GRADO EN FÍSICA

Levantando la mirada más allá del vasto océano: El camino seguido hacia la Gravedad Cuántica de Bucles y su solución al problema de la cuantización de la gravedad

Presentado por:

JAVIER LÓPEZ RODA

Dirigido por:

VICTOR ILISIE

CURSO ACADÉMICO 2024-2025

This Page Intentionally Left Blank

Agradecimientos

A mis padres, por confiar en mi y por darme todas las oportunidades, de las que espero haber estado a la altura. Muchas gracias por apoyarme todos estos años,incluso en haberme metido en una carrera tan extraña y complicada como es Física.

A Victor Ilisie, mi tutor, por haber sido uno de los mejores profesores que he tenido durante toda la carrera y un ejemplo de investigador, que nos ha trasmitado a todos sus alumnos la curiosidad y el amor que siente por la Física

A todos los amigos y compañeros que he hecho a lo largo de la carrera, que han sido un gran apoyo durante los momentos (y exámenes) más duros de estos cuatro años. Sobre todo, gracias a Ángel por esos findes de semanas que nos hemos pasado de tecno y volvernos locos estudiando

A Alberto, mi compañero de piso, de clase y una de las mejores personas que me llevo a de la carrera. Gracias por haber hecho tan divertidos estos 4 años que nos ha tocado de compañeros de piso y por todos esos debates frente a nuestra pizarra a las 3 de la mañana.

A Miguel, mi mejor amigo, por todos los buenos momentos que hemos pasado juntos y por esos paseos interminables de los que nunca nos quedábamos sin nada de lo que hablar y debatir. Creo que no sería la persona tan curiosa que soy hoy de no ser por él.

A todas las personas y amigos que he conocido aquí en Valencia, todas las amistades que ya no están y las que siguen. Porque de cada uno ellos siento que me he llevado la mejor parte y espero que ellos también se hayan llevado lo mejor de mi.

Abstract

Desde el origen de ambas teorías, la Mecánica Cuántica y la Relatividad General han presentado problemas para unificarse como una gran teoría que explica uno de los fenómenos físicos más importantes: la gravedad. Tras analizar ambas teorías desde sus fundamentos conceptuales y herramientas matemáticas se han descrito los problemas concretos que dificultan la unificación de ambas. Presentando las perspectivas canónicas y covariantes de la cuantización de la gravedad se ha expuesto uno de los mejores aproximaciones en la actualidad que aúna ambas perspectivas, la gravedad cuántica de bucles, introduciendo las bases de su formalismo y sus implicaciones conceptuales.

Keywords: Teorías gauge, Física Relacional, Cuantización Canónica, Cuantización Covariante, Teoría Cuántica de Bucles, Formalismo ADM, Holonomía, Tetrads, Triads, Variables de Ashtekar, Ecuación de Wheeler-DeWitt, Redes de spines.

Since their beginnings, both Quantum Mechanics and General Relativity have faced challenges in unifying into a grand theory that explains one of the most important physical phenomena: gravity. After analyzing both theories from their conceptual foundations and mathematical tools, the specific problems hindering their unification have been described. By presenting the canonical and covariant perspectives of gravity quantization, one of the best current approaches that combines both perspectives has been introduced: Loop Quantum Gravity, along with the foundations of its formalism and its conceptual implications.

Keywords: Gauge theories, Relational Physics, Canonical Quantization, Covariant Quantization, Loop Quantum Theory, ADM Formalism, Holonomy, Tetrads, Triads, Ashtekar Variables, Wheeler–DeWitt Equation, Spin Networks.

Índice general

Es tentador detenerse en este momento, mientras aún existen todas las posibilidades. Pero a menos que un observador las derrumbe, nunca serán más que posibilidades

De *un amigo*
En el centro del Universo

Capítulo 1
Introducción

Desde sus primeras formulaciones, la Mecánica Cuántica ha dudado de sus propias bases conceptuales [1]. Desde el desarrollo de las primeras formulaciones por parte de Heisenberg, Jordan, Born y, de manera paralela, Dirac se trató de encontrar una forma de explicar esta teoría a partir del álgebra a la que estaba acostumbrada la comunidad física a principios del siglo XX. Fue con la introducción de la función de onda ψ formulada por Schrödinger que se consiguió traducir este nuevo formalismo a un lenguaje matemático común, el álgebra matricial. No obstante, la introducción de la función de onda trajo consigo problemas conceptuales que hoy en día siguen arraigados en las bases de la Mecánica Cuántica. En la misma época en la que la Teoría Cuántica comenzaba a nacer, la comunidad científica tenía los ojos puestos en la teoría del momento: la Relatividad General. Uno de los primeros pensamientos que se tuvo durante el desarrollo de la Mecánica Cuántica fue, como era lógico dada la importancia que había adquirido la Relatividad General, intentar unificar ambas teorías. Sin embargo, desde sus propias bases, la discretización del espacio a partir de la constante de Planck $\hbar$ y la formulación del campo gravitacional como el continuo espacio-tiempo, ambas teorías han presentado serios problemas al intentar unificar ambos formalismos [2].

Numerosas reinterpretaciones de las bases de la Mecánica Cuántica han sido propuestas para intentar acercarla a la Relatividad General. Una de las propuestas con mayor impulso ha sido el desarrollo de la Física Relacional (FR), partiendo de la siguiente proposición : 'Un sistema solo nos aporta información física cuándo ésta es relativa a otro sistema externo. Sin embargo, todos los sistemas físicos se consideran equivalentes y, por tanto, la teoría solo describe la información que los sistemas comparten entre ellos'. Los dos grandes impulsores de esta corriente, Carlo Rovelli y Abhay Ashtekar [3, 4], propusieron esta perspectiva con el objetivo de 'devolver' a la Mecánica Cuántica al estudio de los fenómenos físicos y alejarla de los conceptos puramente matemáticos como podía ser la función de onda ψ.

Sin embargo, a pesar de este gran cambio conceptual que propuso la Física Relacional, no solucionaba el mayor de los problemas que presentaba la unificación de ambas teorías [5] : la cuantización de los sistemas relativista, donde el elemento más problemáticos de todos ha sido la cuantización de la gravedad. A pesar del desarrollo de la Teoría Cuántica de Campos que solucionaba la cuantización de sistemas sometidos a campos magnéticos o de interacción, alcanzar un formalismo que cuantifique el campo gravitacional ha sido motivos de disputa en la comunidad científica a lo largo del tiempo desde los primeros intentos en 1930 por Rosenfeld los cuales dejaron ver las complicaciones técnicas y conceptuales que tendría la cuantización del campo gravitacional.

Numerosas propuestas se ha desarrollado a lo largo de las últimas décadas para solucionar esta situación y unificar ambas teorías, desde la aproximación por integrales de camino de Feymann a la cuantización canónica formulada por DeWitt e inspirada en el trabajo de Wheeler. Siguiendo la reintepretación de la Física Relacional, en este trabajo se desarrollará el camino histórico y conceptual que ha llevado a una de las teorías más importantes en la actualidad en la busqueda de la creación de una teoría cuántica de la gravedad: la Gravedad Cuántica de Bucles.

Durante este trabajo se desarrollará el problema de la cuantización a lo largo de las teorías más importantes que han llevado a la creación de la Gravedad Cuántica de Bucles. Se introducirán la primera cuantización elaborada por Heisenberg durante los inicios de la Teoría Cuántica y se comentarán los problemas conceptuales que presenta esta teoría y el cómo afectan a la unificación conceptual con la Relatividad General. Se explorará una de las soluciones dadas a estas incompatibilidades, la Mecánica Relacional y se explicará cuales son los cambios que efectúa sobre las bases de la Mecánica Cuántica. tras esta explicación de la parte ”cuántica” del problema de la cuantización (desde un punto de vista más conceptual), pasaremos a explicar las herramientas sobre las que se han construido los diversos formalismos y propuestas de cuantización: las teorías gauge y los diferentes el formalismos hamiltonianos; con el objetivo de presentar uno de los puntos clave, tanto histórico como teórico, en el problema de la cuantización: la cuantización canónica de DeWitt. Se estudiarán las bases de esta propuesta y el gran problema que plantea, el conocido como *problema del tiempo* y se formulará una de sus posibles soluciones, la solución covariante [6], una nueva formulación en la que el tiempo no se considera una variable física [7, 8]. La explicación de estas propuestas servirán de introducción a las bases de la teoría de la Gravedad Cuántica de Bucles, de la que se presentará los conceptos fundamentales en los que se basa, enlazando con los conceptos vistos durante el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 2
Formulación de la Mecánica Cuántica

Para poder entender más en profundidad el problema de la unificación de ambas teorías es necesario remontarse al origen de la Mecánica Cuántica [1], donde se formulo por primera vez el concepto de cuantización y se definieron las bases de este nuevo formalismo. Fue en estas primeras bases donde surgieron los problemas teóricos que se arrastrarían al intentar entender el espacio de forma discreta, en oposición al espacio continuo que suponía la Relatividad General.

Primera cuantización

La teoría que hoy en día conocemos como 'Mecánica Cuántica' nació de la mano de Weiner Heisenberg [9] en 1925 a partir de una serie de artículos junto a Born y Jordan donde definirían todo el conjunto de ecuaciones que formarían esta teoría basándose en la mecánica matricial. En su primera propuesta, Heisenberg partió del caso de un electrón en un átomo que seguiría un movimiento periódico. Una cantidad $x_n(t)$ relacionada con el n^{th} estado del electrón se podría expresar como una serie de Fourier de manera clásica de la forma

$$x_n(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(n,\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(n,\tau) exp\left[2\pi i\nu(n,\tau)t\right] \tag{2.1}$$

donde la componente τ^{th} tiene la frecuencia $\nu(n,\tau) = n\tau(n,1)$ por lo que sigue la siguiente relación

$$\nu(n,\tau) + \nu(n,\tau^{'}) = \nu(n,\tau+\tau^{'}) \tag{2.2}$$

Su análogo en la mecánica cuántica, siguiendo los postulados de Bohr tendría la forma

$$\nu_{n,n-\tau'} + \nu_{n-\tau',n-\tau} = \nu_{n,n-\tau} \tag{2.3}$$

Gracias al principio de correspondencia las frecuencias clásicas y cuánticas se pueden relacionar de la forma

$$\nu(n,\tau) \leftrightarrow \nu_{n,n-\tau} \tag{2.4}$$

por lo que Heisenberg justificó que las amplitudes en el caso cuántico deberían de tener la forma

$$x(n,\tau) \leftrightarrow x_{n,n-\tau} \tag{2.5}$$

Por ello, el conjunto $\{x_{n,n-\tau} exp\left[2\pi i \nu_{n,n-\tau} t\right]\}$ será la forma de las amplitudes de $x_n(t)$ en el caso cuántico. En el caso clásico, las amplitudes tendrán la forma siguiendo la ecuación 2.2 de

$$\begin{aligned} x_n(t) = &\left[\sum_{\tau} x(n,\tau) exp\left[2\pi i \nu(n,\tau)t\right]\right]\left[\sum_{\tau'} x(n,\tau') exp\left[2\pi i \nu(n,\tau')t\right]\right] = \\ &= \sum_{\tau\tau'} x(n,\tau)x(n,\tau') exp\left[2\pi i \nu(n,\tau-\tau')t\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

Haciendo el cambio de variable $\tau \to \tau - \tau'$ se obtiene

$$\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} x^2(n,\tau) exp\left[2\pi i \nu(n,\tau)t\right] \tag{2.7}$$

donde

$$x^2(n,\tau) = \sum_{\tau'=-\infty}^{+\infty} x(n,\tau')x(n,\tau-\tau') \tag{2.8}$$

por tanto, siguiendo la relación 2.3, la cantidad cuántica correspondiente será

$$x_n^2(t) \leftrightarrow \left\{x_{n,n-\tau}^2 exp\left[2\pi i \nu_{n,n-\tau} t\right]\right\} \tag{2.9}$$

Generalizando estas correspondencias como $x_n(t)\eta_n$ se obtiene un álgebra no conmutativa, ya que incumple en general

$$\sum_{\tau'} x_{n,n-\tau'} y_{n-\tau',n-\tau} \neq \sum_{\tau'} y_{n,n-\tau'} x_{n-\tau',x-\tau} \tag{2.10}$$

A partir de esta generalización se formulo la primera de cuantización de un sistema clásico en la *vieja teoría cuántica*, conocida como cuantización semiclásica o de tipo Bohr-Sommerfeld. Para realizar esta cuantización, primero se obtiene la ecuación clásica del movimiento del sistema y, tras ello, se impone la *condición de acción cuántica*

$$\oint p dq = n\hbar \tag{2.11}$$

Esta cuantización servía para sistemas simples sin embargo, se volvía más complicada cuanto más complejo se volvía el sistema ya que resolver la dinámica de un sistema complejo puede llegar a ser muy complicado de calcular completamente.

Heisenberg, para el caso de una ecuación genérica del movimiento $\ddot{x}+f(x)=0$ y aplicando el principio de correspondencia

$$\tau \frac{\partial \Phi(n,\tau)}{\partial n} \leftrightarrow \Phi_{n+\tau,n} - \Phi_{n,n-\tau} \tag{2.12}$$

demostró que

$$\begin{aligned} \oint pdq = \int_0^{1/nu} m\dot{x}^2 dt = 2\pi^2 m \sum_\tau \tau\nu(n,\tau) \left|x(n,\tau)\right|^2 = n\hbar \\ \Longrightarrow h = 2\pi^2 m \sum_\tau \tau \frac{d}{dn}(\nu(n,\tau)\left|x(n,\tau)\right|^2) \\ \leftrightarrow 2\pi^2 m \sum_\tau \nu_{n+\tau,n}\left|x_{n+\tau,n}\right|^2 - \nu_{n,n-\tau}\left|x_{n,n-\tau}\right|^2 = \hbar \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde $x(n,\tau) = x^*(n,-\tau)$ ya que $x_n(t)$ debe de ser real, es la condición de cuantización de este sistema. A partir de este sistema genérico, Heisenberg demostró, en un momento muy temprano para la Mecánica Cuántica, el esquema matemático para cuantificar un sistema clásico.

Durante el mismo periodo de tiempo, Dirac desarrollo de manera paralela en la formulación de la mecánica matricial encontrando una relación entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica [10]. Definió la forma de un *operador genérico* como d/dv, el cual obedece las siguientes normas

1. $$\frac{d}{dv}(x+y) = \frac{dx}{dv} + \frac{dy}{dv} \tag{2.14}$$

2. $$\frac{d(xy)}{dv} = x\frac{dy}{dv} + \frac{dx}{dv}y \tag{2.15}$$

donde x, y obedecen la regla de producto matricial, $(xy)_{mn} = \sum_k x_{mk}y_{kn}$. Debido a la primera regla se obtiene

$$(Dx)_{mn} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{mn} \equiv \sum_{m'n'} a_{nm,n'm'}x_{n'm'} \tag{2.16}$$

Por la segunda regla se obtiene

$$\sum_{n'm'k} a_{nm,n'm'}x_{n'k}y_{km'} = \sum_{kn'k'} a_{nk,n'k'}x_{n'k}y_{km'} + \sum_{kk'm'} x_{nk}a_{km,k'm'}y_{k'm'} \tag{2.17}$$

Comparando estas últimas dos expresiones, Dirac fue capaz de reducir (19) a

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_{mn} = \sum_k x_{nk}a_{km} - a_{nk}x_{km} \tag{2.18}$$

expresión que se puede escribir como

$$\frac{dx}{dv} = [x, a] \tag{2.19}$$

lo que demostró que la operación más básica a la que se puede someter una variable cuántica x sujeta a las reglas expuestas al principio se puede explicar como 'la diferencia de sus productos de Heisenberg junto a otra variable cuántica'.

Clásicamente, y aplicando el principio de correspondencia (13), Dirac obtuvo

$$[x, y] \leftrightarrow \frac{ih}{2\pi}\{x, y\} \tag{2.20}$$

donde

$$\{x, y\} = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} \tag{2.21}$$

son los corchetes de Poisson. En mecánica clásica, un sistema descrito por un conjunto de coordenadas $\{q_i, p_i\}$, la relación de conmutación canónica será

$$\{q_k, p_l\}_{qp} = \sum_i \frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial p_l}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_l}{\partial q_i} = \delta_{kl} \tag{2.22}$$

donde $\{p_k, p_l\} = \{q_k, q_l\} = 0$. Estas coordenadas se denominan coordenadas canónicas y las transformaciones que transforman un conjunto de coordenadas canónicas en otro se conocen como transformaciones canónicas. Los corchetes de Poisson son invariante bajo transformaciones, por tanto las ecuaciones del movimiento también lo son. Según estas definiciones, el problema de la cuantización se puede resumir en encontrar un conjunto de coordenadas canónicas que aporten la máxima información sobre las constantes de movimiento del sistema y transformar sus ecuaciones del movimiento usando el principio de correspondencia de Dirac.

Este tipo de cuantización es la que se conoce como cuantización de Dirac y es la primera de las dos cuantizaciones canónicas junto a la cuantización reducida. No obstante, la cuantización reducida no aparecería hasta los intentos de aplicación de la Mecánica Cuántica a campos como la Electrodinámica cuántica (teoría Yang-Mills) o a la Relatividad General.

El problema de la función de onda ψ

Un año más tarde al desarrollo de las bases de la Mecánica Cuántica de Heisenberg y de la mecánica matricial de Dirac, Erwin Schrödinger propuso dos cambios fundamentales en la teoría cuántica. Un primer cambio técnico, traduciendo el lenguaje algebraico que utilizaba la teoría hasta ahora al lenguaje de las ecuaciones diferenciales; y un segundo cambio más conceptual que introdujo el concepto de *función de onda*, el cual evolucionaría al concepto de *estado cuántico* ψ. Desde el primer momento en el que se introdujo este concepto fue criticado por Heisenberg debido a la importancia que adquirió dentro de la teoría cuántica.

Este peso ontológico dentro de la Mecánica Cuántica se justifico con la necesidad de explicar el comportamiento ondulatorio de la materia. En propias palabras de Schrödinger, 'la teoría cuántica debía de ser una teoría sobre el comportamiento de las ondas en un espacio físico'. Sin embargo, [11] este punto de vista trajo numerosos problemas conceptuales a la Mecánica Cuántica. Estos problemas se pueden resumir en tres puntos clave:

- El estado cuántico de dos partículas no se puede expresar como la colección de funciones de onda en un espacio físico.

- La formulación ondulatoria se aleja de la característica principal que habían demostrado las teorías atómicas del momento: la discretización de los niveles de energía.

- Al considerar la función de onda ψ como un objeto real, surge al 'problema de la medida'.

A pesar de los problemas que presentaba esta perspectiva, las ventajas que trajo utilizar el álgebra de las ecuaciones diferenciales y las representaciones lineales en el espacio de Hilbert; y la formulación de la *dualidad onda / corpúsculo* por parte de Bohr, uno de los padres de la teoría cuántica, convenció a la mayor parte de la comunidad científica de la época para considerar la teoría ondulatoria de Schrödinger como la correcta. Sin embargo, poco tiempo después, hasta el propio Schrödinger se percató de las incoherencias conceptuales de su formulación inicial.

A pesar del asentamiento de la función de onda ψ como definición de un 'estado cuántico', una parte de la comunidad científica se mantuvo escéptica a su uso y busco una reformulación de la teoría cuántica donde el concepto de la función de onda ψ desapareciera. Una de estas contribuciones fue la perspectiva relacional de la Mécanica Cuántica formulada por Carlo Rovelli y Julian B. Barbour durante su búsqueda de una teoría que unificara los conceptos de la Relatividad General con la Física Cuántica.

La Física Clásica describe el mundo en términos de variables físicas y de la interacción de los sistemas físicos en función de estas variables. Lo mismo debería de ocurrir en la Mecánica Cuántica, asumiendo que ambas teorías sean capaces de estudiar los mismo fenómenos. Si concebimos la Mecánica Cuántica como una teoría de variables físicas se pueden prever algunas de sus características:

1. Existe cierta *discretitud* en la naturaleza, por lo que las variables físicas deben de tomar valores discretos y específicos.

2. Los valores de estas variables solamente se podrán adquirir de manera *probabilística*.

3. Los valores de las variables de un sistema físico son siempre *relativos* a otro sistema físico.

Es en este última característica donde recae el mayor peso filosófico y conceptual de esta interpretación y la que dará nombre a Mecánica Cuántica Relacional.

Perspectiva de la Mecánica Cuántica Relacional

La base de esta teoría es la crítica a un concepto base de la Mecánica Cuántica que se considera intocable, el concepto de sistema físico independiente del observador. Abandonando este concepto y asumiendo que toda cantidad de un sistema físico es 'relativa' a otro sistema, las bases de la Mecánica Cuántica adquieren una nueva y mayor solidez.

Para comprender esta perspectiva y sus implicaciones se puede tomar como ejemplo uno de los más conocidos experimentos mentales dentro de Teoría Cuántica de la Información: el amigo de Wigner [12, 13].

Un observador *O* realiza un medición sobre un sistema cuántico *S* en unl laboratorio. Al medir una variable del sistema *q*, ésta puede tomar dos posibles valores, 1 y 2. Aplicando el formalismo matricial formulado por Dirac, los posibles estados del sistema *S* se definen como vectores en un espacio de Hilbert complejo H_S de dos dimensiones. Un estado genérico de dicho sistema *S* se podrá escribir como $|\psi\rangle = \alpha\,|1\rangle + \beta\,|2\rangle$; donde $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ son las probabilidades de medir cada uno de los posibles valores de la variable *q*, cumpliendo el criterio de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Al realizar una medición sobre *S* el observador *O* obtendrá uno de estos dos valores, en este caso imaginemos que obtiene el valor 1. A este caso concreto se le llamara ε. Tras un tiempo t_2 se vuelve a realizar una medición sobre el sistema *S* y el estado que se obtiene será $|1\rangle$. La secuencia temporal del experimento se podría entender como

$$t_1 \rightarrow t_2 \tag{2.23}$$

$$\alpha\,|1\rangle + \beta\,|2\rangle \rightarrow |1\rangle \tag{2.24}$$

Durante el experimento ε, el observador *O* ha sido el único que ha interaccionado con el sistema. Sin embargo, introduzcamos ahora un segundo observador *P* del sistema conjunto de *O* realizando el experimento sobre *S*. El nuevo observador *P* no interacciona con el sistema mixto de *O* y *S* pero conoce el estado del sistema durante t_1 y t_2. Este nuevo observador describe el sistema *S* en el espacio de Hilbert H_S y al observador *O* en un espacio de Hilbert diferente H_O donde *S*-*O* será descrito por el producto tensorial $H_{SO} = H_S \otimes H_O$. Se podrá definir el estado inicial en t_1 del observador *O* sobre H_O como el vector $|init\rangle$.

El proceso físico por el que *O* mide el estado del sistema *S* implica un interacción física entre los dos, por lo que el estado del observado *O* cambiara acorde al cambio del sistema *S*. Si el estado que mide *O* resulta ser $|1\rangle$, el estado $|init\rangle$ evolucionará a un estado que se puede denominar como $|O1\rangle$. El estado mixto por tanto, evolucionará con el tiempo de la siguiente forma

$$t_1 \to t_2 \tag{2.25}$$

$$(\alpha |1\rangle + \beta |2\rangle) \otimes |init\rangle \to \alpha |1\rangle \otimes |O1\rangle + \beta |2\rangle \otimes |O2\rangle \tag{2.26}$$

Las descripciones 2.24 y 2.26 son descripciones del mismo experimento ε, pero expresan diferentes resultados dependiendo de quien lo observa.

A partir de este experimento mental se pueden formular dos grandes hipótesis sobre la naturaleza de la Mecánica Cuántica:

1. *Todos los sistemas son equivalentes*. En la Mecánica Cuántica no se pueden distinguir a priori entre sistemas macroscópicos y sistemas cuánticos. Si un observador *O* puede dar una descripción cuántica de un sistema *S*, otro observador *P* puede dar una descripción cuántica de un sistema que incluya al observador *O*.

2. La Mecánica Cuántica da una *descripción completa y consistente del mundo físico*, acorde al nivel de las observaciones experimentales en el que se estudie.

No obstante, si estas dos hipótesis son ciertas, debe de existir una relación entre las distintas descripciones de un mismo sistema físico que asegure la completitud de la información que se puede obtener de él. Para explicar esta relación se puede mostrar con el ejemplo del amigo de Wigner.

Continuando en la misma configuración del experimento anterior, podemos considerar un operador puntero *M* en el espacio de Hilbert H_{SO} capaz de expresar la correlación entre dicha variable puntero $|O1\rangle$ (o $|O2\rangle$) y su capacidad de apuntar a los estados correspondientes del sistema *S* $|1\rangle$ (o $|2\rangle$). Por tanto, el operador *M* actuará de la siguiente manera:

$$M(|1\rangle \otimes |O1\rangle) = |1\rangle \otimes |O1\rangle \tag{2.27}$$
$$M(|1\rangle \otimes |O2\rangle) = 0 \tag{2.28}$$
$$M(|2\rangle \otimes |O1\rangle) = 0 \tag{2.29}$$
$$M(|2\rangle \otimes |O2\rangle) = |2\rangle \otimes |O2\rangle \tag{2.30}$$

Donde su autovalor, medido por *P*, será la probabilidad de que el observador *O* haya medido el sistema *S*. Para un tiempo t_2, los autovalores del operador *M* serán los vistos en las ecuaciones 2.27-2.30; en el momento en el que un observador *P* sabe con certeza que *O* ha medido el sistema *S*. Para un tiempo t_1 el valor de *M* sería $1/2$, es decir, desde el punto de vista de *P* hay $1/2$ de probabilidades de que *O* haya hecho la medición sobre *S*.

Conociendo la existencia de este operador *M* podemos afirmar que el hecho de que la variable puntero de *O* contenga información sobre el sistema *S* (en concreto, de su variable q)

se codifica en la existencia de una correlación entre la variable *q* del sistema *S* y la variable puntero del observador *O*, siendo esta correlación una propiedad interna del sistema *S*-*O*.

Reconstrucción de la Mecánica Cuántica

Asumiendo que el mundo se puede descomponer en numerosos sistemas que se pueden considerar tanto sistemas como observadores, un sistema puede tener información sobre otro y la forma de comunicar dicha información es a través de interacciones físicas. La *información* será por tanto una cantidad discreta, es decir, existe una cantidad mínima de información intercambiable. Al comportarse como una cantidad discreta, podemos entender cualquier proceso de adquisición de información como un conjunto de procesos independientes de adquisición de estas unidades elementales de información, o 'bits'. Se llamará a cada uno de estos procesos $Q_1, Q_2, \ldots$ Cualquier sistema que se comporte como un observable se puede caracterizar por el conjunto de posibles procesos de adquisición de información al que se le puede someter, donde cada uno corresponde a una variable física, ya sea clásica o cuántica, del sistema. Este conjunto de procesos se denotará como $W(S) = \{Q_i, i \in I\}$ donde el índice *i* pertenece al conjunto de variables físicas *I* características del sistema *S*. Las propiedades cinemáticas del sistema *S* se podrán expresar como relaciones entre los procesos Q_i pertenecientes a $W(S)$. Los resultados de estos procesos de adquisición de información sobre el sistema se puede representar como una cadena de valores binarios, entre 0 y 1

$$(e_1, e_2, e_3, \ldots) \tag{2.31}$$

codificando la información que un observador *O* puede obtener del sistema *S* de manera binaria.

Estos procesos de adquisición de información se tratan de mediciones sobre un sistema cuántico, es decir, una proyección sobre un subconjunto lineal del espacio de Hilbert de dicho sistema. Por analogía, $W(S)$ corresponde al conjunto de observables del sistema, de acuerdo con la definición algebraica de sistema como familia de observables.

La reconstrucción relacional de la Mecánica Cuántica se basará en dos postulados:

Postulado 1. Existe una cantidad máxima de información relevante que se puede extraer de un sistema, por lo que es posible dar una descripción completa de dicho sistema.

Es decir, cualquier predicción que se puede hacer sobre un sistema más allá de un conjunto de observables 2.31, se puede inferir de un subconjunto finito

$$s = [e_1, \ldots, e_N] \tag{2.32}$$

de 2.31, donde *N* es el número de características del sistema *S*. Considerando que el sistema *S* se encuentra sobre un espacio de Hilbert finito, podemos entender *N* como la capacidad máxima de información del sistema, o formalmente, como el número entero más pequeño que cumpla $N \geq log_2 k$ donde *k* es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema *S*.

Postulado 2. Siempre es posible adquirir nueva información sobre un sistema.

Dado que la cantidad de información que *O* puede extraer de *S* es limitada por el primer postulado, cuando se obtiene nueva información sobre el sistema, parte de la antigua se debe de perder, sin exceder el número total de características *N*. A partir de estos dos postulados se puede reformular el formalismo de la Mecánica Cuántica.

Aplicando el primer postulado, si existe una máxima cantidad de información que puede ser extraída de un sistema, podemos seleccionar dentro del conjunto $W(S)$ un subconjunto llamado c tal que $c = Q_i, i, N$, independientes entre ellos. La forma genérica del conjunto de respuestas obtenidas de las mediciones codificadas en *c* se puede expresar como

$$s_c = [e_1, \dots, e_N]_c \tag{2.33}$$

donde pueden existir $2^N = K$ configuraciones posibles. Por tanto para distintas mediciones se pueden codificar los resultados como :

$$\begin{aligned} s_c^1 &= [0, \dots, 0]_c \\ s_c^2 &= [0, \dots, 1]_c \\ &\dots \\ s_c^K &= [1, \dots, 1]_c \end{aligned}$$

Cada una de estas respuestas provienen de una 'pregunta' o procesos de adquisición de información al que se puede llamar Q_c^i. Al considerar todas las posibles uniones del conjunto de mediciones Q_c^i se construye un álgebra booleana con un número Q_c^i de átomos o, llamándolo de una forma más conocida, una familia de subconjuntos lineales de un espacio de Hilbert.

El segundo postulado implica que siempre pueden existir mediciones indeterminadas para un mismo sistema. Por tanto, se podrá definir la probabilidad de obtener en una medición de *Q* un cantidad de información s_c^i como $p(Q, Q_c^{(i)})$. Dadas dos familias de información s_c y s_b podemos definir una probabilidad como

$$p^{ij} = p(Q_b^{(i)}, Q_c^{(j)}) \tag{2.34}$$

siendo p^{ij} una matriz de orden $2^N \times 2^N$ normalizada, es decir

$$0 \geq p^{ij} \geq 1 \tag{2.35}$$

Por tanto, si s_c^j pertenece a la información del sistema, podemos encontrar un valor de s_b^i tal que

$$\sum_i p^{ij} = \sum_j p^{ij} = 1 \tag{2.36}$$

donde asumimos que $p(Q_b^{(i)}, Q_c^{(j)}) = p(Q_c^{(j)}, Q_b^{(i)})$. La condición para satisfacer estas restricciones se traduce en

$$p^{ij} = \left|U^{ij}\right|^2 \tag{2.37}$$

donde U es una matriz unitaria. Esta definición lleva a un tercer postulado

Postulado 3. Si c y b definen dos conjuntos completos de información, la matriz unitaria U_{cb} se puede elegir como

$$p(Q_b^{(i)}, Q_c^{(j)}) = \left|U_{cb}^{ij}\right|^2 \tag{2.38}$$

de tal forma que, para todo *c*, *b* y *d* se cumple que $U_{cd} = U_{cb}U_{bd}$ cuya probabilidad sigue la fórmula

$$p^{b(cd)b} = \left|U^{cb}U^{bc} + U^{db}U^{bd}\right|^2 \tag{2.39}$$

Por tanto, se puede expresar cualquier Q en un espacio complejo de Hilbert, fijando una base $|Q_c^{(i)}\rangle$ en dicho espacio, y expresando cualquier otra medición $|Q_b^{(j)}\rangle$ como combinación lineal de la base elegida

$$|Q_b^{(j)}\rangle = \sum_i U_{bc}^{ij} |Q_c^{(i)}\rangle \tag{2.40}$$

Las matrices U_{bc}^{ij} actúan como cambios de base unitarios de $|Q_c^{(i)}\rangle$ a la base $|Q_b^{(j)}\rangle$.

Sabiendo que el conjunto $W(S)$ se puede expresar como un conjunto de subespacios lineales de un espacio de Hilbert y asumiendo simetría temporal, el conjunto de mediciones en t_2 debe de ser isomórfico al conjunto de mediciones en t_1. Por tanto, la estructura de subespacios no se debe de alterar al evolucionar con el tiempo, por lo que debe de existir una transformación unitaria $U(t_2 - t_1)$ tal que

$$Q(t_2) = U(t_2 - t_1)Q(t_1)U^{-1}(t_2 - t_1) \tag{2.41}$$

donde $U(t_2 - t_1)$ tiene la forma $U(t_2 - t_1) = exp\{-i(t_2 - t_1)H\}$, siendo H el operador Hamiltoniano.

Solución a los problemas de la ecuación de onda ψ

Como se ha formulado, la Mecánica Cuántica Relacional plantea una Teoría Cuántica completa sin considerar en ningún momento el concepto de función de onda ψ planteada por Schrödinger [14, 15]. Al eliminar este concepto, también se eliminan los diferentes problemas ontológicos que generaba su existencia. Recuperando los problemas ya mencionados en la sección 2, las soluciones que propone esta nueva interpretación se pueden resumir como:

- El estado cuántico de dos partículas se puede expresar como la superposición de mediciones sobre características comunes entre las dos, pudiendo aplicar cambios de base para conocer la información que comparten las dos partículas.

- Al no suponer ningún comportamiento previo del sistema físico, la discretización de la energía puede ser elegida como una característica medible del sistema con cohesión dentro de la teoría.

- El problema de la medida desaparece ya que la medición, a pesar de realizarse de manera instantánea, es completamente probabilística, modificándose dicha probabilidad al evolucionar con el tiempo y al realizar mediciones sobre el sistema.

Esta nueva reformulación ha sido muy útil en el desarrollo de la Teoría Cuántica de la Información, sobre todo en el desarrollo de los formalismos para el cambio de sistemas de referencia en experimentos cuánticos, como se ha podido comprobar con el experimento del amigo de Wigner. Habiendo establecido este marco desde el punto de vista cuántico, el procedimiento para cuantizar un sistema relativista debe de poder traducir los sistemas clásicos a esta nueva perspectiva. Ya que el procedimiento de cuantización suele transformar los sistemas clásicos a cuánticos y no al revés, una vez teniendo claro la traducción cuántica que debemos a la que debemos llegar, es necesario formular las herramientas necesarias desde la Relatividad General, para definir correctamente el proceso de cuantización.

Capítulo 3
Teoria Gauge y Observables Canónicos

La Relatividad General es una teoría que reformuló nuestra comprensión de la gravedad. En lugar de describirla como una fuerza que actúa a distancia, como hacía Newton, Einstein propuso que lo que entendemos como gravedad es el resultado de la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de masa y energía. Esta idea se representa matemáticamente a través del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que determina cómo medimos distancias y tiempos entre eventos [16].

Sin embargo, además de esta formulación geométrica, la Relatividad General puede entenderse también como una teoría gauge. En física, una teoría gauge es aquella que posee simetrías locales: las leyes físicas permanecen invariantes aunque cambiemos ciertas cantidades de forma *local* en el espacio-tiempo. En el caso del electromagnetismo, esto se traduce en que el potencial puede cambiar sin que el campo físico (eléctrico o magnético) lo haga. En Relatividad General, la simetría gauge está dada por las difeomorfismos: transformaciones suaves de las coordenadas que no cambian las observables físicas [17].

Más aún, si se reformula la teoría en un marco más cercano al de las teorías de Yang–Mills, como ocurre en el formalismo de tetrads, puede describirse la gravedad como una teoría gauge del grupo de Lorentz local SO(3,1) [18]. Esta formulación es particularmente útil cuando se intenta cuantizar la gravedad, ya que permite emplear técnicas similares a las utilizadas en física de partículas.

Este enfoque gauge de la Relatividad General es también fundamental para teorías como la Gravedad Cuántica de Bucles, donde el espacio-tiempo se reconstruye a partir de variables de conexión y estructuras discretas como los bucles de Wilson o las redes de espines [19].

Observables Canónicos. Restricciones Primarias y Secundarias

Cualquier variable física que consideremos un *observable* debe de comportarse invariante al *gauge* empleado. Una teoría gauge es aquella en la que las variables dinámicas de un sistema se entienden respecto a un sistema de referencia arbitrario en el tiempo. Es decir, un observable físico es aquel que es independiente del sistema de referencia elegido. Debido a la elección arbitraria en el tiempo del sistema de referencia, las soluciones de las ecuaciones del movimiento del sistema en una teoría gauge contendrá funciones arbitrarias del tiempo. Estas funciones arbitrarias del tiempo establecen relaciones entre los observables del sistema, conocidos formalmente como *variables canónicas*. Estas relaciones entre observables se denominan 'constraints' o restricciones del sistema. Por tanto, podemos definir un sistema gauge [20] como un sistema cuyo Hamiltoniano se encuentra restringido.

Para estudiar la dinámica de un sistema gauge [21], se debe de partir del principio de acción Lagrangiano del sistema

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})dt \tag{3.1}$$

Esta acción tiene la característica fundamental de ser estacionaria para una variación $\delta q^n(t)$ de una variable del Lagrangiano $q^n (n = 1, \ldots, N)$ la cual se anula en los puntos t_1 y t_2. Las condiciones esenciales para que dicha acción sea estacionaria serán las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0, \qquad n = 1, \ldots, N \tag{3.2}$$

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n} \tag{3.3}$$

La forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange definirán si existen grados de libertad tras fijar el gauge del sistema. Para que un sistema tenga grados de libertad con respecto al gauge, la condición fundamental viene dada por la ecuación 3.3 si el término $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ es 0, ya que en este caso, la ecuación del movimiento podrá depender del tiempo.

Una vez definida la condición fundamental del Lagrangiano para un sistema gauge, podemos ver como se comporta un sistema de este tipo en el formalismo Hamiltoniano. La primera definición necesaria de un Hamiltoniano en una teoría gauge es definir el *momento canónico* del sistema como

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \tag{3.4}$$

Al definir así el momento no se comporta como una cantidad independiente, sino que genera relaciones con la variable canónica de la posición del tipo

$$\phi_m(q, p) = 0, \qquad m = 1, \ldots, M \tag{3.5}$$

donde ϕ es una función cualquiera dependiente de las variables *q* y *p*. Este tipo de relaciones se conocen *restricciones primarias* ya que surgen sin tener en cuenta las ecuaciones del movimiento y no restringen los valores que pueden adquirir las posiciones q^n o las velocidades $\dot{q}^n$.

La condición 3.5 define una región (un *submanifold*) dentro del espacio de fases conocido como *superficie de la primera restricción* cuya dimensión será $2N - M'$, dependiendo del rango de la matriz $\partial^2 L/\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}$ donde se encontrarán todas las funciones que cumplan la restricción primaria.A partir de esta definición del momento canónico podemos definir el Hamiltoniano canónico *H* como

$$H = \dot{q}^n p_n - L \tag{3.6}$$

donde *H* es función de las posiciones y las velocidades, sin embargo, la relación con las velocidades $\dot{q}^n$ se encuentran dentro de la definición del momento $p(q,\dot{q})$. Al evaluar un cambio δH inducido por una variación arbitraria en las posiciones o velocidades tenemos que

$$\delta H = \dot{q}^n \delta p_n + \delta \dot{q}^n p_n - \delta \dot{q}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} - \delta q^n \frac{\partial L}{\partial q^n} = \dot{q}^n \delta p_n - \delta q^n \frac{\partial L}{\partial q^n} \tag{3.7}$$

donde se puede intuir que el Hamiltoniano no solo se define a partir de funciones de *p* y *q* sino que, para preservar la primera restricción $\phi_m \approx 0$ (donde el símbolo $\approx$ se refiere a una igualdad debil, una igualdad que solamente se cumple en la superficie de la primera restricción), las variaciones δp_n se expresan como funciones de *q* y $\dot{q}$. Al obligar a cumplir dicha condición se obliga al Hamiltoniano canónico a estar solo bien definido sobre el submanifold generado por la primera restricción. La ecuación 3.5 se podrá reescribir como

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n} \right) \delta q^n + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n \right) \delta p_n = 0 \tag{3.8}$$

A partir de esta igualdad, podemos escribir la *velocidad canónica* $\dot{q}^n$ en función de la primera restricción como

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p^n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \tag{3.9}$$

Esta expresión nos permite escribir las velocidades $\dot{q}^n$ en función de los momentos p_n y una serie de parámetros externos u^m que se refieren a la transformación de las coordenadas del espacio de *p* al espacio de velocidades $\dot{q}$. Por tanto, si definimos las transformadas de Legendre de un espacio $(q,\dot{q})$ a una superficie $\phi_m(q,p) = 0$ como

$$\begin{cases} q^n = q^n, \\ p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}(q,\dot{q}), \\ u^m = u^m(q,\dot{q}), \end{cases} \tag{3.10}$$

y su transformación inversa entre espacios de la misma dimensión se definirá

$$\begin{cases} q^n = q^n, \\ \dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \\ \phi_m(q,p) = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

A partir de la expresión de las velocidades canónicas 3.9 podemos escribir el Lagrangiano original en función del Hamiltoniano

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \tag{3.12}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^{m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}} \tag{3.13}$$

$$\phi_m(q, p) = 0 \tag{3.14}$$

Estas ecuaciones de Hamilton también se pueden derivar del principio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H - u^m \phi_m) = 0 \tag{3.15}$$

para variaciones arbitrarias δq^n,δp_n, δu_m. Las nuevas variables u^m se conocen como multiplicadores de Lagrange, forzando que se cumpla la restricción 3.5.

Las ecuaciones del movimiento que se derivan del principio variacional se pueden escribir como

$$\dot{F} = [F, H] + u^m [F, \phi_m] \tag{3.16}$$

donde $F(q, p)$ es una función arbitraria de las variables canónicas y los corchetes de Poisson tienen la forma habitual

$$[F, G] = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{3.17}$$

Restricciones de Primera y Segunda Clase

Al aplicar el formalismo Hamiltoniano se pueden clasificar las restricciones o, siendo más precisos, las funciones definidas en el espacio de fases en restricciones de primera clase o de segunda clase [22].

Una función $F(q, p)$ de *primera clase* es aquella en la que el corchete de Poisson con todas las restricciones del Hamiltoniano se vuelve 0 en la superficie restringida

$$[F, \phi_j] \approx 0, \qquad j = 1, \ldots, J \tag{3.18}$$

siendo el corchete de Poisson de la forma

$$[F, G] = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{3.19}$$

Un función *F* será de *segunda clase* si existe al menos una restricción cuyos corchetes de

Poisson no desaparezcan en la superficie restringida, es decir,

$$[F, \phi_k] \not\approx 0, \qquad k = 1, \ldots, K \tag{3.20}$$

A partir de la definición de las funciones de primera clase, podemos definir el *Hamiltoniano total* como la suma del Hamiltoniano de primera clase $H^{'}$ y las restricciones de primera clase primarias multiplicadas por un coeficiente arbitrario

$$H_T = H^{'} + v^a \phi_a \tag{3.21}$$

$$H^{'} = H + U^m \phi_m \tag{3.22}$$

$$\phi_a = V_a^m \phi_m \tag{3.23}$$

donde U^m y V^m vienen de las restricciones impuestas sobre los multiplicadores de Lagrange u^m como soluciones de

$$\begin{aligned} [\phi_j, H] + u^m [\phi_j, \phi_m] \approx 0 \\ V^m [\phi_j, \phi_m] \approx 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Esta definición del Hamiltoniano total y la aparición de funciones arbitrarias v^a nos indica que pueden existir más de un conjunto de variables canónicas que puedan definir un estado físico. Un conjunto de variables canónicas en un tiempo t_1 definen completamente un estado físico en ese momento, por lo que sus ecuaciones del movimiento deberían de determinar completamente el estado físico del sistema en otros tiempos. Sin embargo, dado que los coeficiente v^a son funciones arbitrarias del tiempo, el valor de los observables canónicos en un tiempo t_2 dependerá de la elección de estas funciones en el intervalo $t_1 \leq t_2$.

Para un tiempo $t_2 = t_1 + \delta t$, la diferencia entre las variables dinámicas del sistema tras elegir dos valores arbitrarios distintos v^a,$\tilde{v}^a$ durante un tiempo t_1 toma la forma

$$\delta F = \delta v^a [F, \phi_a] \tag{3.25}$$

siendo $\delta v^a = (v^a - \tilde{v}^a)\delta t$. Esta variación se conoce como *transformación gauge*. Podemos decir entonces que *toda restricción de primera clase generará transformaciones gauge*.

A partir de la aplicación del principio variacional en 3.15 podemos definir la acción Einstein-Hilbert de la forma

$$S_T = \int (p_n \dot{q}^n - H' - u^m \psi_m)\, dt \tag{3.26}$$

donde el término $u^m \psi_m$ puede incluir tanto las restricciones primarias o todas las posibles restricciones del sistema.

Gauge Canónico

La presencia de restricciones de primer nivel permite la existencia de más de un conjunto de observables canónicos que corresponden a un mismo estado físico. Habitualmente, se suele eliminar estos conjuntos extra imponiendo más restricciones sobre las variables canónicas para conseguir una correspodencia uno a uno entre conjuntos de variables canónicas y estados físicos. Para un conjunto de variables canónicas

$$C_b(q, p) \approx 0 \tag{3.27}$$

existen dos *condiciones gauge* que siempre se deben cumplir:

- El gauge escogido debe de ser *accesible*. Es decir, dado un conjunto de variables canónicas debe de existir una transformación que sea capaz de transformar un conjunto de variables q y p a otro conjunto que satisfaga la condición 3.27. Esta transformación se obtiene a partir de transformaciones infinitesimales de la forma $\delta u^a[F, \gamma_a]$, siendo γ_a la restricción primaria aplicada al sistema.

Esta condición garantiza que 3.27 no afecta a las propiedades físicas invariantes gauge que contienen la información física del sistema., tan solo restringe los grados de libertad del gauge.

- La condición 3.27 debe de fijar completamente el gauge. Es decir, no debe de existir ningún otra transformación gauge más que la identidad que cumpla 3.27. Dicho de otra forma, la ecuación
$$\delta u^a[C_b, \gamma_a] \approx 0 \tag{3.28}$$
implica que
$$\delta u^a = 0 \tag{3.29}$$

Estas dos condiciones definen que, para fijar completamente el gauge, el número de *condiciones gauge* debe de ser igual al número de restricciones de primera clase independientes entre ellas.

Tras fijar completamente el gauge, las restricciones de primera clase desaparecen, dejando solamente las restricciones de segunda clase. Así, conseguimos una teoría libre de restricciones en el sentido de que las restricciones que aparezcan se consideran relaciones entre variables dinámicas del sistema (en Mecánica Cuántica, un ejemplo son los operadores, como la ecuación de Schrödinger).

Capítulo 4
Formalismos Hamiltonianos

Formalismo ADM (3+1)

El formalismo ADM reformula la relatividad general en términos hamiltonianos sobre una '*foliación*' 3+1 del espacio-tiempo, lo que es fundamental para enfoques de cuantización. En este esquema se supone que el espacio-tiempo se descompone en una familia de hypersuperficies espaciales Σ_t de tiempo constante t, coordinadas por (x^i). Las variables dinámicas canónicas son la métrica espacial $g_{ij}(t, x^k)$ en cada hipersuperficie y su momento conjugado $\pi^{ij}(t, x^k)$. Este formalismo, originado por Arnowitt, Deser y Misner en los años 60, es clave tanto en la rama de la Relatividad Numérica como en Gravedad Cuántica [23].

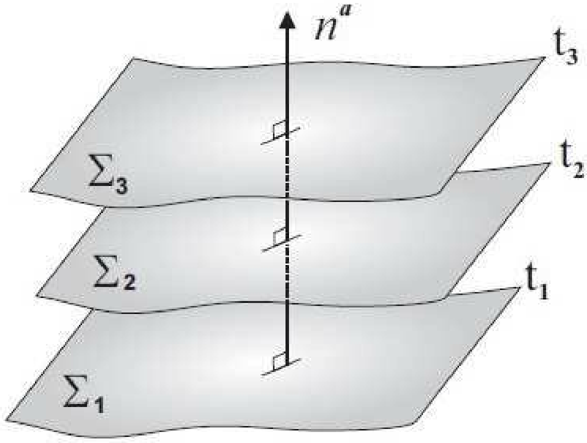

Figura 4.1: Esquema de foliación del espacio tiempo.

Paralelo al trabajo de Einstein, Hilbert postulo el principio variacional para la teoría de la gravedad expresando la acción como

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}R \tag{4.1}$$

donde la densidad Lagrangiana es dada por $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$, donde *g* es el determinante del tensor métrico y *R* es la curvatura escalar. En esta expresión, la acción *S* depende explícitamente del tensor métrico $S = S[g_{\mu\nu}]$, es decir, la acción debe cambiar en función de las componentes del tensor $g_{\mu\nu}$ para poder obtener las ecuaciones del movimiento. Al hacer dicha variación e igualando a cero se llega a las ecuaciones de Einstein para el movimiento en el vacío

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 0 \tag{4.2}$$

A partir de esta definición de la acción, para construir una teoría Hamiltoniana es necesario formular el momento canónico conjugado del tensor métrico tomando las derivadas parciales de la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ con respecto a las velocidades. Para ello, es necesario priorizar una de las variables, en este caso el tiempo, para poder definir dichas velocidades. Al priorizar el tiempo se divide el espacio-tiempo en $x_0 = c$ franjas, donde una de estas franjas conforma una hipersuperficie tridimensional con una métrica positiva bien definida en ella. Si consideramos por tanto el espacio-tiempo como una colección de estas franjas etiquetadas por un número *t*, podemos entender la evolución de un sistema como el paso de una hipersuperficie a otra cambiando el parámetro *t*. Al dotar cada hipersuperficie con una métrica tridimensional γ_{ij} determinada por las divisiones en el espacio-tiempo, es posible considerar dicha métrica una variable en función del parámetro *t* de cada hipersuperficie, es decir, $\gamma_{ij}(t)$ mientras evoluciona en función de *t* como otra variable dinámica más del sistema.

Para reconstruir totalmente el comportamiento de $g_{\mu\nu}$, a partir de las 6 componentes que forman γ_{ij} en un espacio tridimensional se necesitan otras 4 componentes para obtener el mismo número que tendría $g_{\mu\nu}$ en un espacio cuadrimensional. Estas nuevas variables serán la función *Lapso* de un intervalo entre hipersuperficies, denominada α; y una serie de funciones *Desplazamiento espacial* N^i que hacen referencia al desplazamiento de un mismo punto al cambiar entre hipersuperficies sucesivas.

Podemos construir la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}$ a partir de la nueva definición de la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$, definiendo el momento canónico conjugado de γ_{ij} como

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \tag{4.3}$$

y realizando la transformada de Legendre para todas las variables dinámicas y sus momentos

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L} \tag{4.4}$$

donde esta densidad Hamiltoniana toma la forma

$$\mathcal{H} = \alpha\mathcal{H}_0 + \beta^i\mathcal{H}_i \tag{4.5}$$

A partir de este formalismo las restricciones impuestas en Relatividad General como las variables que intervienen toman una nueva forma. Tenemos cuatro restricciones consecuencia directa de la forma de la densidad Lagrangiana, es decir, los momentos conjugados de las cuatro variables, α y β^i. Los momentos conjugados se definen como

$$P^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}_{\mu}} \tag{4.6}$$

Esta descomposición separa la geometría del espacio-tiempo en una evolución temporal de hipersuperficies espaciales tridimensionales, lo que permite expresar la relatividad general como una teoría de evolución dinámica en el tiempo, con una métrica espacial y su momento conjugado como variables fundamentales.

Sin embargo, el formalismo ADM presenta ciertas limitaciones al intentar cuantizar la gravedad (como se verá más adelante con la cuantización propuesta por DeWitt), en particular por la forma tan complicada que presentan las restricciones sobre el Hamiltoniano. Para abordar estos desafíos, se recurre al formalismo de Palatini, en el cual la métrica y la conexión se reformulan en base a los *tetrads* como variables independientes.

Es precisamente en este contexto que surgen las variables de Ashtekar, una reformulación del formalismo canónico de la gravedad basada en una conexión (compleja o real, dependiendo de la versión) sobre el grupo $SU(2)$. Estas variables provienen de una versión modificada del formalismo de Palatini, permitiendo una descripción más sencilla de las restricciones.

Así, el puente entre los formalismo ADM y el desarrollado por Ashtekar parte de la reformulación canónica de la relatividad general: partimos de la descomposición 3+1 para obtener una descripción hamiltoniana (ADM), la generalizamos con el formalismo de Palatini, y finalmente se introducen las variables de Ashtekar que reexpresan la dinámica gravitacional como una teoría gauge más manejable para la cuantización.

Formalismo de Palatini

Los *tetrads* (o *triads* dependiendo de las dimensiones), son una herramienta matemática que permite geometrías alternativas pero equivalentes a las métricas [24]. Consideremos *M*, un manifold difeomorfo de *n* dimensiones orientads con respecto a $\mathbb{R}^n$. Físicamente, podemos considerar *M* como un pequeño conjunto del eespacio-tiempo, por lo que se podría definir un manifold tangente a $\mathbb{R}^n$, nombrado como *TM*. *TM* se puede trivializar, es decir, descomponer en el producto directo de *M* y $\mathbb{R}^n$ de tal forma que

$$\begin{aligned} e:\ & M \times \mathbb{R}^n \to TM \\ & \{p\} \times \mathbb{R}^n \rightarrowtail T_pM \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$e^{-1}:\ TM \to M \times \mathbb{R}^n \tag{4.8}$$

A esta trivialización se le conoce como *campo de marco* ya que, para cada punto $p \in M$

transforma la base de $\mathbb{R}^n$ (en el caso de la Relatividad General, el espacio de Minkowski), a una base de vectores tangentes a *p*, también llamado *marco*. Si *M* fuese un manifold tridimensional, entonces al campo de marco de *M* se le conoce como *triad*; si *M* es cuatrimensional, entonces el campo de marco de *M* sería un *tetrad*.

Consideremos un espacio Lorentziano n-dimensional. En este espacio, una sección $M \times \mathbb{R}^n$ se entiende como una función evaluada en $\mathbb{R}^n$ sobre *M*, por lo que, para cualquier punto $p \in M$, existe una base de secciones $\xi_0, \ldots, \xi_n$:

$$\begin{aligned} &\xi_0(p) = (1, 0, \ldots) \\ &\xi_1(p) = (0, 1, \ldots) \\ &. \\ &. \\ &\xi_n(p) = (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Podemos etiquetar cada una de estas secciones como *s* definiéndose $s = s^I \xi_I$. De esta manera, $\mathbb{R}^n$ se conoce como *espacio interno* (los índices escritos en letras latinas mayúsculas *I*,*J*,. . . se utilizan para definir índices internos asociados a cada sección ξ_I y no ser confundidos con los índices espacio temporales asociados a ∂_μ). Aplicando el mapa *e* a las secciones ξ_I obtenemos una base de campo vectoriales $e(\xi_I)$ sobre *M*

$$e(\xi_I) = e_I^a \partial_a \tag{4.10}$$

donde las componentes e_I^a son funciones de *M*.

Dadas dos secciones *s* y s' de $M \times \mathbb{R}^n$, se puede definir el producto interno canónico $\eta(s, s')$ como

$$\eta(s, s') = \eta_{IJ} s^I s'^J \tag{4.11}$$

siendo η_{IJ} una copia de la métrica de Minkoswki

$$\eta_{IJ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

denominada *métrica interna*.

La función e_a^I se denomina co-campo de marco, por tanto, si *M* es un manifold tridmensional, un co-campo de marco sobre *M* será un *co-triad*; y si *M* es un manifold cuatrimensional, se le llamará *co-tetrad*. A partir de estas definiciones se puede definir una métrica *g* en *M* en términos de los co-campos de marco e_a^I como

$$g_{ab} = (\partial_a, \partial_b) = \eta_{IJ} e_a^I e_b^J \tag{4.13}$$

se puede definir de la misma forma

$$\eta^{IJ} e_I^a e_J^b = g^{ab} \tag{4.14}$$

es decir, la forma inversa de la métrica anterior.

Estas expresiones de la métrica indican que los tetrads e_I^a y e_J^b contienen toda la información para construirla, en otras palabras, los tetrads se pueden considerar como la descripción fundamental de la geometría del manifold *M*, siendo la métrica un concepto derivado de éstos.

Conexiones a través de tetrads

Otros de los elementos fundamentales del formalismo de Palatini es la *conexión* entre $M \times \mathbb{R}^n$. Haciendo un símil a la definición de la derivada covariante en Relatividad Genera, podemos definir la derivación covariante $\mathcal{D}$ de un campo vectorial v^I en $M \times \mathcal{R}^n$ como

$$\mathcal{D}_a v^I = \nabla_a v^I + \omega_{aJ}^I v^J \tag{4.15}$$

donde la conexión ω_{aJ}^I es el análogo de la conexión afín Γ_{ac}^b. Aplicando la métrica de Minkowski a la definición de la derivación covariante obtenemos

$$\mathcal{D}_a \eta_{IJ} = -\omega_{aIJ} - \omega_{aJI} \tag{4.16}$$

obligando a que la derivación covariante se anule $\mathcal{D}_a = 0$, se obtiene la relación

$$\omega_{aIJ} = -\omega_{aJI} \tag{4.17}$$

es decir, la conexión ω, para mantener invariante la métrica de Minkowski debe de ser antisimétrica en los índices internos. Si se cumple esta propiedad, se dice que la conexión $\mathcal{D}$ en $M \times \mathbb{R}^n$ es una *conexión de Lorentz*; es decir, el transporte en paralelo alrededor de una curva es una transformación que mantiene el espacio de Minkowski invariante. La conexión ω al aplicarse sobre un campo vectorial v^a implica un transporte paralelo infinitesimal $v^a \omega_{aI}^K$ en la dirección de v^a. Esta acción también se puede redefinir de tal manera que la conexión ω, con las propiedades de simetría necesarias, $v^a \omega_{aI}^K \in SO(3,1)$, actúa en el álgebra del grupo de Lorentz $SO(3,1)$.

La derivación covariante $\mathcal{D}_a$ mantiene tanto la métrica interna η_{IJ} como la métrica espaciotemporal g_{ab}. Sin embargo, para expresar estas propiedades en función de tetrads y triads, hace falta imponer una condición adicional sobe los co-tetrads para ser covariantes y constantes

$$\omega_{aJ}^{I} = e^{bI}\gamma_a e_{bJ} \tag{4.18}$$

A partir de esta definición la derivación covariante de un tetrad es de la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a e_b^I &= \nabla_a e_b^I + \omega_a^I{}_J e_b^J \\ &= \nabla_a e_b^I + e^{cI}\nabla_a(e_{cJ})e_b^J \\ &= \nabla_a e_b^I - e^{cI}e_{cJ}\nabla_a e_b^J \\ &= \nabla_a e_b^I - \nabla_a e_b^I = 0\end{aligned} \tag{4.19}$$

Por tanto, la derivación covariante $\mathcal{D}$ definido por la conexión (7.12) preserva tanto los tetrads como la métrica espaciotemporal.

Formalismo de Ashtekar

Al igual que en el formalismo ADM se empleaba el tensor métrico γ_{ij}, en el formalismo de triadas se introduce el campo tensorial espacial

$$\varepsilon_I^a = e_I^a + n^a n_I \tag{4.20}$$

siendo n^a el vector normal a las franjas del espacio, n_I se define como $n_I := e_I^a n_a$ donde e_I^a es un *tetrad*. Si este campo cumple $\varepsilon_I^a n_a = \varepsilon_I^a n^I = 0$ se denomina *triad espacial*. En esta formulación $n^a = n^I e_I^a = e_0^a$ codificando dentro de ésta la variación temporal y separándola de las espaciales, fijadas en n^I. Al referirse solamente a la parte espacial se emplearan letras minúsculas ε_i^a en la triada.

La definición del vector normal n^a se puede modificar para expresarla en base a la función *Lapso* N y las funciones *Desplazamiento espacial* N^a del formalismo ADM

$$n^a = N^{-1}(t^a - N^a) \tag{4.21}$$

por lo que la triad e_I^a en términos de la triad espacial ε_I^a y los vectores normales se puede escribir como

$$e_I^a = \varepsilon_I^a - N^{-1}(t^a - N^a)n_I \tag{4.22}$$

Variables de conexión Ashtekar-Barbero

A partir de las definiciones anteriores podemos obtener las nuevas variables canónicas. Definimos el tensor puramente espacial como

$$P_i^a := \frac{\sqrt{det\gamma}}{8\pi\beta G}\varepsilon_i^a \tag{4.23}$$

Por lo que podemos escribir la variable canónica conjugada de E_j^b como

$$A_a^i := \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{kl}\omega_a^{kl} + \beta\omega_a^{0i} \tag{4.24}$$

Redefiniendo la derivación covariante $\mathcal{D}_a$ en función de estas componentes

$$D_a v^i = \nabla_a v^i + \gamma_a^b \omega_b^i{}_j v^j = \nabla_a v^i - \epsilon^i{}_{jk}\Gamma_a^j v^k \tag{4.25}$$

donde

$$\Gamma_a^i := \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{kl}\omega_a^{kl} \tag{4.26}$$

conocida como *conexión spin*.

Se puede escribir el término ω_a^{0i} como $K_a^i := \omega_a^{0i}$. Por tanto, la variable canónica conjugada tendrá la forma

$$A_a^i := \Gamma_a^i + \beta K_a^i \tag{4.27}$$

Esta variable se denomina *conexión de Ashtekar-Barbero*. Esta variable es una conexión $so(3)$ ya que añadir una cantidad que actúa como un vector a una conexión da otra conexión.

Se puede escribir la curvatura de dicha conexión como

$$\mathcal{F}_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon^i{}_{kl}A_a^k A_b^l \tag{4.28}$$

Las nuevas variables canónicas de la Relatividad General serán (A_a^i, E_j^b) y preservan los corchetes de Poisson con la forma

$$\{E_j^a(x), A_b^i(y)\} = 8\pi G\delta_b^a\delta_j^i\delta(x,y) \tag{4.29}$$

$$\{E_j^a(x), E_i^b(y)\} = \{A_a^j(x), A_b^i(y)\} = 0 \tag{4.30}$$

Capítulo 5

Cuantizaciones en la teoría canónica de la gravedad

Tras la formulación de la teoría cuántica de campos por Heisenberg, Pauli, Fock, Dirac y Jordan en 1937, existió numerosos intentos de intentar aplicarla a otros campos de la física. Sin embargo, su aplicación a una teoría gravitacional presento numerosos problemas debido a las bases teóricas de la física de partículas. Durante muchos años la 'teoría cuántica de la gravedad' quedó incompleta. No fue hasta 1955 donde, distintos avances en la aplicación de las restricciones al campo gravitatorio, permitieron avanzar en el desarrollo de la teoría. Fue con Wheeler y DeWitt con quienes se formalizó por primera vez la 'teoría canónica de la gravedad' [25]. El formalismo de esta teoría servirá como ejemplo del gran problema que es la cuantización para la elaboración de una teoría completa para explicar la gravedad cuántica.

Por convención, se utilizarán 'unidades absolutas' $\hbar = c = 16\pi G = 1$, la convención de signos $-, +, +, +$ para la métrica espacio-temporal y las formas de los tensores de Riemann, de Ricci y el escalar de curvatura como

$$R^{\tau}{}_{\mu\nu\sigma} = \Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{,\nu\rho} \tag{5.1}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\nu} \tag{5.2}$$

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{5.3}$$

donde $\Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma,\mu} = \partial_\mu \Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma}$ y el símbolo de Christoffel Γ tiene la forma

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau}\left(g_{\mu\tau,\nu} + g_{\nu\tau,\mu} - g_{\mu\nu,\tau}\right), \qquad g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} \tag{5.4}$$

La teoría canónica descompone el tensor métrico como

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k\beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & \alpha^{-2}\beta^j \\ \alpha^{-2}\beta^i & \gamma_{ij} - \alpha^{-2}\beta_i\beta_j \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

$$\gamma_{ik}\gamma^{kj} = \delta^j_i, \qquad \beta^i = \gamma^{ij}\beta_j \tag{5.7}$$

donde α es la función de intervalo temporal y β_j es la función de desplazamiento espacial. A partir de esta descomposición, se puede escribir la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = {}^{(4)}Rg^{1/2} = \alpha\gamma^{1/2}(b_{ij}b^{ij} - b^2 + {}^{(3)}R) - 2(\gamma^{1/2}b)_{,0} + 2(\gamma^{1/2}b\beta^i - \gamma^{1/2}\gamma^{ij}\alpha_{,j})_{.i} \tag{5.8}$$

donde

$$g = -det(g_{\mu\nu}) = \alpha^2\gamma, \qquad \gamma = det(\gamma^{ij}), \tag{5.9}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\alpha^{-1}(\beta_{i.j} + \beta_{j.i} - \gamma_{ij,0}), \qquad b^{ij} = \gamma^{ik}\gamma^{jl}b_{kl}, b = \gamma^{ij}b_{ij} \tag{5.10}$$

siendo $\beta_{i.j} = D_j\beta_i$ el diferencial covariante con respecto a la métrica espacial γ_{ij}. La cantidad b_{ij} se conoce como *segunda forma fundamental* y describe la curvatura de la hipersuperficie $x^0 = cte$, por lo que se suele llamar *tensor de curvatura intrínseca* en oposición al *tensor de curvatura extrínseca* R_{ij}. En un espacio tiempo plano, R_{ij} depende exclusivamente de b_{ij}, sin embargo, en un manifold de curvatura arbitraria no es necesario que exista una relación entre los dos tensores de curvatura. Las formas contracciones de estos dos tensores ${}^{(3)}R$ y $b_{ij}b^{ij} - b^2$ se denominarán curvaturas intrínseca y extrínseca respectivamente. Al eliminar los dos últimos términos de la expresión (6.8º) ya que no aportan información sobre la dinámica del sistema obtenemos un Lagrangiano

$$L = \int \alpha\gamma^{1/2}(b_{ij}b^{ij} - b^2 + {}^{(3)}R)d^3x \tag{5.11}$$

con la forma típica de 'energía cinética menos potencial', donde la curvatura extrínseca cumple con el rol de la energía cinética y el término negativo de la curvatura intrínseca como la energía potencial.

La conjugación del momento con los parámetros $\alpha, \beta_i, \gamma_{ij}$ se denominarán como π, π^i, π^{ij}. Las restricciones que se imponen por tanto al sistema tendrán la forma explícita

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta\alpha_{,0}} = 0, \tag{5.12}$$

$$\pi^i = \frac{\delta L}{\delta\beta_{i,0}} = 0, \tag{5.13}$$

$$\pi^{ij} = \frac{\delta L}{\delta\gamma_{ij,0}} = -\gamma^{1/2}(b^{ij} - \gamma^{ij}b) \tag{5.14}$$

siendo las dos primeras igualdades las *restricciones primarias*, las cuales expresan que el Lagrangiano es independiente de las 'velocidades' $\alpha_{,0}$ y $\beta_{,0}$ pudiendo eliminarlos del Hamiltoniano. Por tanto, el Hamiltoniano tendrá la forma

$$H = \int (\pi\alpha_{,0}) + \pi^i \beta_{i,0} + \pi^{ij}\gamma_{ij,0})d^3x - L \tag{5.15}$$

$$= \int (\pi\alpha_{,0} + \pi^i \beta_{i,0} + \alpha\mathcal{H} + \beta_i \chi^i)d^3x \tag{5.16}$$

donde

$$\mathcal{H} = \gamma^{1/2}(b_{ij}b^{ij} - b^2 + {}^{(3)}R) \tag{5.17}$$

$$\chi^i = -2\pi^{ij}_{.j} = -2\pi^{ij}_{,j} - \gamma^{il}(2\gamma_{jl,k} - \gamma_{jk,l})\pi^{jk} \tag{5.18}$$

Se pueden imponer sobre *H restricciones secundarias o dinámicas* las cuales limitan los grados de libertad y tomando la forma

$$\mathcal{H} = 0 \tag{5.19}$$

$$\chi^i = 0 \tag{5.20}$$

donde se define el *Hamiltoniano restringido*. Esta restricción se puede traducir de la siguiente manera: para un espacio-tiempo plano, las curvaturas extrínsecas e intrínsecas de cualquiera de sus hipersuperficies son iguales.

Al aplicar la teoría cuántica, los corchetes de Poisson promocionan a conmutadores. Esto implica que las restricciones, tanto primarias como secundarias, no pueden convertirse en operadores, ya que si así fuera, el Hamiltoniano se anularía para cualquier sistema y no se obtendría información alguna de su dinámica. En vez de promocionar a operadores, estas restricciones se convierten en condiciones sobre el autovector Ψ:

$$\pi\Psi = 0, \tag{5.21}$$

$$\pi^i\Psi = 0, \tag{5.22}$$

$$\mathcal{H}\Psi = 0, \tag{5.23}$$

$$\chi\Psi = 0 \tag{5.24}$$

A partir de estas 'restricciones cuánticas' es donde comienzan a surgir los problemas en la cuantización de la gravedad. Consideremos una ecuación con la forma

$$\gamma_{ij}(x^0, \mathbf{x}) = e^{iHx^0}\gamma_{ij}(0, \mathbf{x})e^{-iH^0}, \qquad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \tag{5.25}$$

definiendo así el operador γ_{ij} sobre una hipersuperficie arbitraria con respecto al operador en la hipersuperficie $x^0 = 0$.Supongamos que damos valores específicos a los parámetros α y β_i

$$\alpha = 1, \qquad \beta_i = 0, \tag{5.26}$$

por tanto, al aplicar la restricción $\mathcal{H}\Psi = 0$, se obtiene

$$H\Psi = 0, \qquad \Psi^\dagger H = 0 \tag{5.27}$$

A esta ecuación se le conoce como la *ecuación de Wheeler-DeWitt* y a partir de ella podemos

$$\Psi^\dagger \gamma_{ij}(x^0, \mathbf{x})\Psi = \Psi^\dagger \gamma_{ij}(0, \mathbf{x})\Psi \tag{5.28}$$

Este resultado nos lleva a un conclusión bastante negativa : dado que los resultados de cualquier observación cuántica vienen definidos por los autovalores al aplicar un operador, si la igualdad anterior se cumple para cualquier operador o producto de operadores, una Teoría Cuántica tan solo puede explicar una imagen estática de la Relatividad General.

Podemos reinterpretar esta ecuación entendiendola como que, en vez de considerar que el universo es estático, la ecuación 5.27 nos da la información de que las coordenadas del tipo x^μ son irrelevantes. El significado físico de un sistema surge al describir la dinámica intrínseca de éste, por ello se debe establecer un sistema de coordenadas intrínseco basado tanto en la geometría como en las estructuras que forman el universo. Al hacer esta suposición debemos de distinguir dos casos de estudio:

- Regiones infinitas asintóticamente planas : Un caso de sistema de coordenadas para este caso sería la métrica de Minkoswki, ya que aporta relevancia física a las coordenadas en el infinito asumiendo simetría basada en los grupos de Poincaré.

- Regiones finitas : En este caso las restricciones del sistema definen completamente la geometría de la mecánica del sistema.

Es este segundo tipo el que es de interés para la construcción de una mecánica cuántica relativista y el que lleva al problema del tiempo.
Para considerar las restricciones impuestas consistentes, los conmutadores de éstos no deben de producir nuevas restricciones. Las relaciones de conmutación entre los observables canónicos se expresan como

$$[\alpha, \pi'] = i\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \qquad \left[\beta_i, \pi^{j'}\right] = i\delta_i^{j'}, \qquad \left[\gamma_{ij}, \pi^{k',l'}\right] = i\delta_{ij}^{k'l'} \tag{5.29}$$

Las restricciones primarias conmutan entre ellas y con las secundarias, por lo que son consistentes. Al estudiar el caso de la restricción secundaria χ, definido como $\chi_i = \gamma_{ij}\chi^j$, se puede utilizar su propiedad de homogeneidad bilineal con las restricciones primarias γ_{ij} y π^{ij} para escribir su conmutador como

$$\left[\gamma_{ij}, i\int \chi_{k'}\delta\xi^k d^3x'\right] = -\gamma_{ij,k}\delta\chi^k - \gamma_{kj}\delta\chi^k_{,i} - \gamma_{ik}\delta\xi^k_{,j} \tag{5.30}$$

$$\left[\pi^{ij}, i\int \chi_{k'}\delta\xi^k d^3x'\right] = -(\pi^{ij}\delta\chi^k)_{,k} - \pi^{kj}\delta\chi^k_{,i} - \pi^{ik}\delta\xi^k_{,j} \tag{5.31}$$

El resultado de estos conmutadores demuestran que, bajo cambios infinitesimales en las coordenadas de la forma $\bar{x}^i = x^i + \delta\xi^i$, los cambios sobre funciones de γ_{ij} o π^{ij} surgen por conmutación con $i\int \chi_i\delta\xi^i d^3x$, es decir, no dependen explícitamente de x. Por tanto, podemos escribir los conmutadores de las restricciones dinámicas como

$$[\chi_i, \chi_{j'}] = -i\int \chi_{k''}c^{k''}{}_{ij'}d^3x'' \tag{5.32}$$

donde c tiene la forma

$$c^{k''}{}_{ij'} = \delta^{k''}{}_{i,l''}\delta^{l''}{}_{j'} - \delta^{k''}{}_{j',l''}\delta^{l''}{}_{i} \tag{5.33}$$

Estas definiciones llevan a la fórmula

$$[\chi_i, \mathcal{H}'] = i\mathcal{H}\delta_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \tag{5.34}$$

Al definir de esta manera los conmutadores de las restricciones secundarias no surgen nuevas restricciones y, por tanto, son consistentes.

Capítulo 6
El problema del tiempo y la solución covariante

Como se ha podido comprobar, la desaparición del Hamiltoniano y del tiempo al aplicar los observables canónicos a la mecánica cuántica hace imposible una descripción dinámica de ningún sistema. A este hecho se le llama 'problema del tiempo' y es una de la mayores dificultades a la hora de elaborar una teoría cuántica de la gravedad [11, 26]. Como ya se ha visto, uno de los principales puntos de este problema es la desaparición de la evolución temporal del Hamiltoniano, sin embargo, de este hecho surgen otros dos grandes problemas a la hora de aplicar una teoría cuántica a un marco relativista.

Para establecer una teoría cuántica es necesario definir un producto interno en el espacio de fases para poder obtener las amplitudes de probabilidad y poder normalizarlas. No obstante, al intentar resolver la ecuación de Wheeler-DeWitt 5.27 se debería de obtener una solución que defina un espacio $\{|\psi_\alpha[\gamma]\rangle\}$ de estados físicos posibles que dependen solo de la métrica espacial γ_{ij}. Sin embargo, esta métrica está definida para un tiempo *t* concreto, o mejor dicho, para una franja temporal $\sum_t$, como propone el formalismo ADM. Sin embargo, al intentar definir el producto interno con la forma $\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle$ para dos funciones de onda en el mismo tiempo, es imposible ya que tanto el tiempo *t* como la franja temporal $\sum_t$ desaparecen al aplicar el Hamiltoniano, por lo que no existe ningún trasfondo espacio-tiempo para el que *el mismo tiempo* tenga sentido.

Matemáticamente, este problema surge al definir el producto interno como

$$\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle = \int [dq]\psi_\alpha^*[\gamma]\psi_\beta[q] \tag{6.1}$$

Para que la definición fuese correcta, esta expresión debería de divergir, ya que la métrica γ_{ij} representa distintas configuraciones físicas, definidas como franjas temporales que difieren unas de otras por sus cambios de coordenadas. Sin embargo, la restricción impuesta sobre el Hamiltoniano genera *deformaciones* en estas superficies temporales, modificándolas y excluyendo a la métrica de estas. Este hecho se podría solucionar fijando el gauge del producto interno para que la métrica γ_{ij} tratara cada franja temporal de manera individual. Sin embargo, en la práctica esto resulta imposible ya que no se puede definir una división temporal absoluta que tenga sentido para cualquier espacio-tiempo.

Otro de los grandes problemas que surgen junto al problema del tiempo y un elemento fundamental para establecer un teoría cuántica es la definición de un conjunto de observables, una serie de operadores hermíticos que definan los estados físicos. Supongamos un estado físico $|\psi\rangle$ que obedezca la ecuación de Wheeler-DeWitt, y un operador $\hat{O}$. Para que $\hat{O}$ sea capaz de definir un estado, se debe de cumplir que $\hat{O}\mathcal{H}|\psi\rangle = 0$, lo que lleva a

$$\left[\mathcal{H}, \hat{O}\right] = 0 \tag{6.2}$$

Este tipo de operadores existen, sin embargo, en su definición no se aseguran que sean no locales. Más que un problema técnico, éste es un problema conceptual al definir las posibles estructuras causales en una teoría cuántica de la gravedad. En Teoría Cuántica de Campos la estructura causal del espacio-tiempo debe de cumplir obligatoriamente la condición de 'micro-causalidad', es decir,

$$\left[\hat{O}_1(x), \hat{O}_2(x')\right] = 0 \qquad \text{si los puntos } x \text{ y } x' \text{ están separados en el espacio-tiempo.} \tag{6.3}$$

Sin embargo, esta separación viene definida por la métrica y, como ya hemos visto, ésta desaparece en una teoría cuántica de la gravedad.

Además, suponiendo que se cumple la relación 6.2, implica que la imagen de Heisenberg en una teoría cuántica de la gravedad también se encuentra 'congelada' en el tiempo, al igual que la imagen de Schrödinger. Se podría definir la ecuación de movimiento en la imagen de Heisenberg para un operador físico $\hat{O}$ como

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{O}\right] = 0 \tag{6.4}$$

A partir de este problema se han postulado diferentes aproximaciones en la elaboración de una teoría cuántica de la gravedad [27, 28].

1. El primer tipo de solución es aquella en la que se identifica un tiempo interno en función de las variables canónicas, aplicando las restricciones canónicas *antes* de cuantizar el sistema.

2. El segundo tipo de solución actúa de manera contraria a la primera, se establecen las restricciones sobre el sistema cuántico como restricciones sobre los posibles autovectores, definiendo el tiempo *después* de aplicar estas restricciones. Los estados se definen en función de la métrica $|\psi[\gamma]\rangle$ y son las soluciones a la ecuación (6.27).

3. El tercer tipo de solución busca mantener la naturaleza atemporal que surge de aplicar las restricciones. A partir de la aplicación de las restricciones como en el segundo método y diferentes herramientas matemáticas, es posible definir una teoría cuántica sin hacer referencia explícita al tiempo, entendiéndolo como un elemento puramente fenomenológico.

Aproximaciones al problema del tiempo

Tempus ante quantum

La interpretación interna de Schrödinger. Las coordenadas temporales y espaciales se consideran funciones de las variables canónicas y se separan de los grados de libertad del sistema a partir de transformaciones canónicas. Las restricciones se resuelven clásicamente para el momento conjugando de dichas variables, mientras que el resto de las variables físicas del campo gravitacional que no han sido fijadas por el 'gauge' se cuantizan de la manera habitual, dando lugar a una ecuación de Schrödinger para estas variables.

Relojes de materia y fluidos de referencia. Esta es una extensión de la interpretación anterior en la que las variables materiales unido a la geometría se utilizan para etiquetar los eventos en el espacio-tiempo. Estas nuevas variables se introducen en el formalismo de tal manera que facilitan la implementación de las restricciones que llevan a la formulación de la ecuación de Schrödinger.

Gravedad unimodular. Esta aproximación es una modificación de la Relatividad General en la que la constante cosmológica Λ se considera una variable dinámica. El 'tiempo cosmológico' se identifica como la variable conjugada de Λ y la ecuación de Schrödinger se formula a partir de este tiempo.

Tempus post quantum

La interpretación de Klein-Gordon. La ecuación de Wheeler-DeWitt (6.27) se considera una versión análoga de la ecuación de Klein-Gordon en una dimensión infinita para una partícula relativista moviéndose en un geometría fija. La interpretación probabilística de la teoría se basa en encontrar un subespacio de soluciones para la ecuación de Wheeler-DeWitt para el que la 'norma de Klein-Gordon' tenga valor positivo.

Tercera Cuantización. En esta interpretación se promocionan las soluciones $|\psi[\gamma]\rangle$ para la ecuación de Wheeler-DeWitt a operadores para solucionar el problema de la indeterminación del producto escalar en la interpretación de Klein-Gordon. Esta aproximación se puede entender como una segunda cuantización de la partícula relativista cuyos estados son descritos por la ecuación de Klein-Gordon.

Interpretación semi-clásica. En esta interpretación el tiempo solo adquiere importancia solo en algunos limites semiclásicos de la teoría basada en la ecuación de Wheeler-DeWitt. Se aproxima la ecuación de Wheeler-DeWitt a la ecuación típica de Schrödinger en la que la variable del tiempo sale fuera de $|\psi[\gamma]\rangle$, donde surge el carácter probabilístico de los estados físicos.

Tempus nihil est

Interpretación 'ingenua' de Schrödinger. El cuadrado $[|\psi\rangle\,[\gamma]]^2$ de la solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt se interpreta como la densidad de probabilidad de encontrar un hipersuperficie espacial dentro del manifold espaciotemporal $\mathcal{M}$, utilizado como base en Relatividad General, cuya geometría sea γ. El tiempo surge como una coordenada interna dentro de la geometría y se representa como un operador al cuantizar la geometría completa.

Interpretación de la probabilidad condicionada. Esta aproximación es un refinamiento de la interpretación anterior cuya característica principal es el uso de probabilidades condicionadas como resultado de un par de observables *A* y *B*., lo que es una modificación directa del formalismo cuántico habitual. En ciertos casos una de estas dos variables se puede considerar que define un instante temporal (funcionando como un reloj reloj físico) en el que se mide la otra variable. Por tanto, la evolución dinámica del sistema siempre se describe con respecto a la dependencia de las probabilidades condicionadas de las variables que actúan como relojes internos.

Aproximación de la consistencia histórica. En esta interpretación se reinterpreta la teoría cuántica habitual sin la interpretación de Copenhagen. Esta reinterpretación se basa en la definición de un 'historia' del sistema, en la que no se referencia en ningún momento el concepto de tiempo. En la actualidad, esta interpretación busca el uso de integrales funcionales aplicados a los campos espacio-tiempo que se encuentren bien definidas en la ausencia de los espacios de Hilbert convencionales.

Formalismo del tiempo 'congelado'. La base de este formalismo es la declaración de que los observables en una teoría cuántica de la gravedad son operadores que conmutan con todas las restricciones impuestas sobre el sistema y son, por tanto, constantes del movimiento. Es este tipo de aproximación hacia el problema del tiempo la que utilizará la Gravedad Cuántica de Bucles.

Aproximación covariante a la cuantización canónica

Una posible respuesta a este dilema es ofrecida por la cuantización canónica covariante [6], también conocida como el enfoque relacional o de historias completas. En lugar de buscar una evolución respecto a un parámetro temporal, esta aproximación propone que la física se describe enteramente mediante relaciones entre observables físicos. En particular, se centra en la construcción de observables Dirac (invariantes bajo las simetrías gauge, incluidas en las reparametrizaciones temporales) y en su correlación: en vez de decir que 'el sistema evoluciona en el tiempo t', se dice que 'cuando el observable T toma el valor t, el observable O toma el valor o'.

Este enfoque permite reinterpretar la dinámica en términos de evolución interna o *tiempo relacional*, donde un grado de libertad actúa como un reloj respecto al cual evolucionan los demás. La cuantización canónica covariante, al rechazar la necesidad de un tiempo externo, se alinea naturalmente con el carácter general covariante de la relatividad y ofrece una vía conceptualmente sólida para tratar el problema del tiempo dentro de una teoría cuántica del espacio-tiempo.

Espacio de fases covariante

La configuración inicial para la formulación Hamiltoniana es el espacio de fases $\mathcal{M}$, definido como el espacio de los datos iniciales en una superficie de Cauchy $\sum_t$ en una dimensión espacial *d*. Cada conjunto de datos iniciales determinan una solución clásica única al sistema, una *historias* clásica propia del sistema. Al formular el espacio de fases covariante se busca reformular el espacio de fases habitual en función de dichas *historias*.

En la descripción estandar, los datos iniciales se pueden parametrizar al conjugar canónicamente las posiciones y los momentos (q^i, π_i), las cuales se pueden entender como coordenadas z^4 de $\mathcal{M}$. El espacio $\mathcal{M}$ se puede describir como una variedad simplética, donde a cada punto del espacio se le asocia una única trayectoria psoible en todo el sistema. En este tipo de espacios se puede definir una *corriente simplética* ω como

$$\omega = \delta\pi_i \wedge \delta q^i = \omega_{AB}\delta z^A \wedge \delta z^B \tag{6.5}$$

la cual se puede integrar sobre una superficie de Cauchy $\sum_t$ definiendo así

$$\Omega = \int_{\Sigma_t} \omega \tag{6.6}$$

la forma simplética de $\mathcal{M}$. Dada esta forma podemos redefinir los corchetes de Poisson de dos funciones en el espacio de fases como

$$\{X, Y\} = \int_{\Sigma_t} \frac{\delta X}{\delta z^A}(\omega^{-1})^{AB}\frac{\delta Y}{\delta z^B} \tag{6.7}$$

Si se definieran una familia de transformaciones, como pueden ser traslaciones temporales, de la forma $\delta_\tau z^A$ donde el parámetro τ identifica el tipo de transformación, las ecuaciones del movimiento se pueden escribir como

$$\delta_\tau z^A = (\omega^{-1})^{AB}\frac{H[\tau]}{\delta z^B} \tag{6.8}$$

Definiendo así la variación del Hamiltoniano como

$$\delta H[\tau] = \Omega[\delta z, \delta_\tau, z] \tag{6.9}$$

Al tratar un sistema para el que cualquier conjunto de datos iniciales (q^i, π_i) determinan una única solución, cada punto en el espacio de fases $\mathcal{M}$ definido en una superficie de Cauchy $\sum_t$ determina una solución clásica ϕ. En cambio, dada una superficie de Cauchy $\sum_t$, podemos restringir cualquier solución clásica a dicha superficie para determinar un punto en $\mathcal{M}$. Esta definición permite definir una transformación uno a uno del espacio $\mathcal{M}$ al espacio $\bar{\mathcal{M}}$ de soluciones clásicas, o 'historias' como definimos anteriormente. Considerando la transformación

$$\tau_{\sum_t} : \bar{\mathcal{M}} \to \mathcal{M} \qquad \phi \to (q^i, \pi_i)|_{\sum_t} \tag{6.10}$$

es posible llevar cualquier solución clásica a su franja de datos iniciales en $\sum_t$. El espacio de soluciones clásicas también tiene definido una forma simplética $\bar{\Omega}$ manteniendo la misma estructura simplética del espacio de fases. El par $(\bar{\mathcal{M}}, \bar{\Omega})$ define el 'espacio de fases covariante', refiriéndose como 'covariante' al hecho de que no requiere elegir una franja temporal $\sum_t$ específica.

En la mayor parte de teoría invariantes a difeomorfismos, como la Relatividad General, se puede encontrar una expresión explícita de un Hamiltoniano $\bar{H}$ que cumpla la definición 6.9 y que genere difeomorfismo. Esta $\bar{H}$ es el equivalente de un Hamiltoniano en el formalismo ADM para un espacio de fases covariante, el cual es además una restricción sobre el sistema y desaparece en las soluciones físicas de éste.

Aunque los pares $(\bar{H}, \bar{\Omega})$ y (H, Ω) son isomorfos, no son *canonicamente* isomorfos ya que depeden de la elección de la superficie de Cauchy $\sum_t$ en la que trabajar. Este hecho tiene dos importantes implicaciones:

1. Los puntos en el espacio de fases $\mathcal{M}$ se pueden entender como coordenadas en $\bar{\mathcal{M}}$. Mientras que es posible encontrar parametrizaciones globales de las soluciones clásicas, por ejemplo a partir de constantes de movimiento, suele ser una tarea complicada. Sin embargo, al tratar el conjunto de datos iniciales solo en una franja temporal fija se pueden etiquetar de manera sencilla, además de que se puede utilizar $\tau_{\sum_t}$ como transformaciones de coordenadas entre estos puntos.

2. Al considerar una familia de superficies de Cauchy $\sum_{\{t\}}$, si se supone un conjunto de datos iniciales (q^i, π_i) sobre $\sum_{(t)}$ se pueden evaluar estos datos iniciales en otra franja temporal $\sum_{t'}$ a partir de la transformación 6.10 de la forma

$$(q^i, \pi_i)\Big|_{\sum_{t'}} = \tau_{\sum_{t'}} \circ \tau_{\sum_t}^{-1} (q^i, \pi_i)\Big|_{\sum_t} \tag{6.11}$$

lo que equivale a un cambio de coordenadas en $\bar{\mathcal{M}}$. Por tanto, podemos entender la evolución temporal como un cambio de coordenadas al moverse entre superficies $\sum_t$ distintas en el espacio de fases covariante.

Cuantización canónica covariante

A partir de la definición del espacio de fases covariante podemos comprobar si es posible construir una teoría cuántica [29]. Para casos sencillos, si que es posible aplicar este espacio sin embargo, como ya se ha comprobado que sucede para las cuantizaciones canónicas, cuantizar una teoría de la Relatividad General completa sería una tarea casi imposible ya que sería necesario tener una solución general para las ecuaciones de movimiento para cualquier sistema. Si en algún momento fuera posible resolver estas ecuaciones, se podría formular el espacio de fases covariante y, por tanto, solucionar el problema del tiempo.

Planteando un caso específico ,si de manera local se encontrasen un conjunto de coordenadas canónicas $\{q^a, \pi_a\}$ en el espacio covariante $\vec{\mathcal{M}}$ se puede estudiar como sería la cuantización de estas variables. Asumiendo la forma más sencilla de cuantización, los corchetes de Poisson de las coordenadas pasan a ser conmutadores de la forma

$$\begin{aligned} [\hat{q}^a, \hat{\pi}_b] &= i\hbar\delta^a_b \\ \left[\hat{q}^a, \hat{q}^b\right] &= [\hat{\pi}_a, \hat{\pi}_b] = 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

y se define la función de onda en la base de posiciones como $|\psi[q]\rangle$. Para construir una teoría cuántica, uno de los requisitos obligatorios es definir además el producto interno sobre el espacio de fases $\{|\psi[q]\rangle\}$, lo que suele obligar a fijar un gauge sobre cualquier sistema que se mida. Si la teoría es invariante a difeomorfismo, el Hamiltoniano *H* seguirá siendo una restricción sobre el sistema, describiéndose con la forma de la ecuación de Wheeler-DeWitt 5.27 para una función de onda en la base de posiciones

$$\hat{H}\,|\psi[q]\rangle = 0 \tag{6.13}$$

A partir de este punto para continuar desarrollando la teoría se debe de encontrar una imagen que simule la evolución temporal. Para ello considérese la descripción clásica de $\mathcal{M}$ y una superficie de Cauchy $\sum_t$. Se puede definir la transformación $\hat{\tau}_{\sum_t}$ como aquella transformación que transforma unos operadores a otros dentro de la misma teoría

$$\hat{\tau}_{\sum_t} : (\hat{q}^a, \hat{\pi}_a) \to \left(\hat{q}^i(\textstyle\sum_t), \hat{\pi}_i(\textstyle\sum_t)\right) \tag{6.14}$$

esta transformación define un conjunto de operadores para cada franja temporal $\{\hat{q}^i, \hat{\pi}_i\}$, dependientes de los operadores espaciales definidos en el espacio de fases covariante $\{\hat{q}^a, \hat{\pi}_a\}$ y de los datos iniciales clásicos que determinan la forma de la transformación $\tau_{\sum_t}$. Los operadores $\hat{\psi}^i(\sum_t)$ conmutan entre ellos, formando una base de estados *en evolución* al diagonalizar todos los posibles valores de estos operadores

$$\hat{q}^i(\textstyle\sum_t)\,|q^i(\sum_t)\rangle = q^i(\sum_t)\,|q^i(\sum_t)\rangle \tag{6.15}$$

por tanto, todo estado canónico covariante $|\psi[q]\rangle$ se puede expandir en esta base y sus componentes

$$\langle q^i(\textstyle\sum_t)|\psi[\sum_t]\rangle \tag{6.16}$$

son dependientes del 'tiempo', es decir, depende de la franja temporal $\sum_t$ en la que se encuentren.

La aplicación de este formalismo a la gravedad cuántica se ha intentado desarrollar en los últimos años. Debido al problema de solucionar las ecuaciones del movimiento de manera genérica para cualquier sistema su estudio se ha enfocado a casos sencillos hasta que se pueda resolver este problema 'técnico' ya que la aproximación conceptual hacia el problema del tiempo de esta teoría parece correcta. Uno de los mayores ejemplos de aplicar esta aproximación conceptual ha sido la Gravedad Cuántica de Bucles la que, al redefinir la topología del espacio de fases, consigue simplificar el problema de la cuantización.

Capítulo 7
Teoría cuántica de bucles

Una vez identificado que la relatividad general admite una formulación canónica en términos de variables geométricas como las métricas espaciales γ_{ij} (formalismo ADM) o triadas e_a^i, el siguiente paso natural es su cuantización a partir de una aproximación covariante, como hemos visto en el apartado anterior. Sin embargo, la aplicación directa de los métodos de Dirac mediante la ecuación de Wheeler–DeWitt, plantea serios obstáculos tanto matemáticos como conceptuales: la ecuación es difícil de definir rigurosamente, carece de una noción explícita de tiempo, y no proporciona una base clara para construir estados físicos.

La gravedad cuántica de bucles surge como una propuesta para superar estas dificultades. Introducida originalmente por Abhay Ashtekar en los años 80, esta teoría reformula la gravedad clásica como una teoría gauge en términos de nuevas variables canónicas: una conexión SU(2) A_a^i y su momento conjugado, el campo *densitizado* de triadas E_i^a (*variables de Ashtekar*). Estas variables transforman la gravedad en una teoría similar a Yang–Mills, lo que permite aplicar técnicas bien desarrolladas de cuantización para teorías gauge [30, 31].

A partir de la definición de las variables de Ashtekar ,se construye un espacio de Hilbert de estados físicos utilizando funciones cilíndricas definidas sobre redes de curvas (los *bucles* que dan nombre a la teoría). De esta forma, la teoría predice una estructura discreta del espacio a escalas de Planck, donde áreas y volúmenes aparecen cuantizados.

Conexiones y triads

Las definiciones dadas por las triads permiten reformular la métrica espacial [32] como

$$\tilde{q}^{ab} = det(q)q^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij} \tag{7.1}$$

A partir de estas nuevas variables canónicas podemos reescribir el Lagrangiano de la Relatividad General como N

$$L = \frac{1}{8\pi G\beta} \int d^3x \left(E_i^a \dot{A}_a^i + N\epsilon_{ijk} E_i^a E_j^b F_{ab}^k + N^a E_i^b F_{ab}^i + \lambda^i (D_a E^a)^i \right) \tag{7.2}$$

donde β se conoce como el *parámetro de Barbero-Immirzi* e identifica una familia de variables de Ashtekar, F_{ab}^i hace referencia a la curvatura de la propia conexión Ashtekar-Barbero A_a^i; y

λ^i es un multiplicador de Lagrange.

A partir de estas definiciones podemos reescribir las restricciones que establece la Relatividad General. El primer conjunto de restricciones vienen dadas por la ley de Gauss (restricción que proviene del formalismo Yang-Mills), asegurando la invarianza gauge definiendo que el operador transformación gauge $\mathcal{G}^i$

$$\mathcal{G}^i = D_a E_i^a = 0 \tag{7.3}$$

Las segundas restricciones a estudiar son las impuestas sobre los momentos canónicos

$$V_b = E_i^a F_{ab}^i = 0 \tag{7.4}$$

Y la última restricción y la más problemática, la restricción sobre el Hamiltoniano

$$H = \epsilon_{ijk} E_i^a E_j^b E^c F_{ab}^k = 0 \tag{7.5}$$

Las restricciones sobre los momentos son los supuestos generadores de difeomorfismo espaciales, no obstante, para que éstos sean puros y no dependan completamente de las transformaciones gauge se debe de incluir una restricción adicional, una combinación lineal entre restricciones de los momentos y la ley de Gauss; conocida como *restricción sobre difeomorfismos*

$$C_a = V_a - A_a^i (D_b E_i^b) \tag{7.6}$$

Cuantización de las nuevas restricciones

A partir de las nuevas variables, dada la variable de configuración A_a^i, siguiendo el procedimiento tradicional, se considera una función de onda $\psi(A_a^i)$ A esta forma de entender la función de onda se le conoce como *representación por conexión*. Al realizar la cuantización, se promueven las variables canónicas a operadores. La conexión A_a^i se promueve a un operador multiplicativo

$$\hat{A}_a^i \psi(A) = A_a^i \psi(A) \tag{7.7}$$

y las triads son derivadas funcionales

$$\hat{E}_i^a \psi(A) = -i \frac{\delta \psi(A)}{\delta A_a^i} \tag{7.8}$$

cuyas relaciones de conmutación se escriben como

$$\left[\hat{A}_a^i(y), \hat{E}_i^a(x)\right] = i\delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x-y) \tag{7.9}$$

A partir de promover las variables canónicas, el siguiente paso para la cuantización es promover las restricciones a operadores.

$$\hat{\mathcal{G}}^i\psi(A) = -iD_a\frac{\delta\psi(A)}{\delta A_a^i} \tag{7.10}$$

$$\hat{V}_a\psi(A) = -i\hat{F}_{ab}^i\frac{\tilde{\psi}(A)}{\delta A_b^i} \tag{7.11}$$

Representación de bucles de la Relatividad General

Una vez se tiene claro el proceso de cuantización y las restricciones que se deben de imponer al sistema se debe de reformular el espacio de fases para poder acomodarlo a la idea de *bucles* por lo que se caracteriza esta teoría. Para ello se realiza un cambio de topología, al considerar que el espacio está formado por *redes de spines*, permitiendo la simplificación de la cuantización de todo el espacio de fases. Para poder entender como se forman estas redes de spines antes tenemos que introducir el concepto de holonomía.

Holonomia

Un manifold de Riemann *M* de *n* dimensiones se define en cada punto de un espacio vectorial euclideo a partir de un producto interno. El grupo $O(n)$ de transformaciones ortogonales que preservan el producto interno se conoce como el *grupo estructural* del manifold, con el cual son compatibles todas las operaciones sobre *M*. Un ejemplo característico es el de la conexión canónica en *M* (la conexión de Levi-Civita), definiendo así el transporte paralelo. Este transporte paralelo define a su vez una isometría entre los espacios tangentes de dos puntos, *x* e *y*, dado un camino entre ellos. La dependencia de este camino se puede medir tomando *x* e *y* como el mismo punto y haciendo el transporte paralelo entre todos los *loops* o bucles que generará *x*, produciendo lo que se conoce como *grupo holónimo H* [33],es decir, un subgrupo de $O(n)$.

La acción de este *grupo holónimo H* permite evaluar como un objeto definido en *M* varía de un punto a otro. Al aplicar grupo *H* sobre el tensor de curvatura *R*, podemos identificar las variaciones infinitesimales del transporte en paralelo. En un punto dado, el tensor de curvatura se puede tratar como una transformación lineal que asigna a dos vectores *x* e *y* una transformación antisimétrica R_{xy}. En el caso de que esta transformación genere, como es esperable, un álgebra de Lie, *H* coincide con $SO(n)$.

En el contexto del estudio de cualquier tipo de campo se puede entender la holonomía de la siguiente manera. Se puede definir un campo A_μ^{IJ} de un grupo *G*, definido sobre un manifold.

Este campo funciona como una conexión en M, generando el transporte paralelo de un objeto sobre los caminos posibles del manifold. Se puede definir un vector $\vec{v} = v^I$ definido en un punto p_1 en el espacio interno del manifold y una curva ρ que comience en p_1 y termine en p_2. Esta curva se puede parametrizar como $x^\mu(t)$, yendo *t* de 0 a 1. Si $\vec{v}$ se transporta paralelo sobre ρ se podrá definir un nuevo vector $\vec{v}_\rho$ en p_2. Estos dos vectores se pueden relacionar como

$$\vec{v}_\rho = U_\rho \vec{v} \tag{7.12}$$

donde U_ρ será la holonomía de ρ, que se puede definir como

$$U_\rho[A] = Pe^{\int_\rho A} = Pe^{\int_\rho dx^\mu A_\mu} \tag{7.13}$$

donde *P* indica que los factores que aparecen en la exponencial se ordenan de izquierda a derecha en el orden en el que aparecen en ρ.

Una tipo importante de holonomías, y el de mayor interés para la Gravedad Cuántica de Bucles, son aquellas que pertenecen a bucles cerrados. Para todo el conjunto de caminos cerrado que empiezan y acaban en el mismo punto *p*, las holonomías son matrices que forman un grupo dado por la multiplicación

$$U_{\rho_1 \circ \rho_2} = U_{\rho_1} U_{\rho_2} \tag{7.14}$$

y su inversa

$$(U_\rho)^{-1} = U_{\rho^{-1}} \tag{7.15}$$

donde la composición $\rho_1 \circ \rho_2$ se refiere a recorre el camino cerrado ρ_1 y el camino ρ_2 y la inversa ρ^{-1} se refiere a recorrer ρ hacia atrás. En el estudio de la gravedad, el grupo holónimo de la conexión Levi-Civita (trabajando en un manifold orientable) será $SO(3,1)$.

Bucles de Wilson

Aplicando la definición de holonomía sobre bucles cerrados, podemos definir [22] los *bucles de Wilson* tomando las trazas de las holonomías

$$W_\rho = Tr(U_\rho) \tag{7.16}$$

La versión compleja de los bucles de Wilson se pueden expresar como

$$W_\rho = Tr\left(Pe^{\int_\rho A}\right) \tag{7.17}$$

donde ρ es el camino cerrado. Estos objetos tienen la propiedad de ser invariantes gauge y de no depender del punto inicial que se elija. Considerando dos puntos p_1 y p_2 conectados por un camino ρ_{12}, Un camino cerrado ρ_1 que comience y acabe en p_1 se puede transformar en un camino cerrado sobre p_2 de la forma $\rho_2 = \rho_{12}\rho_1(\rho_{12})^{-1}$. Las distintas holonomías que se forman se pueden relacionar de la misma manera

$$U_{\rho_2} = U_{\rho_{12}}U_{\rho_1}(U_{12})^{-1} \tag{7.18}$$

Teniendo en cuenta la propiedad cíclica de la traza podemos asegurar que los bucles de Wilson de ρ_1 y de ρ_2 son equivalentes.

Con estas definiciones podemos codificar toda la información invariante gauge del campo A_ρ a partir de bucles de Wilson. A partir de este punto se formulo la *representación de bucles* de la Relatividad General en un intento de cuantizar la gravedad como una teoría gauge basada en la holonomía. Para formular una teoría cuántica usando holonomías, se deben de poder expresar los estados $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert a partir de bases de estados de la forma $|\{U_\rho\}\rangle$ definidos sobre el conjunto de holonomias de todos los bucles ρ posibles en el manifold. La *función de onda de bucles* se podrá definir como

$$\begin{aligned} \psi(\rho) &= \langle\{U_\rho\}|\psi\rangle \\ &= \int DA\,\langle\{U_\rho\}|A\rangle\,\langle A|\psi\rangle \\ &= \int DA\,\langle\{U_\rho\}|A\rangle\,\psi(A) \end{aligned} \tag{7.19}$$

Redes de spines

A partir de la definición de los bucles de Wilson, sabemos que éstos codifican toda la información sobre la invarianza gauge de una conexión A_ρ. Las trazas de los holónimos desde la que se definen estos bucles, también construyen a su vez una base de soluciones para la ecuación de Gauss 7.10. Por tanto, se puede expresar un estado cuántico sobre esta base con la forma

$$\psi[A] = \sum_\rho \psi[\rho]W_\rho[A] \tag{7.20}$$

donde el sumatorio es sobre todos los posibles bucles cerrados y los coeficientes que los etiquetan dependen de $\psi[\rho]$. La traza de los holónimos $W_\rho[A]$ se pueden escribir como

$$W_\rho[A] = Tr\left(P\left[exp\left(-\oint_\rho \dot{\rho}^a(s)A_a(s)ds\right)\right]\right) \tag{7.21}$$

Esta expresión se conoce como una *transformación de bucle*. Trabajar en este espacio tiene ciertas ventajas debido a sus propiedades, por ejemplo, resolviendo las restricciones sobre difeomorfismos. Para ello, tan solo se deben de considerar funciones de bucles invariantes bajo deformaciones del propio bucle. Estas funciones se conocen como *invariantes a nudos*. Para ejemplificar como funcionan se pueden considerar dos curvas $\rho^a(s_1)$ y $\eta^b(s_2)$ en un espacio plano. La integral

$$Linking(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{rho} ds_1 \oint_{\eta} ds_2 \partial^a \left(\frac{1}{|\rho^d(s_1) - \eta^d(s_2)|} \right) \epsilon_{abc} \dot{\rho}^b(s_1) \dot{\eta}^c(s_2) \tag{7.22}$$

se define de tal forma que su resultado será 1 si las dos curvas se encuentran entrelazadas, y 0 en caso contrario. Esta cantidad se define sobre dos bucles en vez de uno, pero muestra el comportamiento de ambas funciones de bucles invariantes a deformaciones.

Usando la transformación de bucles se puede traducir la acción de los operadores a la representación de bucles. No obstante, antes de expresar los operadores en la representación hay que corregir un problema en esta representación: las bases en la representación de bucles tiene 'sobrecompletitud'. Este hecho se refiere a la existencia de relaciones no lineales entre las trazas de los holónimos del manifold, por tanto, las funciones expresadas en bucles del tipo $\psi[\rho]$ que se pueden utilizar se encuentran muy restringidas. Estas relaciones provienen de la propia definición de holonomía, ya que éstas deben de cumplir lo que se conocen como *identidades de Mandelstam* (entre ellas se ecuentran las ecuaciones 7.14 y 7.15).

Para solucionar este problema se debe de modificar la representación del álgebra sobre la que se está trabajando. Para poder construir conexiones y operadores que calculen el transporte paralelo sobre una curva en un álgebra se suelen utilizar matrices. En este caso, los operadores de transporte paralelo pueden contraer sus índices en puntos de intersección entre las matrices que los definen a partir de objetos llamados *conectores*. El uso de estas matrices y sus respectivos conectores dan lugar a las *redes de spines* [34], un grafo con intersecciones y con lineas 'con colores', donde el *color* viene dado por un número *N* definido por la dimensión de las matrices de las holonomías $(N + 1)$. Los conectores se definen como productos tensoriales de ϵ_{ijk} y δ^i_j donde los índices *i* y *j* se refieren a las distintas matrices de Pauli.

Las redes de spines definen una base de funciones invariantes gauge [35, 36] que minimiza los grados de 'sobrecompletitud' de la base de bucles, todos los ingredientes necesarios de una base adecuada para definir un estado cuántico de la gravedad. Para ello se debe de definir el producto interno en este tipo de espacios. Dados dos redes de spines s y s' y sus dos estados ψ_s y $\psi_{s'}$, el producto interno de estos dos estados será 1 si *s* y *s'* se relacionan entre ellos a través de un difeomorfismo, es decir, se pueden deforma uno como el otro, y 0 en el caso contrario. Un estado mixto sobre esta base se puede expresar como combinación lineal de estados de la forma

$$\psi_s = \sum_m c_m \psi_{s_m} \tag{7.23}$$

Capítulo 8
Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos expuestos los diferentes problemas a los que se enfrenta la comunidad científica actualmente para unificar las teorías de la Relatividad General y la Mecánica Cuántica. Tanto el avance de la Teoría Cuántica de Campos como de la Cosmología depende de encontrar un formalismo que unifique ambas teorías es fundamental para su avance. La gravedad, como punto común entre ambas teorías es a su vez el mayor obstáculo para unificarlas

Uno de los problemas fundamentales recae completamente en las bases conceptuales de la Mecánica Cuántica. Al problema de la implementación de la función de onda en la teoría cuántica se ha contrapuesto una perspectiva relacional de los estados cuánticos y los observables físicos, entiendo un sistema tan solo de manera relativa a otro. Esta explicación solventa los problemas conceptuales que existen en la Mecánica Cuántica, sentando una base para acercar y relacionar la Relatividad General.

Una vez solucionados los problemas de la Mecánica Cuántica se ha dado explicación al paso de un sistema clásico a uno cuántico, el proceso de cuantización. Para el caso de un sistema relativista sin embargo, hay que tener se deben de analizar las teorías gauge que se asocian al concepto de campo en Relatividad General. Es a partir de esta teoría donde se ha comprobado que surgen las condiciones (restricciones sobre los observables) necesarias para cuantizar un sistema relativista.

A partir de estas restricciones se han formulado distintas teorías Hamiltonianas sobre las que desarrollar reformulaciones del concepto de campo espacio-tiempo. Entre ellos el formalismo ADM se ha utilizado como base ya que consigue separar la parte espacial y temporal permitiendo así transformar el tiempo de una variable física a un etiqueta de los estados posibles del sistema.

Como ejemplo del uso del formalismo ADM se ha analizado la primera cuantización formal que se elaboró de la gravedad, y la primera teoría cuántica de la gravedad en existir, formulada DeWitt y conocida como cuantización canónica. Del análisis que DeWitt hizo de la promoción de las restricciones clásicas de un sistema relativista a condiciones cuánticas (promocionándolas a operadores) se llega a uno de los mayores problemas de la cuantización de la gravedad: el problema del tiempo expresado en la ecuación de Wheeler-DeWitt, o cuantización de la restricción sobre el Hamiltoniano.

El problema del tiempo ha llevado a la comunidad física a desarrollar numerosas interpretaciones filosóficas sobre como reinterpretar la concepción que tenemos del tiempo. Entre ellas, y en linea con la trasformación del formalismo ADM, se ha presentado la cuantización covariante, que entiende el espacio-tiempo no como un continuo, sino como una colección de superficies que describen las posibles *historia* que pueden esos estados físicos.Esta cuantización funciona correctamente para sistemas locales sin embargo, para que funcione como teoría, necesita resolver las ecuaciones del movimiento para cualquier tipo de sistemas, un trabajo practicamente imposible o, por lo menos, de gran complejidad.

Usando esta aproximación conceptual se ha desarrollado varios formalismos Hamiltoniano para simplificar esta tarea, entre los que cabe destacar el formalismo de tetrads y triads, a partir de los que se desarrollaran la formulación de las variables de Ashtekar.

Fue a partir de estas nuevas variables dinámicas desde las que se empezó a desarrollar la Gravedad Cuántica de Bucles, una teoría que intentar solucionar todos los problemas planteados en este trabajo que involucran a la cuantización de la gravedad. A partir de una reformulación del álgebra y usando como base las variables de Ashtekar y los bucles de Wilson, este teoría entiende el espacio como un discreto formando una *red de spines*. Es con esta discretización del espacio que soluciona la complejidad de la cuantización covariante, aproximación de la que se basa para varios puntos conceptuales.

Entre las posibles soluciones actuales al problema de la gravedad cuántica, la aproximación de bucles es una de las más rompedoras y polémicas debido a la enorme diferencia entre el álgebra discreta que utiliza en oposición al continuo espacio-tiempo al que estamos acostumbrados. Sin embargo, una buena parte de la comunidad científica se ha volcado en el desarrollo de esta teoría comenzando a dar resultados para problemas cosmológicos como en el estudio de los agujeros negros y la formulación de los agujeros blancos; y en dar una descripción del Universo antes del Big Bang.

Bibliografía

[1] Eren Volkan Küçük. *The Birth of Quantum Mechanics: A Historical Study Through the Canonical Papers*. 2025. arXiv: 2503.13630 [physics.hist-ph]. URL: https://arxiv.org/abs/2503.13630.

[2] Sabine Hossenfelder. *Existential Physics: A Scientist's Guide to Life's Biggest Questions*. Viking, 2022. ISBN: 9781984879455.

[3] Carlo Rovelli. "Relational quantum mechanics". En: *International Journal of Theoretical Physics* 35.8 (ago. de 1996), págs. 1637-1678. ISSN: 1572-9575. DOI: 10.1007/bf02302261. URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF02302261.

[4] Francesca Vidotto. *Atomism and Relationalism as guiding principles for Quantum Gravity*. 2013. arXiv: 1309.1403 [physics.hist-ph]. URL: https://arxiv.org/abs/1309.1403.

[5] Lee Smolin. *Time, measurement and information loss in quantum cosmology*. 1993. arXiv: gr-qc/9301016 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9301016.

[6] Donald Marolf. *Refined Algebraic Quantization: Systems with a single constraint*. 1999. arXiv: gr-qc/9508015 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9508015.

[7] Julian Barbour. *The End of Time*. Oxford University Press, 1999. ISBN: 9780195145922.

[8] Lee Smolin. *Three Roads to Quantum Gravity*. Basic Books, 2001. ISBN: 9780465078363.

[9] Werner Heisenberg. "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen". En: *Zeitschrift für Physik* 33 (1925), págs. 879-893. DOI: 10.1007/BF01328377.

[10] P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Vol. 2. Courier Corporation, 2001. ISBN: 9780486417134.

[11] Carlo Rovelli. "'Space is blue and birds fly through it'". En: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 376.2123 (mayo de 2018), pág. 20170312. ISSN: 1471-2962. DOI: 10.1098/rsta.2017.0312. URL: http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2017.0312.

[12] Carlo Rovelli. “Relational Quantum Mechanics”. En: *International Journal of Theoretical Physics* 35 (1996), págs. 1637-1678. DOI: 10.1007/BF02302261.

[13] Federico Laudisa. “The EPR Argument and the Relational Interpretation of Quantum Mechanics”. En: *Foundations of Physics Letters* 13 (2000), págs. 119-132.

[14] Brian Drummond. “Understanding quantum mechanics: a review and synthesis in precise language”. En: *Open Physics* 17 (2019), págs. 390-437. URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:202730291.

[15] Christopher A. Fuchs. *Quantum Mechanics as Quantum Information (and only a little more)*. 2002. arXiv: quant-ph/0205039 [quant-ph]. URL: https://arxiv.org/abs/quant-ph/0205039.

[16] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. ISBN: 9780226870335.

[17] Carlo Rovelli. “Why Gauge?” En: *Foundations of Physics* 44.1 (ene. de 2014), págs. 91-104. ISSN: 1572-9516. DOI: 10.1007/s10701-013-9768-7. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10701-013-9768-7.

[18] Abhay Ashtekar. “New variables for classical and quantum gravity”. En: *Physical Review Letters* 57.18 (1986), págs. 2244-2247. DOI: 10.1103/PhysRevLett.57.2244.

[19] Carlo Rovelli. “Loop quantum gravity”. En: *Living Reviews in Relativity* 1.1 (1998), pág. 1. DOI: 10.12942/lrr-1998-1.

[20] Philipp Andres Höhn y Christopher S. P. Wever. “Quantum theory from questions”. En: *Physical Review A* 95.1 (ene. de 2017). ISSN: 2469-9934. DOI: 10.1103/physreva.95.012102. URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.95.012102.

[21] Marc Henneaux y Claudio Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1992. ISBN: 9780691087757. URL: http://www.jstor.org/stable/j.ctv10crg0r (visitado 03-05-2025).

[22] Bianca Dittrich. “A First Course in Loop Quantum Gravity”. En: *Classical and Quantum Gravity* 29.24 (dic. de 2012), pág. 249001. DOI: 10.1088/0264-9381/29/24/249001. URL: https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/29/24/249001.

[23] Alejandro Corichi y Dario Núñez. *Introduction to the ADM formalism*. 2023. arXiv: 2210.10103 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/2210.10103.

[24] Yaser Tavakoli. *Lecture III: Ashtekar variables for general relativity (Courses in canonical gravity)*. Accessed: 2025-05-03. Ene. de 2015. URL: https://www.cosmo-ufes.org/uploads/1/3/7/0/13701821/lect.notes-3.pdf.

[25] Bryce S. DeWitt. “Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory”. En: *Phys. Rev.* 160 (5 ago. de 1967), págs. 1113-1148. DOI: 10.1103/PhysRev.160.1113. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.160.1113.

[26] S. Carlip y Weixuan Hu. *Covariant canonical quantization and the problem of time*. 2023. arXiv: 2312.10272 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/2312.10272.

[27] Stuart Kauffman y Lee Smolin. *A possible solution to the problem of time in quantum cosmology*. 1997. arXiv: gr-qc/9703026 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9703026.

[28] Edward Anderson. “The Problem of Time in Quantum Gravity”. En: *arXiv preprint arXiv:1009.2157* (2010).

[29] G.M. von Hippel y M.N.R. Wohlfarth. “Covariant canonical quantization”. En: *The European Physical Journal C* 47.3 (jun. de 2006), págs. 861-872. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s2006-02595-5. URL: http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2006-02595-5.

[30] Thomas Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press, 2007. ISBN: 9780521842631.

[31] Rodolfo Gambini y Jorge Pullin. *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9780521651042.

[32] Norbert Bodendorfer. *An elementary introduction to loop quantum gravity*. 2016. arXiv: 1607.05129 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/1607.05129.

[33] A. Beauville. *Riemannian Holonomy and Algebraic Geometry*. 1999. arXiv: math/9902110 [math.AG]. URL: https://arxiv.org/abs/math/9902110.

[34] Carlo Rovelli y Lee Smolin. “Spin networks and quantum gravity”. En: *Physical Review D* 52.10 (nov. de 1995), págs. 5743-5759. ISSN: 0556-2821. DOI: 10.1103/physrevd.52.5743. URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.52.5743.

[35] B Dittrich. “Partial and complete observables for canonical general relativity”. En: *Classical and Quantum Gravity* 23.22 (oct. de 2006), págs. 6155-6184. ISSN: 1361-6382. DOI: 10.1088/0264-9381/23/22/006. URL: http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/23/22/006.

[36] Bianca Dittrich et al. *Chaos, Dirac observables and constraint quantization*. 2015. arXiv: 1508.01947 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/1508.01947.