la física moderna se articuló en torno a una concepción profundamente **determinista** de la naturaleza. En la formulación de Newton, las leyes del movimiento y de la gravitación universal no solo explicaban los fenómenos celestes y terrestres, sino que inauguraban un paradigma en el que el universo entero podía describirse como una máquina matemática. Esta imagen alcanzó su expresión más radical con Laplace, quien imaginó una inteligencia capaz de conocer todas las condiciones del universo en un instante dado, y predecir con absoluta certeza tanto el pasado como el futuro.

Este ideal no era meramente una conjetura física, sino también una expresión del optimismo ilustrado respecto a la *razón* como facultad capaz de descifrar el orden necesario del mundo. En esta línea, el determinismo no solo era una hipótesis científica, sino una manifestación de la racionalidad misma. Como señaló Spinoza en su ética racionalista: “En la naturaleza no ocurre nada que sea contingente, sino todo lo necesario” Spinoza, 1677.

Esta concepción del universo como sistema causalmente cerrado se sostenía también desde una perspectiva filosófica trascendental. Para Kant, la causalidad no era simplemente una propiedad del mundo, sino una *categoría a priori del entendimiento*, indispensable para organizar la experiencia objetiva. Así, el determinismo se constituía como una condición de posibilidad del conocimiento científico.

Sin embargo, la aparición de la física cuántica alteró profundamente este esquema. El **principio de indeterminación** de Heisenberg introdujo un límite fundamental a la precisión con la que pueden conocerse ciertas parejas de magnitudes físicas, como posición y momento. Ya no se trata de una ignorancia técnica ni de una limitación epistemológica provisional: es el propio ser del sistema el que no se deja determinar en los términos clásicos. Como explicó Heisenberg: “La noción de una trayectoria exacta de una partícula pierde su significado en el ámbito cuántico” Heisenberg, 1958.

Esta constatación obliga a repensar el lugar de la causalidad en la ciencia. Si la mecánica cuántica es correcta, entonces la causalidad clásica ya no puede aplicarse sin restricciones. Surge así una inquietud filosófica: ¿significa esto que el mundo ha dejado de ser racionalmente comprensible? ¿O más bien que nuestras categorías conceptuales deben adaptarse a una nueva fenomenología que desafía las intuiciones tradicionales?

La ruptura con el determinismo implica, además, una **transformación profunda en la imagen de la ciencia**. Ya no se trata de descubrir leyes inmutables de un mecanismo universal, sino de trabajar con *probabilidades*, *superposiciones* y *colapsos*. La predicción pierde su carácter absoluto y deviene estadística. En este contexto, filósofos como Karl Popper encontraron en el indeterminismo cuántico no una derrota de la racionalidad, sino una oportunidad para repensarla. Según Popper, “aceptar el indeterminismo es, en cierto modo, liberar a la naturaleza de

nuestras categorías fijas” Popper, 1982. Frente al mecanicismo del siglo XIX, la cuántica abre la posibilidad de una ciencia que admite la *contingencia* como parte constitutiva del mundo físico.

No obstante, esta apertura no implica un abandono del orden o la ley. La mecánica cuántica conserva una estructura matemática rigurosa, con principios de simetría y formalismos altamente precisos. Pero su interpretación se vuelve menos intuitiva, más abstracta, y profundamente dependiente del *contexto experimental*.

En este marco, el abandono del determinismo clásico conduce inevitablemente a un **replanteamiento del propio concepto de realidad**. ¿Qué significa, por ejemplo, que una partícula no tenga posición definida antes de ser medida? ¿Cómo debemos interpretar una superposición cuántica: como una coexistencia real de posibilidades, como una descripción incompleta, o como una mera herramienta predictiva?

Estas preguntas han estimulado el desarrollo de nuevas ontologías cuánticas. Desde el *realismo estructural*, que privilegia las relaciones y simetrías por encima de las entidades individuales, hasta el enfoque *relacional*, que entiende las propiedades como dependientes de la interacción entre sistemas, se multiplican las propuestas para comprender la realidad cuántica. En algunas corrientes, como las *ontologías disposicionales*, se sostiene que las entidades no poseen propiedades actuales, sino potencias o tendencias a manifestarse bajo determinadas condiciones.

Tal como señaló Cassirer: “La física moderna no se contenta con registrar hechos, sino que transforma la noción misma de hecho y de objeto” Cassirer, 1936. En este sentido, la mecánica cuántica no solo modifica nuestras predicciones sobre el comportamiento del mundo, sino que altera la estructura conceptual a partir de la cual construimos lo real.

Así, el **indeterminismo cuántico** no solo cuestiona el modelo clásico de predicción absoluta, sino que transforma las propias condiciones del conocimiento científico. La ruptura epistemológica que introduce nos conduce, de forma inevitable, a una **problemática ontológica**: si la física ya no describe trayectorias definidas, ni causas precisas, ni propiedades intrínsecas, ¿qué dice entonces la teoría sobre la realidad? ¿Cuál es el estatuto ontológico de la función de onda? ¿Qué papel cumple el observador en la constitución del fenómeno físico?

Estas preguntas marcan el umbral de una nueva era del pensamiento físico, en la que la física teórica y la filosofía convergen para explorar no solo lo que el mundo *hace*, sino lo que el mundo *es*.

Entre el ser y la observación: el problema de la medida cuántica

Más allá de los desafíos que la mecánica cuántica impone al determinismo clásico, emerge una pregunta aún más radical: ¿qué es lo que realmente describe la teoría? ¿Existe

una realidad física independiente de nuestras mediciones, o es la observación un componente constitutivo del fenómeno? Esta inquietud no es meramente técnica; es, en su núcleo, profundamente filosófica.

El ejemplo más paradigmático de esta tensión es el estatuto ontológico de la función de onda. ¿Qué representa exactamente ψ ? ¿Se trata de una entidad física real, como sugería Schrödinger, o de un mero instrumento epistemológico, como sostenía Bohr? La ambigüedad nace del hecho de que la función de onda evoluciona de manera determinista según la ecuación de Schrödinger, pero colapsa de forma no determinista al realizarse una medición. Esta dualidad sugiere una fractura entre el tiempo interno del sistema y el tiempo del observador, entre lo que ocurre y lo que se puede conocer.

En esta línea, Heisenberg sostiene que el fenómeno cuántico no puede desligarse del proceso de observación que lo hace aparecer. La noción clásica de objetividad debe ceder ante una nueva forma de comprender la relación entre teoría y experiencia. La mecánica cuántica, desde esta perspectiva, no describe objetos con propiedades fijas, sino que ofrece un marco formal desde el cual emergen regularidades cuando se interviene sobre el sistema. La objetividad se redefine como invariancia bajo condiciones experimentales reproducibles, no como independencia del observador.

Esta cuestión ha sido retomada en la filosofía de la ciencia contemporánea. Hilary Putnam, por ejemplo, advierte que “negar la realidad de lo que no se puede observar es cerrar la puerta al conocimiento mismo” Putnam, 1975. En lugar de desechar el realismo, algunos proponen repensarlo en términos de un *realismo estructural*, donde lo que la física describe no son entidades individuales, sino las relaciones y estructuras que organizan lo real. De este modo, la función de onda puede entenderse como la expresión de una estructura potencial del sistema, no como una descripción directa de su estado actual.

Este desplazamiento ontológico lleva inevitablemente a reconsiderar la noción misma de **objetividad**. En el marco clásico, la objetividad se entendía como la independencia del objeto frente al sujeto; en el marco cuántico, la observación no se limita a registrar un fenómeno, sino que lo condiciona, lo configura, incluso lo hace posible. Bohr insistía en que “los fenómenos atómicos no aparecen como fenómenos independientes del aparato de observación. Todo experimento debe ser descrito como una totalidad indivisible que incluye el aparato y el sistema” Bohr, 1949. Esta visión transforma la epistemología científica desde dentro, y puede ser leída desde una clave fenomenológica: el conocimiento se constituye en la correlación entre sujeto y objeto.

De hecho, la mecánica cuántica reactiva ciertas intuiciones presentes en la filosofía trascendental de Kant. Al igual que en Kant no accedemos a la “cosa en sí” sino a fenómenos mediados por las condiciones del conocimiento, en la cuántica accedemos a resultados estructurados por el marco experimental. Algunos intérpretes han leído a Bohr como un neokantiano, en tanto reemplaza la objetividad por la *intersubjetividad*: el consenso entre observadores bajo condiciones experimentales bien definidas se convierte en la nueva garantía de sentido.

Esta problemática cobra forma concreta en la célebre **paradoja EPR**, formulada por Einstein, Podolsky y Rosen en 1935. Su objetivo era demostrar la incompletitud de la mecánica cuántica. El argumento partía del principio de localidad y del supuesto de realidad: si podemos predecir con certeza el valor de una propiedad sin perturbar el sistema, entonces esa propiedad debe ser real. Sin embargo, la mecánica cuántica, al predecir correlaciones perfectas entre partículas entrelazadas, parecía violar este principio sin ofrecer una descripción completa del sistema.

Einstein consideraba que aceptar estas correlaciones implicaba admitir una *acción a distancia* instantánea, lo cual entraba en conflicto con la relatividad. Para él, la única salida coherente era postular la existencia de *variables ocultas* que devolvieran una descripción objetiva del sistema sin necesidad del observador.

La respuesta más decisiva a este planteamiento llegó en 1964, cuando **John Bell** formuló un teorema que demostraba que ninguna teoría de variables ocultas *locales* podía reproducir todas las predicciones de la mecánica cuántica Bell, 1964. Este resultado convirtió un debate ontológico en una cuestión empíricamente contrastable. Las *desigualdades de Bell* ofrecieron una herramienta experimental para poner a prueba el realismo local.

Los experimentos realizados posteriormente —especialmente los de **Alain Aspect** en los años ochenta, y los experimentos sin lagunas del siglo XXI— confirmaron de manera robusta la violación de dichas desigualdades. Esto implica que al menos una de dos hipótesis debe ser abandonada: o bien el *realismo*, o bien la *localidad*.

Como expresó el propio Bell: “La idea de que el mundo está realmente ahí, incluso cuando no se observa, parece estar en conflicto con los resultados de estos experimentos” Bell, 1987. La consecuencia es filosóficamente profunda: el mundo cuántico no solo desafía nuestras expectativas físicas, sino que pone en tensión nuestras categorías más fundamentales —la individualidad del objeto, la causalidad local, la independencia entre el ser y su manifestación—. La física contemporánea, en este punto, se ve obligada a dialogar con la filosofía para explorar nuevos marcos ontológicos capaces de dar cuenta de un mundo en el que la realidad parece inseparable del acto de observarla.

El universo sin fondo: filosofía de la covariancia general

En el núcleo formal de la relatividad general se encuentra el **principio de covariancia general**: la exigencia de que las leyes físicas conserven su forma bajo cualquier transformación diferenciable de coordenadas. Esta condición, lejos de ser un simple requisito técnico, encierra un contenido filosófico profundo. Implica que ninguna estructura de fondo —ni espacial ni temporal— goza de prioridad ontológica. La física debe formularse sin depender de marcos de referencia privilegiados, lo que equivale a decir que el conocimiento no puede apoyarse en supuestos absolutos.

Esta formulación representa una ruptura radical con la tradición newtoniana y kantiana. En el pensamiento de Newton, el espacio y el tiempo eran entidades absolutas e inmutables que servían como escenario donde los fenómenos tenían lugar. Para Kant, eran condiciones a priori del conocimiento empírico. En cambio, la relatividad general propone una concepción en la que *no existe un escenario previo*: el espacio-tiempo mismo es sensible a la materia, se curva, se deforma y evoluciona con ella. Ya no se trata de un fondo estático, sino de una entidad activa cuya geometría varía con la distribución de masa y energía, según lo expresan las ecuaciones de campo de Einstein.

Frente a la concepción clásica del espacio como un recipiente neutro, la relatividad general introduce una visión radicalmente distinta: el espacio-tiempo es una entidad *dinámica y relacional*. Esta concepción actualiza intuiciones de Leibniz, quien ya defendía que el espacio no era una sustancia, sino un conjunto de relaciones entre objetos. La relatividad retoma esta idea y la eleva a un nivel matemáticamente preciso: el continuo espacio-temporal no posee estructura en sí mismo, sino sólo en virtud de las relaciones entre los eventos físicos que lo constituyen.

Desde la filosofía de la ciencia, el principio de covariancia ha sido interpretado como una manifestación del **estructuralismo científico**. Según esta corriente, lo que las teorías físicas describen no son objetos individuales con identidad sustancial, sino estructuras relacionales invariantes bajo ciertas transformaciones. Así lo expresa John Earman: “Lo que es físicamente real no son los puntos del espacio-tiempo en sí, sino las propiedades invariantes bajo los difeomorfismos” Earman, 1989. Esta afirmación sugiere que lo ontológicamente significativo no es el espacio-tiempo “en sí”, sino su *estructura relacional*.

Dicha perspectiva se inscribe dentro del **realismo estructural**, una forma de realismo que renuncia al compromiso con entidades sustanciales y se centra en la persistencia de formas matemáticas que organizan la experiencia física. En este marco, el espacio-tiempo no es una cosa, sino una red de relaciones estructurales cuya estabilidad define lo que consideramos real. La física, así entendida, no describe objetos, sino *invariantes*.

Este giro estructural nos conduce inevitablemente a una pregunta más amplia: ¿qué papel desempeñan las matemáticas en la ontología de la física? La relatividad general, al utilizar herramientas altamente abstractas —variedades diferenciables, tensores, conexiones— ha llevado a algunos autores a defender una forma de **realismo matemático**. Roger Penrose, por ejemplo, ha sostenido que “la estructura matemática no solo describe la realidad, sino que constituye una parte esencial de ella” Penrose, 2004. Esta postura radical sugiere que lo real es, en última instancia, de naturaleza matemática.

Frente a esta visión, corrientes más cercanas al empirismo o al constructivismo insisten en que las matemáticas no deben ser reificadas: son modelos útiles, herramientas eficaces, pero no entidades ontológicas. Sin embargo, el hecho de que la propia geometría del espacio-tiempo se identifique con una estructura matemática —y que esa estructura determine el comportamiento de la materia— parece indicar que la frontera entre lo formal y lo físico es mucho más

tenue de lo que la ciencia clásica permitía imaginar.

Este rediseño del espacio-tiempo como estructura matemática dinámica nos enfrenta, sin embargo, a un problema aún más profundo: ¿qué ocurre con nuestra **noción de temporalidad** en un mundo donde el tiempo parece perder su dirección, su flujo y su centralidad? Si el espacio-tiempo es una totalidad sin un presente privilegiado, si la evolución de los sistemas está incorporada en una geometría estática de cuatro dimensiones, ¿qué significa entonces el *paso* del tiempo? Estas preguntas nos conducen al corazón de las tensiones entre física y experiencia, y abren un nuevo capítulo en la reflexión ontológica sobre la naturaleza del universo.

Tiempo y ontología en la relatividad general: ¿bloque o devenir?

La formulación geométrica del espacio-tiempo en la relatividad general conduce naturalmente a una concepción particular del tiempo que ha generado intensos debates filosóficos: la idea del **universo bloque**, también conocida como *eternalismo*. En este marco, el tiempo deja de ser un flujo dinámico para convertirse en una dimensión más del continuo cuatridimensional. Todos los eventos del espacio-tiempo —pasados, presentes y futuros— existen por igual, sin que haya una distinción física objetiva entre ellos. El mundo, desde esta perspectiva, no *deviene*; simplemente *es*.

Esta concepción ya estaba implícita en la geometría de Minkowski, quien en su conferencia de 1908 afirmó que “el espacio por sí solo, y el tiempo por sí solo, están destinados a desvanecerse en meras sombras, y solo una unión de ambos preservará una realidad independiente” Minkowski, 1908. Einstein adoptó plenamente esta visión, llegando a declarar en una carta escrita poco antes de su muerte que “la distinción entre pasado, presente y futuro es solo una ilusión, aunque persistente” Einstein, 1979.

Sin embargo, esta visión ha sido fuertemente cuestionada desde perspectivas fenomenológicas y existencialistas. Ya Agustín de Hipona, en sus *Confesiones*, advertía que el tiempo es inseparable de la conciencia vivida: “¿Qué es el tiempo? Si nadie me lo pregunta, lo sé; pero si quiero explicárselo al que me lo pregunta, no lo sé” de Hipona, 397. Para él, solo el presente existe en sentido pleno: el pasado subsiste en la memoria, y el futuro en la anticipación. El tiempo es, por tanto, una estructura de la subjetividad antes que una dimensión objetiva del mundo.

En el siglo XX, Henri Bergson desarrolló una crítica sistemática a la reducción del tiempo a una variable cuantitativa. En su célebre debate con Einstein, defendió que el *tiempo vivido* —la duración (*durée*)— es cualitativo, irreducible al tiempo físico de los relojes. Según Bergson, confundir ambos planos implica borrar lo más esencial de la experiencia temporal: su flujo, su tensión, su devenir irrepetible.

Frente al eternalismo, algunas ontologías alternativas han propuesto una rehabilitación del presente. El **presentismo** sostiene que sólo el presente existe realmente: el pasado ha dejado de ser y el futuro aún no es. Esta postura, sin embargo, enfrenta serias dificultades en el marco de la relatividad especial y general, donde la noción de simultaneidad es relativa al observador y no existe una partición objetiva del tiempo. La estructura del espacio-tiempo relativista parece incompatibilizarse con la idea de un “ahora” absoluto.

Para sortear esta dificultad, algunos filósofos y físicos han explorado visiones intermedias. El físico y filósofo Julian Barbour propone que el tiempo no existe como un ente independiente, sino como una *ilusión emergente* derivada del cambio. Según su teoría, el universo está compuesto por una colección de “ahoras” —configuraciones relacionales estáticas—, y el sentido de movimiento o flujo surge de la conexión entre ellas. “El tiempo no pasa”, escribe Barbour, “somos nosotros quienes nos desplazamos por una colección de configuraciones” Barbour, 1999.

En esta misma línea de pensamiento, algunos modelos contemporáneos proponen que el **tiempo no es fundamental**, sino emergente. Carlo Rovelli ha defendido que el tiempo, al igual que magnitudes como la temperatura o la presión, puede entenderse como una *variable estadística*, derivada de las relaciones entre subsistemas en condiciones particulares. “No existe un tiempo universal”, afirma, “solo relojes que miden cambios relativos” Rovelli, 2018.

Este enfoque permite reinterpretar la aparente oposición entre la experiencia subjetiva del tiempo y la geometría atemporal de la relatividad. No se trata de elegir entre una conciencia temporal y una física sin tiempo, sino de comprender *cómo ciertas formas del tiempo emergen en contextos específicos*. Así, la filosofía del tiempo no queda clausurada por la relatividad general, sino que se enriquece con nuevas preguntas, más sutiles y estructuradas, que exploran el modo en que la temporalidad se inscribe en la física contemporánea.

Lejos de eliminar el problema del tiempo, la relatividad lo reconfigura. Y con ello, abre un nuevo horizonte ontológico en el que el tiempo ya no es ni absoluto ni ilusorio, sino una dimensión cuya naturaleza misma depende de las relaciones, las escalas y las estructuras que definen nuestra comprensión del universo.

Comprenderlo Todo: La Ambición Científica por una Teoría Unificada

Desde tiempos remotos, la humanidad ha perseguido una visión unificada del cosmos. La aspiración de reducir la multiplicidad de los fenómenos naturales a unos pocos principios universales ha acompañado el pensamiento desde sus orígenes. Este impulso no responde únicamente a fines prácticos, sino que emerge de una necesidad más profunda: el deseo de comprender la totalidad de lo real. Como señaló Aristóteles, “todos los hombres desean por naturaleza saber” Aristóteles, 350, y en ese deseo se encuentra ya esbozada la ambición de una teoría

unificada.

En el contexto del presente trabajo, esta aspiración adquiere una dimensión específica que hemos denominado *motivación ontológica*. No se trata meramente de construir modelos predictivos eficientes, sino de esclarecer el *ser* del universo, de desvelar su estructura fundamental. Desde esta perspectiva, la unificación científica no se limita al ámbito metodológico, sino que se inscribe en una continuidad con la metafísica: busca una explicación coherente y completa de las estructuras últimas que constituyen la realidad. La tensión entre relatividad general y mecánica cuántica expresa precisamente esa necesidad de reconciliar lo diverso en una totalidad inteligible. En esta línea, la obra de autores como Stephen Hawking ha retomado la vieja aspiración griega de una “teoría del todo”, buscando trascender la escisión entre gravedad cuántica y relatividad mediante una formulación unificadora de las leyes fundamentales Hawking, 1988.

Esta idea no es nueva. A lo largo de la historia, la ciencia ha oscilado entre la especialización analítica y el ideal de síntesis. Ya los presocráticos intentaron reducir la pluralidad del mundo a un principio único: el agua (Tales), el fuego (Heráclito), o el *ápeiron* (Anaximandro). En la modernidad, este impulso unificador alcanzó un nuevo estatuto con Newton, cuya *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* consolidó una visión mecanicista del universo. Más adelante, la síntesis electromagnética de Maxwell unificó fenómenos antes dispersos bajo un mismo marco teórico. Estas integraciones históricas alimentaron la esperanza de que, del mismo modo, fuera posible unificar la gravitación y la mecánica cuántica en un único esquema conceptual.

Autores contemporáneos han seguido este horizonte. Steven Weinberg, por ejemplo, afirmó que “la belleza de una teoría reside en su poder explicativo con el menor número posible de supuestos arbitrarios” Weinberg, 1992. Esta concepción racionalista resuena con el planteamiento de Carlo Rovelli, quien señala que “la búsqueda de una teoría del todo es una búsqueda del sentido del universo” Rovelli, 2018. Así entendida, la unificación no es solo un ideal técnico o estético, sino también filosófico: expresa el anhelo humano de alcanzar una comprensión ontológica de la totalidad del ser.

Sin embargo, este impulso unificador no está exento de dificultades epistemológicas. La pretensión de construir una teoría del todo plantea interrogantes fundamentales sobre los límites del conocimiento: ¿es posible una teoría que abarque todos los fenómenos sin quedar atrapada en sus propias condiciones de posibilidad? ¿Qué ocurre cuando los marcos teóricos en juego —como la geometría continua de la relatividad y la estructura probabilística de la cuántica— son formalmente incompatibles?

Thomas Kuhn advertía que los paradigmas científicos operan dentro de estructuras incommensurables, lo que complica cualquier intento de síntesis total Kuhn, 1970. A su vez, Nancy Cartwright ha argumentado que “la naturaleza no actúa de acuerdo con una sola ley, sino con un mosaico de leyes locales” Cartwright, 1983, desafiando así la idea de una legalidad universal y uniforme. Desde esta perspectiva, la pretensión unificadora puede resultar más una

proyección humana que una propiedad real del mundo.

Estas objeciones se conectan directamente con las discusiones ontológicas y epistemológicas tratadas en capítulos anteriores. La ambición de unificación suele asociarse al realismo científico, a la idea de que la teoría accede a la estructura objetiva del mundo. Por el contrario, los modelos contextuales, pluralistas o estructuralistas —como los defendidos por Cartwright o Putnam— se sitúan en posiciones más cercanas al antirrealismo, o al menos a un realismo mitigado.

Así, la tensión entre relatividad y cuántica puede leerse no solo como un problema técnico sin resolver, sino como la manifestación de un *conflicto ontológico* más profundo: dos formas radicalmente distintas de concebir el mundo. Por un lado, una ontología geométrica, continua, determinada por la distribución de materia y energía; por otro, una ontología probabilística, discontinua, condicionada por el acto de observación. En este contexto, la unificación no es únicamente un desafío físico, sino una interrogación filosófica de primer orden, que obliga a revisar las categorías mismas con las que pensamos el universo: espacio, tiempo, causalidad, identidad, objeto, observador.

La teoría del todo, si existe, no será simplemente una fórmula matemática final. Será una transformación profunda de nuestra manera de entender lo real. Comprenderlo todo no significa tener todas las respuestas, sino ser capaces de formular preguntas que abracen la complejidad sin disolverla. Y en esa tensión entre totalidad y límite, entre saber y ser, se juega el núcleo ontológico de la ambición científica.

Vibraciones Fundamentales: La Promesa Unificadora de las Cuerdas

La teoría de cuerdas propone un enfoque radicalmente diferente al modelo estándar de partículas elementales. Mientras que en la física de partículas tradicional, las partículas como electrones, quarks y neutrinos son consideradas como objetos puntuales, la teoría de cuerdas sugiere que estas partículas son, en realidad, “cuerdas” unidimensionales extremadamente pequeñas. Estas cuerdas pueden vibrar en diferentes modos, y la frecuencia de su vibración determina las propiedades de las partículas, como la masa y la carga.

Uno de los elementos más sorprendentes de la teoría de cuerdas es la necesidad de dimensiones adicionales. De acuerdo con la formulación original, para que las matemáticas de la teoría sean consistentes, el espacio-tiempo debe tener más de las cuatro dimensiones convencionales que conocemos (tres espaciales y una temporal). Dependiendo de la versión de la teoría de cuerdas que se considere, el número de dimensiones adicionales varía entre 6 y 7 dimensiones espaciales, lo que da un total de 10 u 11 dimensiones.

Como señala Edward Witten, una de las figuras centrales de la teoría de cuerdas, “las cuerdas no son meras fluctuaciones de campos, sino entidades fundamentales que constituyen

toda la realidad” Witten, 1995. Esta concepción de las cuerdas introduce una nueva forma de pensar sobre la estructura del universo, pasando de la concepción de partículas puntuales a una de entidades extendidas en dimensiones adicionales. La relación entre estas dimensiones adicionales y la realidad física es compleja, y aunque las dimensiones extras son necesarias matemáticamente, permanecen ocultas debido a que se compactifican en escalas extremadamente pequeñas, mucho más allá de lo que puede observarse directamente con la tecnología actual.

Otro elemento central en este marco teórico es la **supersimetría (SUSY)**, una propuesta matemática que plantea la existencia de una simetría fundamental entre las partículas de materia (fermiones) y las partículas mediadoras de fuerzas (bosones). Según esta idea, cada partícula del modelo estándar tendría una “supercompañera” que se diferencia en el espín (una propiedad cuántica fundamental) pero que comparte otras características, como la masa y las interacciones.

La supersimetría, cuando se incorpora en el contexto de la teoría de cuerdas, permite resolver varios problemas cruciales, como la cancelación de las divergencias en las interacciones cuánticas y la mejora de la consistencia matemática de la teoría. A través de esta simetría, la teoría de cuerdas adquiere una mayor elegancia y robustez formal, además de ofrecer la esperanza de resolver la cuestión de la gravedad cuántica.

El físico teórico Nima Arkani-Hamed ha señalado que “la supersimetría podría ser la clave para unir todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza, proporcionando un marco unificado en el que se expliquen tanto las partículas como las interacciones” Arkani-Hamed, 2010. Esta propuesta también está fuertemente vinculada a la física más allá del modelo estándar, consolidando su relevancia en el escenario unificador de la teoría de cuerdas.

Este desarrollo teórico culmina en lo que se conoce como la **teoría M**, una extensión ambiciosa propuesta por Edward Witten en 1995. La teoría M busca unificar todas las versiones previas de la teoría de cuerdas dentro de un marco coherente, sugiriendo que lo que antes se interpretaba como cuerdas unidimensionales son, en realidad, objetos más fundamentales llamados “membranas” o *branas*, que pueden tener múltiples dimensiones.

Según esta perspectiva, el universo en el que vivimos podría ser una de estas branas, inmersa en un espacio-tiempo de dimensiones superiores. Todos los fenómenos físicos observables serían manifestaciones de interacciones entre cuerdas y branas, lo que abre un nuevo camino hacia la unificación de la física.

En este contexto, el filósofo de la ciencia Tim Maudlin ha apuntado que “la teoría M es la aspiración más ambiciosa en la física moderna: no solo proporciona una posible explicación de todo lo observado, sino que nos reta a reconsiderar la naturaleza de la realidad misma” Maudlin, 2011. Desde esta óptica, la teoría M no solo plantea desafíos técnicos, sino que también invita a una reflexión filosófica profunda sobre conceptos fundamentales como el espacio, el tiempo y la ontología de las partículas elementales.

La teoría de cuerdas y sus extensiones no solo representan un avance técnico en la física teórica, sino que también abren nuevas preguntas filosóficas sobre la naturaleza de la realidad.

Si esta teoría es correcta, el universo no estaría compuesto de partículas aisladas, sino de entidades extendidas —cuerdas y branas— que interactúan a través de dimensiones adicionales. Esto plantea interrogantes fundamentales sobre la ontología de la física: ¿qué significa que las partículas no sean más que “vibraciones” de cuerdas? ¿Cómo cambia esto nuestra comprensión de la causalidad, la determinación y la estructura misma del universo?

El filósofo de la ciencia John Cartwright ha propuesto que “el desarrollo de teorías como la teoría de cuerdas nos obliga a reconsiderar nuestras nociones de lo que es un objeto físico y cómo interactúan las entidades fundamentales” Cartwright, 1999. Aunque la teoría de cuerdas promete ser una teoría del todo, también pone de manifiesto la tensión entre las representaciones matemáticas abstractas y las intuiciones filosóficas sobre la realidad. La naturaleza “no visualizable” de las cuerdas y dimensiones adicionales, junto con el concepto de branas, nos desafía a expandir nuestras categorías ontológicas más allá de lo empíricamente accesible.

Cuerdas del Ser: Ontología de una Realidad Vibrante

La teoría de cuerdas, más allá de su sofisticación matemática, plantea una relectura radical de los fundamentos ontológicos de la física. En su núcleo, esta teoría recoge y amplifica algunos de los principios más desconcertantes de la mecánica cuántica: el indeterminismo, la probabilidad y la superposición. Estos elementos, que marcan una ruptura con el determinismo clásico, no solo están presentes en el nivel cuántico de partículas, sino que encuentran una formulación aún más profunda en el nivel fundamental de las cuerdas y las branas.

En mecánica cuántica, tal y como hemos visto durante este recorrido, la realidad no está completamente determinada antes de la medición. El principio de indeterminación de Heisenberg establece que no es posible conocer con precisión arbitraria pares de observables conjugados, como posición y momento Heisenberg, 1927, lo cual refleja una estructura ontológica basada en la probabilidad más que en la necesidad. Como formuló Max Born, el cuadrado del módulo de la función de onda nos proporciona la probabilidad de encontrar una partícula en determinado estado Born, 1926. La teoría de cuerdas, al describir las partículas como estados vibratorios de una cuerda fundamental, prolonga esta indeterminación en una dimensión ontológicamente más compleja. Las cuerdas pueden vibrar en múltiples modos superpuestos, y sus propiedades —masa, carga, espín— emergen solo al producirse una medición o interacción específica. La superposición, entonces, no es solo una propiedad del estado cuántico, sino una característica constitutiva del tejido mismo de la realidad.

Este punto plantea una cuestión filosófica crucial: si ni las partículas ni las cuerdas tienen estados definidos hasta ser observadas, ¿qué significa afirmar que existen independientemente del acto de medición? Esta interrogación ha estado en el centro del debate sobre la interpretación cuántica. Autores como David Bohm han defendido un realismo cuántico con variables ocultas, mientras que Niels Bohr y la interpretación de Copenhague sostienen que la realidad física emerge en el proceso de observación Bohr, 1949. En palabras de Tim Maudlin,

“la mecánica cuántica nos fuerza a aceptar que la naturaleza no es determinista en su núcleo más profundo, y que la observación desempeña un papel esencial en la constitución de la realidad” Maudlin, 2011. Esta observación adquiere nueva profundidad cuando se aplica al marco de la teoría de cuerdas, en la que las interacciones entre cuerdas y branas no obedecen a trayectorias fijas, sino a paisajes de probabilidades.

Por otra parte, la teoría de cuerdas se encuentra íntimamente vinculada a los principios de la relatividad general. La concepción einsteiniana del espacio-tiempo como una entidad dinámica y curvada por la energía y la materia se ve extendida en la teoría de cuerdas, donde las cuerdas no solo se desplazan en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, sino que habitan un universo de dimensiones adicionales. Este espacio-tiempo ampliado no es un fondo estático, sino una estructura activa y maleable. Las dimensiones extra, compactificadas a escalas submicroscópicas, constituyen parte de la ontología vibrante del universo, y determinan las propiedades físicas observables en nuestra escala macroscópica Green et al., 1987.

La noción de covariancia general, central en la relatividad, también se transforma en este contexto. En la teoría de cuerdas, se generaliza hasta abarcar no solo transformaciones del espacio-tiempo, sino también simetrías internas vinculadas con la dinámica de las cuerdas. Esta *covariancia generalizada* implica que no existe un marco privilegiado desde el cual describir las leyes de la naturaleza: toda formulación debe ser invariante ante transformaciones que afectan tanto a las coordenadas como a los modos de vibración Witten, 1995. El espacio-tiempo mismo se convierte en una propiedad emergente, derivada de las interacciones entre entidades más fundamentales. La geometría ya no es una condición previa, sino una manifestación dinámica de las relaciones físicas.

Estas características conllevan importantes implicaciones filosóficas. La teoría de cuerdas y la relatividad general, al integrarse, desmantelan las nociones clásicas de sustancia, causalidad y determinismo. El universo deja de ser un mecanismo cerrado y predecible para convertirse en una estructura fluctuante, interrelacional, abierta a múltiples configuraciones posibles. El filósofo Quentin Smith ha señalado que “la búsqueda de una teoría unificada no solo está motivada por el deseo de resolver problemas físicos, sino por un impulso humano profundo de comprender el universo como un todo coherente, sin fisuras ni contradicciones” Smith, 2011. Este impulso expresa una dimensión antropológica del conocimiento, que va más allá de la técnica y entra en el terreno del sentido.

Si las cuerdas son las entidades fundamentales del universo, entonces las partículas, las fuerzas e incluso el espacio y el tiempo son manifestaciones contingentes de sus patrones vibratorios. La materia deja de ser algo sólido, y la realidad se concibe como una textura ondulante que se articula según modos resonantes. Como señala Maudlin, “la teoría de cuerdas no es solo una teoría física; es también una invitación a repensar las categorías fundamentales de la existencia” Maudlin, 2011. En este sentido, la ontología de cuerdas es una ontología del devenir, de lo posible, de lo relacional. El universo no es una colección de cosas, sino una red de procesos en vibración constante.

Así, la teoría de cuerdas no solo busca unificar las leyes de la física; también propone una nueva concepción del ser. Un ser que no es fijo ni estático, sino que vibra, se entrelaza, y se manifiesta en múltiples niveles según las condiciones del observador, del contexto y de la estructura relacional del cosmos. Comprender esta realidad vibrante es, en última instancia, una forma de comprendernos a nosotros mismos como parte de un universo que todavía está, de alguna manera, por nacer.

Conclusion

“Cuanto más comprensible parece el universo, más absurdo también parece.”

STEVEN WEINBERG, *The First Three Minutes*, 1977

Al llegar al final de este recorrido, es necesario detenerse y contemplar el camino trazado. Las páginas anteriores no han pretendido ofrecer respuestas definitivas, sino desplegar las tensiones, las posibilidades y los desafíos que surgen cuando la física contemporánea se piensa desde una perspectiva ontológica. La confrontación entre relatividad general y mecánica cuántica, lejos de ser un mero problema técnico, ha revelado fisuras en nuestras categorías más fundamentales: espacio, tiempo, causalidad, realidad, observador.

En este último apartado, proponemos una reflexión más amplia y transversal que, sin abandonar el rigor conceptual, se abre a las implicaciones filosóficas, epistemológicas y humanas de la ciencia. Porque pensar la unificación física es también pensar los límites del conocimiento, la naturaleza del ser y el papel de la ciencia en nuestra búsqueda de sentido.

Un universo por pensar, un pensamiento por desplegar

A lo largo del estudio hemos visto cómo la relatividad general, basada en una geometría diferenciable de cuatro dimensiones, propone una visión del universo en la que el espacio-tiempo es una entidad dinámica, curvada por la materia y la energía. Su formalismo se sustenta en un lenguaje tensorial continuo, donde la causalidad y la evolución obedecen a leyes deterministas y covariantes. Por su parte, la mecánica cuántica introduce una ruptura con esta imagen: la realidad ya no es un campo suave y continuo, sino un sistema gobernado por principios probabilísticos, donde la observación modifica el objeto observado, y donde la linealidad de los espacios de Hilbert y los operadores autoadjuntos sustituye a la continuidad del espacio clásico.

Estas dos teorías se expresan mediante lenguajes matemáticos altamente estructurados, pero esencialmente heterogéneos. Su incompatibilidad formal no se reduce a un problema técnico de acoplamiento, sino que remite a una diferencia de fondo en la arquitectura ontológica que cada teoría presupone. La geometría diferencial y la teoría de operadores, la métrica dinámica y la función de onda, el determinismo de las ecuaciones de campo y la indeterminación cuántica, no son simplemente métodos distintos: son visiones distintas de lo que significa “ser” en el universo físico.

La búsqueda de una teoría unificada, como la teoría de cuerdas o la gravedad cuántica de bucles, puede leerse desde este punto de vista no como un simple paso más en la evolución científica, sino como una tentativa ontológica de síntesis, un esfuerzo por crear un lenguaje formal que pueda articular en un mismo marco la granularidad probabilística de lo cuántico y la continuidad geométrica de lo relativista. En esta empresa, las matemáticas juegan un papel central no solo como herramientas de modelización, sino como mediadoras ontológicas: son la forma que adopta nuestra tentativa de pensar el ser cuando ya no es posible visualizarlo.

El formalismo matemático, en este contexto, no debe ser entendido como una mera codificación simbólica de lo real, sino como una estructura conceptual capaz de revelar relaciones que escapan a la intuición ordinaria. Cuando hablamos de teorías como la de cuerdas, donde la noción misma de espacio-tiempo emerge de simetrías internas y modos vibratorios de entidades unidimensionales, estamos accediendo a un nivel de abstracción en el que las matemáticas no sólo describen la realidad, sino que la constituyen en cierto sentido. Esto nos obliga a repensar el estatus del conocimiento: ¿describimos el mundo o participamos en su estructuración mediante nuestras construcciones teóricas?

Desde este punto de vista, el impulso unificador de la física adquiere un carácter doble: es a la vez una estrategia epistémica —reducir la complejidad a principios más generales— y una necesidad ontológica —conferir sentido a la multiplicidad de lo real bajo una unidad inteligible. Esta tensión ha estado presente desde los presocráticos hasta los desarrollos contemporáneos: del agua de Tales a las ecuaciones de Maxwell, de las esferas de cristal a los superespacios de once dimensiones.

Pero el deseo de unificar no está exento de peligros. Como hemos visto con autores como Thomas Kuhn o Nancy Cartwright, es posible que la naturaleza misma resista la unificación. Tal vez la pluralidad de marcos teóricos, cada uno válido en su dominio, no sea un defecto epistemológico, sino un reflejo de una realidad irreductiblemente plural. En ese caso, la búsqueda de una “teoría del todo” podría estar proyectando sobre el mundo un ideal de totalidad que responde más a nuestras aspiraciones humanas que a la estructura efectiva del cosmos.

Sin embargo, incluso si el universo no es unívoco, la pregunta por su unificación sigue siendo fecunda. Porque en ella no solo se expresa el deseo de controlar o predecir, sino también la necesidad de comprender. Como sostuvo Quentin Smith, esta búsqueda es expresión de una motivación antropológica profunda: el anhelo de sentido, de coherencia, de inteligibilidad. En este sentido, la teoría de cuerdas, más allá de sus posibles validaciones empíricas, constituye una poderosa metáfora de este impulso: imaginar que el universo está hecho de vibraciones es también imaginar que la realidad es una armonía potencial aún no del todo revelada.

Esta reflexión final nos permite cerrar el trabajo con una mirada que trasciende la física como disciplina especializada. A través de los debates sobre espacio, tiempo, materia y observación, lo que se pone en juego es también una concepción del conocimiento como práctica filosófica. Comprender el universo es, al mismo tiempo, comprendernos en él. Y por ello, este trabajo aspira no solo a transmitir contenidos científicos, sino a cultivar una actitud crítica, reflexiva e integradora que armonice teoría, experiencia y significado.

En este sentido, se vincula directamente con el Objetivo de Desarrollo Sostenible 4 (Educación de calidad), al promover una concepción del conocimiento que va más allá de la acumulación de información. Una educación verdaderamente transformadora debe ser capaz de integrar los saberes técnicos con la reflexión ontológica, y de fomentar en el estudiante una disposición interrogativa ante los fundamentos del mundo. Frente al riesgo de una formación puramente instrumental, este enfoque propone una pedagogía que restituya el valor del pensamiento como herramienta de comprensión profunda, y no solo como medio de resolución de problemas.

El mundo no es, quizás, una totalidad cerrada y definitiva, pero es un campo abierto de posibilidad, de articulación y de resonancia. Y la física, como saber límite entre la ciencia y la filosofía, nos recuerda que pensar el universo no es solo una operación intelectual: es una forma de habitarlo. De preguntarse por su estructura, su origen, su devenir. Y, en última instancia, por el lugar que el pensamiento humano ocupa en ese tejido de relaciones que aún estamos aprendiendo a nombrar.

Epílogo: El Límite del Saber y la Belleza del No Saber

“De lo que no se puede hablar, mejor es callarse.”

LUDWIG WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus*

La física ha recorrido un largo camino desde los sueños laplacianos de determinismo hasta la danza cuántica de probabilidades y estructuras relacionales. En ese tránsito, no solo han cambiado las ecuaciones; ha cambiado el modo en que pensamos el mundo, el conocimiento, y a nosotros mismos.

Como anticipamos en el capítulo dedicado al realismo cuántico, Bernard d’Espagnat señala que “la física cuántica no nos dice cómo es la realidad, sino lo que podemos decir sobre ella” d’Espagnat, 2006. Ahora, a la luz de todo el recorrido realizado, esta afirmación adquiere una resonancia final: no como un límite, sino como una apertura. Pues en esa diferencia entre ser y decir se despliega el abismo mismo de la filosofía.

¿Tiene sentido hablar de una teoría del todo si los fundamentos del universo se desdibujan en el entrelazamiento, la emergencia, y la no localidad? ¿Es la unificación un objetivo físico, o el eco moderno de un impulso ancestral hacia el sentido? La física busca leyes; el ser humano busca significado.

Heidegger, en su meditación sobre el ser, nos recuerda que lo más inmediato es también lo más olvidado Heidegger, 2003. Quizá el espacio-tiempo, la materia, la energía —las “realidades últimas” de la ciencia— no sean sino proyecciones de un preguntar más profundo que la física solo roza. Y en ese roce, en esa apertura, la ciencia se vuelve filosofía.

No es casual que cuanto más se afina el conocimiento físico, más borroso se vuelve el contorno de la realidad. La geometría se vuelve fluctuante; la materia, vibración; el tiempo, una ilusión. Es como si, al perseguir el ser, la física encontrara el límite de su propio lenguaje. Como sugiere Wittgenstein, en ese punto no se puede seguir hablando, pero tampoco se puede abandonar la pregunta.

La teoría de cuerdas, con su belleza matemática y su inasible empiricidad, podría ser el último gesto de la física clásica... o el primero de una física por venir. Una física que no aspire ya a dominar el mundo, sino a escuchar lo que el mundo aún no ha dicho.

En última instancia, esta investigación no es solo un ejercicio académico, sino un testimonio: de la tensión entre el cálculo y el asombro, entre la formalización y el misterio. Porque más allá de las ecuaciones, los experimentos y las interpretaciones, hay una pregunta que persiste —silenciosa, abierta, infinita—:

¿Qué es, realmente, lo real?

Referencias

- Aristóteles. (350). *Metafísica* [Edición de 2014, traducida por Calvo Martínez, Tomás]. Editorial Gredos.
- Arkani-Hamed, N. (2010). Supersymmetry and the Unification of Forces. *Physics Today*, 63(11), 31-36.
- Barbour, J. (1999). *The End of Time: The Next Revolution in Our Understanding of the Universe*. Weidenfeld; Nicolson.
- Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1(3), 195-200.
- Bell, J. S. (1987). *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* [Incluye todos los artículos publicados y no publicados de Bell sobre los problemas conceptuales de la mecánica cuántica]. Cambridge University Press.
- Bohr, N. (1928). The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory. *Nature*, 121, 580-590.
- Bohr, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 48(8), 696-702.
- Bohr, N. (1963). The Philosophy of Niels Bohr [Citado en Petersen, A.]. *Bulletin of the Atomic Scientists*, 19, 8-14.
- Bohr, N. (1949). Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics. En P. A. Schilpp (Ed.), *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* (pp. 199-241). Open Court.
- Born, M. (1926). Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. *Zeitschrift für Physik*, 37, 863-867.
- Carroll, S. M. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley.
- Cartwright, N. (1983). *How the Laws of Physics Lie*. Oxford University Press.
- Cartwright, N. (1999). *The Dappled World: A Study of the Boundaries of Science*. Cambridge University Press.
- Cassirer, E. (1936). *Determinismo y teoría cuántica* [Traducción al español de la edición original en alemán]. Fondo de Cultura Económica.
- Compton, A. H. (1923). A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements. *Physical Review*, 21(5), 483-502.
- De Broglie, L. (1924). *Recherches sur la théorie des quanta* [Tesis doctoral, Faculté des Sciences de l'Université de Paris].
- de Hipona, A. (397). *Confesiones* [Libro XI, edición de 2009]. Editorial Tecnos.

- d'Espagnat, B. (2006). *On Physics and Philosophy*. Princeton University Press.
- DeWitt, B. S. (1967a). Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory. *Physical Review*, 160(5), 1113-1148.
- DeWitt, B. S. (1967b). Quantum Theory of Gravity. III. Applications of the Covariant Theory. *Physical Review*, 162(5), 1239-1256.
- DeWitt, B. S. (1967c). Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory. *Physical Review*, 162(5), 1195-1239.
- Dirac, P. A. M. (1930). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press.
- Donoghue, J. F. (1994). General Relativity as an Effective Field Theory: The Leading Quantum Corrections. *Physical Review D*, 50(6), 3874-3888.
- Earman, J. (1989). *World Enough and Space-Time: Absolute versus Relational Theories of Space and Time*. The MIT Press.
- Einstein, A. (1905). On a Heuristic Point of View concerning the Production and Transformation of Light. *Annalen der Physik*, 17, 132-148.
- Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47(10), 777-780.
- Einstein, A. (1971). *The Born-Einstein Letters* [Contiene correspondencia de Einstein con Max Born desde 1916 a 1955]. Macmillan.
- Einstein, A. (1979). *Correspondencia con Michele Besso: 1903-1955* [Edición en francés de la correspondencia entre Einstein y Besso]. Editorial Hermann.
- Feynman, R. P., Morinigo, F. B., & Wagner, W. G. (1995). *Feynman Lectures on Gravitation*. Addison-Wesley.
- Goroff, M. H., & Sagnotti, A. (1985). Quantum Gravity at Two Loops. *Physics Letters B*, 160(1-3), 81-86.
- Green, M. B., Schwarz, J. H., & Witten, E. (1987). *Superstring Theory*. Cambridge University Press.
- Hawking, S. (1988). *Historia del tiempo: del Big Bang a los agujeros negros* [Traducción al español de "A Brief History of Time"]. Editorial Grijalbo.
- Heidegger, M. (2003). *Ser y tiempo* [Traducción al español de la obra original de 1927]. Fondo de Cultura Económica.
- Heisenberg, W. (1925). Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, 33(1), 879-893.
- Heisenberg, W. (1958). *Physics and Philosophy: The Revolution in Modern Science*. Harper & Row.
- Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43(3-4), 172-198.
- Kuhn, T. S. (1970). *La estructura de las revoluciones científicas* [Traducción al español de "The Structure of Scientific Revolutions"]. Fondo de Cultura Económica.
- Maudlin, T. (2011). *Quantum Non-Locality and Relativity*. Wiley.

- Minkowski, H. (1908). Space and Time [Publicado en 1909 en *Annalen der Physik*, 47, 927–938]. *80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians*, 133-216.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman; Company.
- Penrose, R. (2004). *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Jonathan Cape.
- Planck, M. (1901). On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum. *Annalen der Physik*, 4, 553-563.
- Popper, K. R. (1982). *Quantum Theory and the Schism in Physics* [Editado por W.W. Bartley III]. Routledge.
- Putnam, H. (1975). *Philosophical Papers: Volume 1, Mathematics, Matter and Method* [Segunda edición de 1979]. Cambridge University Press.
- Rovelli, C. (2004). *Quantum Gravity*. Cambridge University Press.
- Rovelli, C., & Smolin, L. (1995). Spin networks and quantum gravity. *Physical Review D*, 52(10), 5743.
- Rovelli, C. (2018). *La realidad no es lo que parece: La estructura elemental de las cosas* [Traducción al español de la edición original en italiano]. Tusquets Editores.
- Sakurai, J. J., & Napolitano, J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley.
- Schrödinger, E. (1926). Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, 79, 361-376.
- Smith, Q. (2011). *The Unity of Nature: A Philosophical Introduction to the Theory of Everything*. Oxford University Press.
- Smolin, L. (2006). *The Trouble with Physics*. Houghton Mifflin Harcourt.
- Spinoza, B. (1677). *Ética demostrada según el orden geométrico* [Edición de 2000, traducida por Atilano Domínguez]. Editorial Trotta.
- 't Hooft, G., & Veltman, M. (1974). One-loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales de l'Institut Henri Poincaré A*, 20(1), 69-94.
- 't Hooft, G., & Veltman, M. J. G. (1974). One-loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales de l'Institut Henri Poincaré A*, 20(1), 69-94.
- Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University of Chicago Press.
- Weinberg, S. (1995). *The Quantum Theory of Fields, Volume I: Foundations*. Cambridge University Press.
- Weinberg, S. (1992). *Dreams of a Final Theory: The Scientist's Search for the Ultimate Laws of Nature*. Pantheon Books.
- Wheeler, J. A. (1968). Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics. En C. DeWitt & J. A. Wheeler (Eds.), *Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics* (pp. 242-307). W. A. Benjamin.
- Witten, E. (1995). String theory dynamics in various dimensions. *Nuclear Physics B*, 443(1–2), 85-126.
- Young, T. (1804). Experimental Demonstration of the General Law of the Interference of Light. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.

Anexo: Ejemplos desarrollados

A.1 Ejemplos de Mecánica Cuántica

Ejemplo 0.1 (Producto interno en notación bra-ket en $\mathbb{C}^2$). Consideremos los siguientes vectores del espacio $\mathbb{C}^2$:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}$$

Obtener el bra $\langle\psi|$ asociado. Tomamos el conjugado transpuesto del ket $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi| = (|\psi\rangle)^\dagger = (1+i, 2)^\dagger = (1-i, 2)$$

Calcular el producto interno. Aplicamos la regla del producto interno como suma de productos coordenados complejos:

$$\langle\psi|\phi\rangle = (1-i) \cdot (3) + 2 \cdot (i) = 3 - 3i + 2i = 3 - i$$

Interpretación. El valor complejo $\langle\psi|\phi\rangle = 3 - i$ representa la amplitud de transición entre los estados $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$. Su módulo al cuadrado $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ da la probabilidad (hasta una constante de normalización) de que el sistema en estado $|\phi\rangle$ transicione al estado $|\psi\rangle$.

Observación adicional: El operador de la forma $|\psi\rangle\langle\phi|$ actúa sobre un ket $|\chi\rangle$ como:

$$|\psi\rangle\langle\phi||\chi\rangle = \langle\phi|\chi\rangle \cdot |\psi\rangle$$

produciendo una proyección proporcional a $|\psi\rangle$. Este tipo de operadores es central en la definición de proyectores y operadores de densidad en mecánica cuántica que veremos mas adelante.

Ejemplo 0.2 (Estado puro de un qubit y representación en la base ortonormal). Para ilustrar esta noción, consideramos el caso de un sistema cuántico de dos niveles (qubit), cuyo espacio

de Hilbert es $\mathbb{C}^2$. Sea la base ortonormal canónica:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con producto interno definido por:

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{0, 1\}$$

Representación general del estado. Por ser un espacio vectorial complejo, cualquier vector en $\mathbb{C}^2$ puede escribirse como combinación lineal de la base:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Condición de normalización. El vector $|\psi\rangle$ representa un estado físico si su norma es uno:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= (\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\ &= |\alpha|^2\langle 0|0\rangle + \alpha^*\beta\langle 0|1\rangle + \beta^*\alpha\langle 1|0\rangle + |\beta|^2\langle 1|1\rangle \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{aligned}$$

Equivalencia bajo fase global. Dados dos vectores $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$ con $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle e^{i\theta}\psi|e^{i\theta}\psi\rangle = |e^{i\theta}|^2\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Ambos representan el mismo estado físico porque las probabilidades de medición no dependen de esta fase global.

Parametrización esférica — coordenadas en la esfera de Bloch. Usamos la condición de normalización para parametrizar el estado mediante dos ángulos reales θ y ϕ :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

Este estado corresponde a un punto en la esfera unidad S^2 , conocida como esfera de Bloch, que representa el conjunto de estados puros de un qubit.

Ejemplo numérico. Tomamos:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = \pi$$

Entonces:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Este estado representa una superposición con igual probabilidad de observar $|0\rangle$ o $|1\rangle$, pero con interferencia destructiva en el estado $|1\rangle$ debido al signo negativo.

Verificación de normalización. Para confirmar que es un estado físico:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ejemplo 0.3 (Proyector sobre $|0\rangle$ en $\mathbb{C}^2$). Analizamos el caso concreto de un proyector en un sistema cuántico de dos niveles. Sea $\mathcal{S} = \text{span}\{|0\rangle\} \subset \mathbb{C}^2$ el subespacio generado por el estado base $|0\rangle$.

Estado general. Un estado arbitrario del sistema se puede escribir como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Definición del proyector. El operador que proyecta ortogonalmente sobre el subespacio $\mathcal{S}$ es:

$$P = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicación del operador. Calculamos:

$$P|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha|0\rangle$$

El operador elimina la componente $|1\rangle$ y conserva la proyección sobre $|0\rangle$.

Verificación de propiedades. Analizamos sus características algebraicas:

■ **Idempotencia:**

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

■ **Autoadjunción:**

$$P^\dagger = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Interpretación física. Este operador modela una medición proyectiva que determina si el sistema se encuentra en el estado $|0\rangle$. Si el resultado de la medición es afirmativo, el sistema colapsa al estado proyectado:

$$P|\psi\rangle = \alpha|0\rangle$$

que debe ser renormalizado si $\alpha \neq 0$, resultando:

$$\frac{P|\psi\rangle}{\|P|\psi\rangle\|} = \frac{\alpha|0\rangle}{|\alpha|} = e^{i\varphi}|0\rangle$$

donde $\varphi = \arg(\alpha)$ es una fase global físicamente irrelevante.

Ejemplo 0.4 (Estado máximamente mezclado en $\mathbb{C}^2$). Consideramos un sistema cuántico de dos niveles (qubit) en el cual no se tiene preferencia por ninguno de los estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Esta falta total de información se representa mediante el siguiente operador de densidad:

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este estado es llamado **estado máximamente mezclado** porque todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad.

Autoadjunción. Comprobamos que ρ es autoadjunto:

$$\rho^\dagger = \left(\frac{1}{2}I\right)^\dagger = \frac{1}{2}I^\dagger = \frac{1}{2}I = \rho$$

Por tanto, $\rho = \rho^\dagger$.

Positividad. Calculamos los autovalores de ρ :

$$\det(\rho - \lambda I) = \det\left(\frac{1}{2}I - \lambda I\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}\right) = (\frac{1}{2} - \lambda)^2$$

Solución: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \geq 0$, lo que confirma que $\rho \geq 0$.

Trazabilidad. La traza del operador se obtiene sumando los elementos de la diagonal:

$$\text{Tr}(\rho) = \text{Tr}\left(\frac{1}{2}I\right) = \frac{1}{2}\text{Tr}(I) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

No pureza del estado. Un estado es puro si y solo si $\rho^2 = \rho$. Calculamos:

$$\rho^2 = \left(\frac{1}{2}I\right)^2 = \frac{1}{4}I \neq \frac{1}{2}I = \rho$$

Por tanto, ρ no representa un estado puro. También puede verificarse que $\text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{2} < 1$.

Interpretación física. El estado ρ representa una situación de completa incertidumbre: el sistema tiene una probabilidad del 50 % de encontrarse en $|0\rangle$ y un 50 % en $|1\rangle$, sin ningún tipo de coherencia cuántica (no hay términos fuera de la diagonal). Cualquier medición en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ dará resultados completamente aleatorios, pero equilibrados.

Ejemplo 0.5 (Operador $\hat{Z}$ en $\mathbb{C}^2$). Consideremos el espacio de Hilbert $\mathbb{C}^2$ con base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, donde:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definimos el operador $\hat{Z}$ como:

$$\hat{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Este operador es uno de los tres generadores de los operadores de Pauli y representa el observable de polarización en la dirección z .

Verificación de autoadjunción. El operador $\hat{Z}$ es diagonal y con entradas reales, por lo que su adjunto es:

$$\hat{Z}^\dagger = (\hat{Z})^T = \hat{Z}$$

lo que confirma que $\hat{Z}$ es autoadjunto: $\hat{Z} = \hat{Z}^\dagger$

Cálculo del espectro. Buscamos los autovalores resolviendo:

$$\hat{Z}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

Esto equivale a encontrar λ tales que:

$$\det(\hat{Z} - \lambda I) = 0$$

Computamos:

$$\hat{Z} - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\hat{Z} - \lambda I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)$$

Entonces los autovalores son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

Cálculo de autovectores.

Para $\lambda = 1$:

$$(\hat{Z} - I)|\psi\rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi_1 = 0, \text{ libre } \psi_0$$

Solución: $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle$

Para $\lambda = -1$:

$$(\hat{Z} + I)|\psi\rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi_0 = 0, \text{ libre } \psi_1$$

Solución: $|\psi\rangle = \psi_1|1\rangle$

Interpretación física. El operador $\hat{Z}$ representa una medición binaria con dos posibles resultados: $+1$ (estado $|0\rangle$) y -1 (estado $|1\rangle$). Si se mide $\hat{Z}$ sobre un estado general $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, entonces:

- Se obtiene $+1$ con probabilidad $|\alpha|^2$, y el estado colapsa a $|0\rangle$.
- Se obtiene -1 con probabilidad $|\beta|^2$, y el estado colapsa a $|1\rangle$.

Ejemplo 0.6 (Medición de $\hat{Z}$ en el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$). Consideramos el observable

$$\hat{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

y el estado cuántico:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Identificación de los proyectores. Como $\hat{Z}$ tiene autovalores $+1$ y -1 , los proyectores asociados a cada valor propio son:

$$P_+ = |0\rangle\langle 0|, \quad P_- = |1\rangle\langle 1|$$

Aplicación de la Regla de Born. Queremos calcular:

$$\mathbb{P}(+1) = \langle\psi|P_+|\psi\rangle$$

Aplicamos el proyector:

$$P_+|\psi\rangle = |0\rangle\langle 0| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 0|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 0|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

Ahora calculamos:

$$\langle\psi|P_+|\psi\rangle = \langle\psi| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\psi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

De forma análoga:

$$P_-|\psi\rangle = |1\rangle\langle 1||\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

y:

$$\langle \psi | P_- | \psi \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

Interpretación. El sistema tiene un 50 % de probabilidad de colapsar al estado $|0\rangle$ (resultado $+1$) y un 50 % al estado $|1\rangle$ (resultado -1), evidenciando que $|\psi\rangle$ es una superposición equiprobable en la base de Z .

Ejemplo 0.7 (Interferencia cuántica en una superposición de qubit). Consideramos el estado cuántico:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

que representa una superposición coherente equiprobable de los dos estados base en $\mathbb{C}^2$.

Normalización. Verificamos que $|\psi\rangle$ está correctamente normalizado:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) = 1 \end{aligned}$$

Medición en la base canónica $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Calculamos las probabilidades utilizando la regla de Born:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|0\rangle) &= |\langle 0 | \psi \rangle|^2 = \left| \langle 0 | \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(|1\rangle) &= |\langle 1 | \psi \rangle|^2 = \left| \langle 1 | \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right) \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Medición en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Consideramos la base ortonormal:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Calculamos las proyecciones:

$$\begin{aligned}\langle +|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) = \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) = 1 \\ \langle -|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle - \langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle) = \frac{1}{2}(1 + 0 - 0 - 1) = 0\end{aligned}$$

Entonces las probabilidades son:

$$\mathbb{P}(+) = |\langle +|\psi\rangle|^2 = 1, \quad \mathbb{P}(-) = |\langle -|\psi\rangle|^2 = 0$$

Interpretación física. Aunque en la base canónica el estado $|\psi\rangle$ da lugar a dos resultados con igual probabilidad, en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se observa interferencia: la probabilidad de obtener $|+\rangle$ es uno (constructiva) y la de $|-\rangle$ es cero (destructiva). Esta es una manifestación directa del carácter ondulatorio y coherente de la superposición cuántica.

Ejemplo 0.8 (Estado de Bell entrelazado). Consideramos el estado de Bell:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

Este estado es uno de los cuatro estados maximales de Bell, fundamentales en teoría cuántica de la información y en el estudio de la no-localidad cuántica.

Forma del estado. Expresamos el estado explícitamente como:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el producto tensorial:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así que:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Imposibilidad de factorización. Supongamos que existe una descomposición:

$$|\Phi^+\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix}$$

$$\text{Para que esto coincida con } |\Phi^+\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ deben cumplirse:}$$

$$ac = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad ad = 0, \quad bc = 0, \quad bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De $ad = 0$ y $bc = 0$ se deduce que $a = 0$ o $d = 0$, y $b = 0$ o $c = 0$. Pero si $a = 0$, entonces $ac = 0$ contradice $ac = 1/\sqrt{2}$. Si $d = 0$, entonces $bd = 0$ contradice $bd = 1/\sqrt{2}$. Similarmente para b y c . No hay solución consistente: no puede escribirse como producto de tensores. Por tanto, $|\Phi^+\rangle$ no es separable.

Reducción de traza. Calculamos el operador de densidad total:

$$\rho = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tomamos la traza parcial sobre el segundo qubit (subespacio B). El resultado es:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) = \sum_{j=0}^1 \langle j | \rho | j \rangle$$

En práctica, se obtiene:

$$\rho_A = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}I$$

Esto muestra que el subsistema A está en un estado mixto, por lo tanto el estado compuesto es entrelazado.

Interpretación física. El estado $|\Phi^+\rangle$ presenta correlaciones perfectas: si se mide el primer qubit en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ y se obtiene $|0\rangle$, entonces el segundo colapsa a $|0\rangle$, y lo mismo para $|1\rangle$. Estas correlaciones persisten incluso si los qubits están separados espacialmente, lo que viola la localidad clásica y motiva experimentos tipo Bell.

Ejemplo 0.9 (Estado gaussiano mínimo de incertidumbre). *Consideramos un estado cuántico cuya función de onda en la representación de posición es una gaussiana centrada en el origen:*

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{x^2}{2d^2}}$$

donde $d > 0$ es una constante real positiva que representa la anchura del paquete de onda. Vamos a demostrar paso a paso que este estado alcanza el límite inferior del principio de incertidumbre de Heisenberg.

Normalización. Verificamos que $\psi(x)$ está correctamente normalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{d^2}} dx = \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{\pi d^2} = 1$$

Valor esperado de la posición.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx = \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{d^2}} dx = 0$$

por ser el integrando una función impar.

Cálculo de $\langle x^2 \rangle$.

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx = \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{d^2}} dx$$

Usamos el resultado estándar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$$

Tomando $a = \frac{1}{d^2}$, obtenemos:

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} d^3}{2} = \frac{d^2}{2}$$

Desviación típica en posición.

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Transformada de Fourier. Calculamos la función de onda en el espacio de momentos:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2d^2}} e^{-ipx/\hbar} dx$$

Completamos el cuadrado en el exponente:

$$-\frac{x^2}{2d^2} - \frac{ipx}{\hbar} = -\frac{1}{2d^2} \left(x^2 + 2id^2 \frac{p}{\hbar} x \right) = -\frac{1}{2d^2} \left(x + id^2 \frac{p}{\hbar} \right)^2 + \frac{d^2 p^2}{2\hbar^2}$$

Entonces:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{1}{\pi d^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{d^2 p^2}{2\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2d^2} \left(x + id^2 \frac{p}{\hbar} \right)^2} dx = \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{d^2 p^2}{2\hbar^2}}$$

Valor esperado del momento. Debido a la simetría de $|\tilde{\psi}(p)|^2$:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p |\tilde{\psi}(p)|^2 dp = 0$$

Cálculo de $\langle p^2 \rangle$.

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\tilde{\psi}(p)|^2 dp = \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 e^{-\frac{d^2 p^2}{\hbar^2}} dp = \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2} \right)^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\hbar^3}{2d^3} = \frac{\hbar^2}{2d^2}$$

Desviación típica en momento.

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2d^2}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}d}$$

Producto de incertidumbres.

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2}d} = \frac{\hbar}{2}$$

Interpretación física. Este resultado demuestra que la función gaussiana es un estado mínimo de incertidumbre, es decir, satura el principio de Heisenberg. Estos estados son de gran relevancia en óptica cuántica (estados coherentes) y en la aproximación semiclasica de sistemas cuánticos.

Ejemplo 0.10 (Principio de incertidumbre energía-tiempo — evolución de un qubit). En este ejemplo ilustramos el principio de incertidumbre energía-tiempo mediante la evolución temporal de un sistema cuántico de dos niveles, es decir, un qubit. Consideramos un Hamiltoniano que representa la energía del sistema, y analizamos cómo varía el estado con el tiempo, calculando explícitamente la dispersión de energía y el tiempo característico de evolución.

Sea el Hamiltoniano dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \hat{Z} = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde ω es una frecuencia angular característica del sistema. El estado inicial considerado

es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que corresponde al estado $|+\rangle$ en la base de Pauli-X.

Valor esperado de la energía. Calculamos el valor esperado de la energía para este estado:

$$\hat{H}|\psi(0)\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El valor esperado resulta ser:

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \psi(0) | \hat{H} | \psi(0) \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1) \right) \cdot \left(\frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{\hbar\omega}{4} (1 - 1) = 0$$

El valor esperado de la energía es cero, lo cual es consistente con la simetría del estado respecto a $\hat{Z}$.

Dispersión de energía. Aunque el valor medio es cero, el sistema no tiene energía bien definida. Calculamos la dispersión:

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 &= \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 I, \quad \text{entonces:} \\ \langle \hat{H}^2 \rangle &= \langle \psi(0) | \hat{H}^2 | \psi(0) \rangle = \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \cdot 1 = \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \\ \Delta E &= \sqrt{\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2} = \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 - 0} = \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned}$$

El sistema presenta una dispersión de energía no nula, indicando una superposición de autoestados de energía.

Evolución temporal. Según la ecuación de Schrödinger, el estado evoluciona como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

Como $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle$ y $\hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$, se tiene:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega t/2} |0\rangle + e^{i\omega t/2} |1\rangle \right)$$

Este estado evoluciona cíclicamente en la esfera de Bloch.

Tiempo característico. Determinamos el instante en que el estado se vuelve ortogonal al ini-

cial:

$$\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} (e^{-i\omega t/2} + e^{i\omega t/2}) = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

Para que el estado sea ortogonal a sí mismo, se requiere $\cos(\omega t/2) = 0$, lo cual ocurre en:

$$\omega t = \pi \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{\omega}$$

Este es el tiempo característico mínimo para un cambio completo de estado.

Verificación del principio. Finalmente, verificamos la desigualdad de incertidumbre energía-tiempo:

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi\hbar}{2} > \frac{\hbar}{2}$$

por lo tanto, se satisface el principio de incertidumbre. Este resultado ejemplifica cómo una mayor dispersión en la energía permite una evolución más rápida del estado cuántico.

Ejemplo 0.11 (El gato de Schrödinger). Erwin Schrödinger propuso en 1935 un experimento mental para ilustrar las paradojas del problema de la medida. Imaginemos un sistema cuántico compuesto por un átomo inestable que puede desintegrarse o no, acoplado a un mecanismo que activa un veneno si se produce dicha desintegración, lo que afecta directamente al estado de vida o muerte de un gato.

Definimos el sistema como un estado compuesto en el espacio tensorial:

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_{\text{átomo}} \otimes \mathcal{H}_{\text{gato}}$$

donde:

$$|d_0\rangle = \text{átomo no desintegrado}$$

$$|d_1\rangle = \text{átomo desintegrado}$$

$$|v\rangle = \text{gato vivo}$$

$$|m\rangle = \text{gato muerto}$$

La evolución unitaria del sistema (si no se realiza ninguna observación) lleva al estado entrelazado:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|d_0\rangle \otimes |v\rangle + |d_1\rangle \otimes |m\rangle)$$

Este estado no es separable: no puede escribirse como un producto tensorial de dos factores individuales, lo cual implica un entrelazamiento cuántico entre el sistema microscópico y el macroscópico.

Medición del estado del átomo

Supongamos que se mide el observable que responde a la pregunta: ¿el átomo se ha desintegrado? Su base de autoestados es $\{|d_0\rangle, |d_1\rangle\}$ y su descomposición espectral es:

$$\hat{D} = d_0 \cdot (|d_0\rangle\langle d_0| \otimes I) + d_1 \cdot (|d_1\rangle\langle d_1| \otimes I)$$

Los proyectores asociados son:

$$P_0 = |d_0\rangle\langle d_0| \otimes I, \quad P_1 = |d_1\rangle\langle d_1| \otimes I$$

Calculamos la probabilidad de cada resultado según la regla de Born:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_0) &= \langle \Psi | P_0 | \Psi \rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \cdot \langle v | v \rangle = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(d_1) &= \langle \Psi | P_1 | \Psi \rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \cdot \langle m | m \rangle = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Colapso del estado

Si se obtiene el resultado correspondiente al átomo no desintegrado, el estado colapsa según:

$$|\Psi'\rangle = \frac{P_0|\Psi\rangle}{\|P_0|\Psi\rangle\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |d_0\rangle \otimes |v\rangle \cdot \frac{1}{\left\| \frac{1}{\sqrt{2}} |d_0\rangle \otimes |v\rangle \right\|} = |d_0\rangle \otimes |v\rangle$$

Similarmente, si se detecta que el átomo está desintegrado:

$$|\Psi''\rangle = |d_1\rangle \otimes |m\rangle$$

Estado reducido del gato

Para visualizar el impacto sobre el gato sin observar el átomo, podemos considerar el operador de densidad global:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} (|d_0\rangle\langle d_0| \otimes |v\rangle\langle v| + |d_0\rangle\langle d_1| \otimes |v\rangle\langle m| + |d_1\rangle\langle d_0| \otimes |m\rangle\langle v| + |d_1\rangle\langle d_1| \otimes |m\rangle\langle m|)$$

Tomando la traza parcial sobre el átomo:

$$\rho_{\text{gato}} = \text{Tr}_{\text{átomo}}(\rho) = \frac{1}{2}(|v\rangle\langle v| + |m\rangle\langle m|)$$

Es decir, el estado del gato, sin información sobre el átomo, es una mezcla clásica. La coherencia cuántica se pierde al reducir el sistema.

Interpretación y paradoja

Antes de la medición, el sistema está en una superposición coherente de dos posibilidades macroscópicamente distintas. Sin embargo, al realizar una observación, el formalismo requiere una proyección instantánea del estado, que interrumpe la evolución unitaria.

Este fenómeno pone en evidencia la diferencia entre la descripción matemática de un sistema y lo que efectivamente observamos. Las interpretaciones como la decoherencia argumentan que la pérdida de coherencia cuántica ocurre por interacción con el entorno. En cambio, enfoques como el de muchos mundos afirman que no hay colapso, sino que ambas ramas continúan en universos paralelos.

A día de hoy, el problema de la medida sigue siendo uno de los pilares fundamentales de la filosofía de la física cuántica.

A.2 Ejemplos de Relatividad General

Ejemplo 0.12 (Métrica de Minkowski). *En coordenadas cartesianas globales sobre el espacio plano de Minkowski, la variedad se representa por $\mathbb{R}^4$ con la métrica:*

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Esta métrica define una geometría plana sin curvatura, y es el modelo local de espaciotiempo en ausencia de gravedad.

Ejemplo 0.13 (Sistema uniformemente acelerado y el principio de equivalencia). *Para ilustrar el contenido matemático del principio de equivalencia fuerte, analizamos el caso de un observador en aceleración constante en el espacio plano de Minkowski. Aunque el espaciotiempo sigue siendo plano, veremos cómo, al usar coordenadas adaptadas a un sistema acelerado, la métrica adquiere una forma no trivial, con coeficientes no constantes y primeras derivadas distintas de cero. Este ejemplo es esencial para comprender que la gravedad puede “simularse” localmente mediante una aceleración adecuada, pero que sólo la curvatura determina si hay gravedad real en sentido geométrico.*

Comenzamos con la métrica de Minkowski en dos dimensiones espaciales:

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2$$

*Pasamos ahora a coordenadas (t, x) adaptadas a un observador que se acelera con aceleración constante a . Estas coordenadas se llaman **coordenadas de Rindler** y están definidas por:*

$$T = x \sinh(at), \quad X = x \cosh(at), \quad \text{con } x > 0$$

Estas transformaciones describen una familia de trayectorias hiperbólicas —movimiento rectilíneo uniformemente acelerado— en el diagrama de Minkowski. Ahora calculamos los diferenciales:

$$dT = \sinh(at) dx + ax \cosh(at) dt$$

$$dX = \cosh(at) dx + ax \sinh(at) dt$$

Sustituyendo en la métrica de Minkowski:

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 = -(dT)^2 + (dX)^2$$

Desarrollamos los cuadrados:

$$dT^2 = \sinh^2(at) dx^2 + 2ax \sinh(at) \cosh(at) dx dt + a^2 x^2 \cosh^2(at) dt^2$$

$$dX^2 = \cosh^2(at) dx^2 + 2ax \cosh(at) \sinh(at) dx dt + a^2 x^2 \sinh^2(at) dt^2$$

Al restar:

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 = -dx^2 + a^2x^2(\cosh^2(at) - \sinh^2(at))dt^2$$

Usando la identidad hiperbólica $\cosh^2(at) - \sinh^2(at) = 1$, llegamos a la métrica en coordenadas de Rindler:

$$ds^2 = -a^2x^2dt^2 + dx^2$$

Interpretación física. Aunque partimos de un espaciotiempo plano, el uso de coordenadas no inerciales ha hecho que la métrica dependa de la posición: $g_{tt} = -a^2x^2$. Esto refleja que, desde la perspectiva del observador acelerado, el tiempo y el espacio están distorsionados: el tiempo propio depende de la posición en el campo acelerado.

Esto parece sugerir la presencia de una “fuerza” o un “campo gravitatorio”. Pero, ¿hay curvatura real en este espaciotiempo?

Cálculo del tensor de Riemann

La única componente no trivial del tensor métrico es:

$$g_{tt} = -a^2x^2, \quad g_{xx} = 1$$

Las inversas:

$$g^{tt} = -\frac{1}{a^2x^2}, \quad g^{xx} = 1$$

Ahora calculamos las conexiones de Christoffel:

$$\Gamma_{tt}^x = \frac{1}{2}g^{xx}\partial_x g_{tt} = \frac{1}{2}\partial_x(-a^2x^2) = -a^2x$$

$$\Gamma_{tx}^t = \Gamma_{xt}^t = \frac{1}{2}g^{tt}\partial_x g_{tt} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2x^2}\right)(-2a^2x) = \frac{1}{x}$$

Calculamos una componente del tensor de Riemann:

$$R_{ttx}^x = \partial_t \Gamma_{tx}^x - \partial_x \Gamma_{tt}^x + \Gamma_{t\lambda}^x \Gamma_{tx}^\lambda - \Gamma_{x\lambda}^x \Gamma_{tt}^\lambda$$

Como g_{tt} depende sólo de x , tenemos:

$$\partial_t \Gamma_{tx}^x = 0, \quad \partial_x \Gamma_{tt}^x = \partial_x(-a^2x) = -a^2$$

$$\Gamma_{tx}^t \Gamma_{tt}^x = \frac{1}{x} \cdot (-a^2x) = -a^2$$

Entonces:

$$R_{ttx}^x = -(-a^2) + (-a^2) = a^2 - a^2 = 0$$

Resultado: todas las componentes del tensor de Riemann se anulan:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$$

Conclusión: Aunque la métrica en coordenadas de Rindler presenta derivadas primeras distintas de cero, el espaciotiempo es local y globalmente plano. Esto ilustra de forma matemática precisa el **principio de equivalencia fuerte**: es posible anular $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas primeras en un punto mediante un cambio de coordenadas, pero no las segundas derivadas. Estas segundas derivadas se relacionan directamente con el tensor de Riemann y, por tanto, con la curvatura real del espaciotiempo. En el ejemplo de Rindler, no hay curvatura (no hay gravedad real), solo efectos aparentes debido al uso de coordenadas aceleradas.

Ejemplo 0.14 (Cálculo detallado de la longitud de un meridiano en una esfera con la métrica). Sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la superficie bidimensional de una esfera de radio R . En coordenadas esféricas (θ, ϕ) , con $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$, la métrica inducida sobre la superficie de la esfera (es decir, el tensor métrico de la 2-variedad) está dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

La forma diferencial del elemento de línea sobre esta superficie es:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Queremos calcular la longitud de una curva que va desde el polo sur ($\theta = 0$) al polo norte ($\theta = \pi$) siguiendo un meridiano. Por definición, un meridiano es una curva sobre la esfera en la que $\phi = \text{constante}$, por lo que:

$$d\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = R^2 d\theta^2$$

La longitud L de una curva $\gamma : \theta \mapsto (\theta, \phi_0)$ se define como:

$$L[\gamma] = \int_\gamma \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

En este caso, tomamos $\lambda = \theta$, ya que la curva está parametrizada por θ , y entonces:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(\frac{d\theta}{d\theta}, \frac{d\phi}{d\theta} \right) = (1, 0)$$

Evaluamos el integrando:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = g_{\theta\theta}(1)^2 + 2g_{\theta\phi}(1)(0) + g_{\phi\phi}(0)^2 = R^2$$

Por tanto, la longitud total es:

$$L = \int_0^\pi \sqrt{R^2} d\theta = R \int_0^\pi d\theta = R\pi$$

Resultado: La longitud de un meridiano (es decir, la distancia sobre la superficie esférica desde el polo sur al polo norte) es:

$$L = \pi R$$

Este cálculo ilustra con precisión cómo se usa el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para definir la longitud de una curva sobre una variedad riemanniana. A partir de la métrica, se construye el integrando $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$, que representa el diferencial de arco, y se integra a lo largo del parámetro de la curva. En este caso, la elección de $\phi = \text{constante}$ eliminó términos cruzados y permitió una integración directa.

Ejemplo 0.15 (Solución del campo de Einstein en el vacío: métrica de Schwarzschild). Consideramos las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

En el vacío, por definición, no hay materia ni energía presentes, por lo que el tensor energía-momento se anula:

$$T_{\mu\nu} = 0$$

Sustituyendo en las ecuaciones de campo, obtenemos la ecuación del vacío:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

Multipliquemos ambos lados por $g^{\mu\nu}$ para contraer y obtener una ecuación escalar (la traza). Usamos que:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R, \quad g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$$

Tomando la traza:

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2}R \cdot 4 + 4\Lambda = 0$$

Simplificamos:

$$R - 2R + 4\Lambda = 0 \Rightarrow -R + 4\Lambda = 0 \Rightarrow R = 4\Lambda$$

Sustituyendo este valor de R en la ecuación original:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(4\Lambda)g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

Por tanto, en el vacío, las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica se reducen a:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

Esta es la ecuación de Ricci para una **solución Einstein**, que exige que el tensor de Ricci sea proporcional a la métrica.

Caso $\Lambda = 0$:

Cuando además se impone $\Lambda = 0$, obtenemos:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Queremos encontrar una métrica $g_{\mu\nu}$ que satisfaga esta condición. Una solución exacta es la **métrica de Schwarzschild**, que se obtiene imponiendo: - Simetría esférica - Estacionariedad - Métrica en el vacío

La forma general de una métrica estática y esféricamente simétrica es:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

Imponiendo $R_{\mu\nu} = 0$, y resolviendo el sistema de ecuaciones que se obtiene al insertar esta forma de la métrica en las expresiones del tensor de Ricci, se halla que:

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad B(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

Por tanto, la métrica de Schwarzschild es:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

Esta solución describe el espaciotiempo exterior a una masa puntual no cargada y no rotante. Es la solución más simple y físicamente relevante del campo de Einstein en el vacío.

Caso $\Lambda \neq 0$:

Cuando $\Lambda \neq 0$, la ecuación $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ admite como solución la **métrica de Schwarzschild-de Sitter** (para $\Lambda > 0$) o **Schwarzschild-anti-de Sitter** (para $\Lambda < 0$), cuya forma es:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

Esta métrica sigue siendo estática y esféricamente simétrica, pero describe un espaciotiempo influenciado tanto por la masa puntual como por una constante cosmológica, lo cual es relevante en contextos cosmológicos como la aceleración de la expansión del universo.

Ejemplo 0.16 (Cálculo del intervalo y del tiempo propio en la métrica de Schwarzschild). Consideremos la métrica de Schwarzschild, que describe el espaciotiempo fuera de una distribución esférica de masa M , en coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Esta expresión define localmente el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, cuyas componentes no nulas son:

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right), \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$$

Supongamos ahora que una partícula se encuentra en reposo en el campo gravitatorio generado por la masa M , es decir, que su posición espacial no cambia. Esto implica:

$$dr = 0, \quad d\theta = 0, \quad d\phi = 0$$

Dado que la partícula está estática, la única coordenada que varía es la temporal, dt . Sustituyendo estas condiciones en la forma general del intervalo espacio-temporal:

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2$$

obtenemos:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2$$

En relatividad general, el tiempo propio $d\tau$ medido por un reloj que sigue la trayectoria de una partícula está relacionado con el intervalo mediante la relación:

$$ds^2 = -d\tau^2$$

por lo que podemos escribir:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2$$

y, tomando la raíz positiva (ya que el tiempo propio es una magnitud real y positiva):

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} dt$$

Interpretación física. Este resultado expresa de forma explícita cómo el campo gravitatorio afecta a la medición del tiempo. En concreto, muestra que el tiempo medido por un reloj estático en un campo gravitatorio (a distancia r de la masa M) transcurre más lentamente que el tiempo coordenado dt , medido por un observador idealmente situado en el infinito, donde la métrica se aproxima a la de Minkowski y $d\tau = dt$.

Este fenómeno, conocido como dilatación gravitacional del tiempo, es una de las predicciones más destacadas de la relatividad general, y ha sido confirmada experimentalmente en situaciones como la medición del desfase temporal entre relojes atómicos a distintas altitudes sobre la superficie terrestre.

Ejemplo 0.17 (Caída radial desde el reposo en el infinito en la métrica de Schwarzschild). *Consideremos una partícula de prueba cayendo radialmente hacia una masa puntual M , desde el reposo en el infinito, en un espaciotiempo descrito por la métrica de Schwarzschild. Esta métrica, en coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , se expresa como:*

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Como se trata de una caída radial, el movimiento es puramente en la coordenada r ; es decir, no hay desplazamiento angular:

$$d\theta = 0, \quad d\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad d\Omega^2 = 0$$

En estas condiciones, el elemento de línea se reduce a:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2$$

Dado que la partícula tiene masa, su trayectoria es una geodésica temporal, y el intervalo está relacionado con el tiempo propio τ mediante $ds^2 = -d\tau^2$. Sustituyendo en la expresión anterior:

$$-d\tau^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2$$

Reescribimos esta relación como:

$$\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2$$

Tomando como parámetro afín el tiempo propio ($\lambda = \tau$), la ecuación queda:

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \quad (1)$$

Conservación de la energía

La métrica no depende explícitamente de t , por lo que existe una simetría temporal. Según el formalismo lagrangiano aplicado a sistemas relativistas Carroll, 2004, esta simetría

implica la conservación de una cantidad asociada: la energía específica por unidad de masa.

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$$

Para una partícula que parte desde el reposo en el infinito, se tiene que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dr}{d\tau} = 0 \quad y \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = 1$$

Sustituyendo en la ecuación (1), obtenemos:

$$1 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = 1 \Rightarrow E = 1$$

Por tanto, para cualquier punto de la trayectoria:

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (2)$$

Velocidad radial en función del tiempo propio

Sustituimos (2) en la ecuación (1) para encontrar la velocidad radial:

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2}\right) - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$

Simplificando el primer término:

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$

Multiplicamos por $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$ y despejamos:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2GM}{r} \Rightarrow \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (3)$$

El signo negativo indica que el radio disminuye con el tiempo propio: la partícula está cayendo hacia el centro de la distribución de masa.

Conclusión física. Las ecuaciones anteriores nos permiten describir completamente el movimiento de una partícula que cae libremente desde el infinito bajo la influencia del campo gravitatorio de Schwarzschild. En particular:

- La velocidad radial medida en tiempo propio es:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

- La relación entre el tiempo coordenado t y el tiempo propio τ es:

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

Esto último implica que, al acercarse al horizonte de sucesos ($r \rightarrow 2GM$), el valor de $\frac{dt}{d\tau} \rightarrow \infty$, lo que significa que, desde la perspectiva de un observador lejano, el reloj de la partícula parece detenerse. Sin embargo, desde el punto de vista de la propia partícula (en caída libre), el tiempo transcurre normalmente y atraviesa el horizonte en un tiempo propio finito.

Este fenómeno ilustra una de las consecuencias más profundas de la relatividad general: la dilatación extrema del tiempo cerca de campos gravitatorios intensos. También anticipa el papel fundamental que juegan las coordenadas y los observadores en la interpretación física de los eventos en espaciotiempos curvos.

Ejemplo 0.18 (Localización del horizonte de sucesos en Schwarzschild). Consideremos la métrica de Schwarzschild, que describe el espaciotiempo fuera de una distribución esférica de masa M , en coordenadas (t, r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Nos interesa identificar si esta métrica contiene un **horizonte de sucesos**, y, de ser así, determinar su localización. Para ello, analizamos el comportamiento del componente temporal g_{tt} y del componente radial g_{rr} .

Análisis de los coeficientes métricos

La función:

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$$

aparece en dos componentes:

$$g_{tt} = -f(r), \quad g_{rr} = \frac{1}{f(r)}$$

Esta función se anula en:

$$f(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = r_s = 2GM$$

En este punto: $g_{tt}(r_s) = 0 \rightarrow$ el tiempo parece “congelarse”, $g_{rr}(r_s) = \infty \rightarrow$ la métrica se vuelve singular en la componente radial.

Sin embargo, esta es una **singularidad de coordenadas**, como veremos más adelante. El valor $r = r_s$ define una superficie especial.

Comportamiento de las geodésicas nulas

Para caracterizar si $r = r_s$ corresponde a un horizonte, analizamos las trayectorias de la luz. Consideramos una trayectoria **nula radial**:

$$ds^2 = 0, \quad d\theta = d\phi = 0$$

Sustituyendo en la métrica:

$$0 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2$$

Despejamos:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

Cerca de $r = 2GM$, se tiene $dr/dt \rightarrow 0$: la luz “se congela” al acercarse a esa superficie cuando la medimos con coordenadas t . Esto indica que, para un observador lejano, ningún objeto puede atravesar esa superficie en un tiempo finito.

Interpretación causal

En relatividad general, una superficie es un horizonte de sucesos si separa las regiones del espaciotiempo desde las cuales es posible enviar señales al infinito futuro nulo $\mathcal{I}^+$ de aquellas desde las cuales no lo es. En Schwarzschild:

Para $r > 2GM$, las geodésicas pueden escapar hacia $r \rightarrow \infty$. Para $r < 2GM$, todas las trayectorias —incluso las de la luz— están dirigidas hacia $r = 0$, es decir, nada puede salir.

Por tanto, $r = 2GM$ define una **superficie nula** que actúa como una frontera causal: es el **horizonte de sucesos** del agujero negro de Schwarzschild.

Coordenadas alternativas

Aunque la métrica parece singular en $r = 2GM$, esta divergencia no refleja una patología física, sino una elección inadecuada de coordenadas. Esto se confirma al introducir coordenadas de tipo Eddington-Finkelstein o Kruskal-Szekeres, donde la métrica es regular en $r = 2GM$.

Conclusión

La superficie $r = 2GM$ cumple todas las condiciones geométricas y físicas para ser identificada como un horizonte de sucesos:

$$r = r_s = 2GM$$

Es una superficie nula, no traspasable desde el interior hacia el exterior, que separa las regiones del espaciotiempo accesibles desde el infinito futuro de aquellas que no lo son. Esta superficie caracteriza el límite externo de un agujero negro estático y no cargado en relatividad

general.

Ejemplo 0.19 (Obtención de la primera ecuación de Friedmann a partir de la métrica FLRW). Queremos derivar, desde primeros principios, la ecuación que describe la evolución del factor de escala $a(t)$ en un universo homogéneo e isótropo, bajo la teoría de la relatividad general.

Métrica FLRW

La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) en coordenadas comóviles (t, r, θ, ϕ) es:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]$$

Tensor energía-momento del fluido perfecto

Suponemos que el contenido del universo se modela como un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$$

Donde: $\rho(t)$: densidad de energía. $p(t)$: presión. $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$: observador comóvil. En particular, la componente temporal es:

$$T_{00} = \rho$$

Ecuaciones de campo de Einstein

La relatividad general establece:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Donde: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$: tensor de Einstein. $R_{\mu\nu}$: tensor de Ricci. $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$: escalar de Ricci.

Cálculo del tensor de Ricci y su traza

Se calculan las conexiones de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ con la métrica. Las no nulas que contribuyen a R_{00} son:

$$\Gamma_{0i}^i = \Gamma_{i0}^i = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma_{ii}^0 = a\dot{a}g_{ii}^{espacial}$$

Con esto se obtiene (ver detalles en libros como Misner-Thorne-Wheeler o Wald Misner et al., 1973 o Wald, 1984):

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right)$$

Tensor de Einstein componente G_{00}

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}R(-1) = -3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}R$$

Sustituimos el valor de R :

$$G_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right) = 3\left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right)$$

Sustitución en las ecuaciones de campo

Ahora sustituimos en la ecuación de campo:

$$G_{00} + \Lambda g_{00} = 8\pi G\rho$$

Como $g_{00} = -1$, obtenemos:

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{k}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho$$

Reordenamos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Resultado final: primera ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Interpretación física. Esta ecuación describe la dinámica de la expansión del universo. La tasa de crecimiento relativa del factor de escala $H(t) = \dot{a}/a$, llamada parámetro de Hubble, depende de: ρ : densidad de energía del contenido material del universo (materia, radiación, etc.). k : curvatura espacial global. Λ : constante cosmológica, relacionada con la energía del vacío.

La ecuación permite estudiar distintos regímenes de evolución cósmica dependiendo de las condiciones iniciales y el contenido del universo.